Mouldの集合と非可換べき級数環の間の代数的な対応について

小見山尚　（名古屋大学）

本稿は、Ecalle ([E81]) により導入され、多重ゼータ値の研究に応用 ([E03, E11]) された mould や、その重要な対象である alternal mould や symmetral mould の性質を記述するのに使われる dimould ([Sau]) について復習する。また、これらを一般化した $S_\bullet$-mould を導入し、Unique prolongation theorem という mould の間の関係式を導く定理を紹介する。さらに、Schneps ([Sch12, Sch15]) により導入されている２変数非可換多項式環から mould の集合への写像 ma の一般化を考え、いくつかの性質を述べる。この原稿の内容は古庄英和氏と広瀬稔氏（ともに名古屋大学）との共同研究 ([FHK]) に基づくものである。

1　Mould と Dimould、$S_\bullet$-mould

この節では、mould 及び dimould とそれらの一般化である $S_\bullet$-mould について説明する。また、形式的べき級数で成り立つ関係式を mould の関係式へ持ち上げるために使用される Unique prolongation theorem についても触れる。

1.1　Mould

この節では Γ を与えられた集合とする。また m 変数形式的べき級数環 $\mathcal{F}_{\mathrm{ser},m}=\mathbb{Q}[[x_1,\dots,x_m]]$ に対し、$\mathcal{F}_{\mathrm{ser}}:=\bigcup_{m\geqslant 0}\mathcal{F}_{\mathrm{ser},m}$ とし、$\mathcal{F}_{\mathrm{ser},m}$ の商体 $\mathcal{F}_{\mathrm{Lau},m}=\mathbb{Q}((x_1,\dots,x_m))$ に対し、$\mathcal{F}_{\mathrm{Lau}}:=\bigcup_{m\geqslant 0}\mathcal{F}_{\mathrm{Lau},m}$ とする。簡単のため $\mathcal{F}=\mathcal{F}_{\mathrm{ser}}$ (resp. $\mathcal{F}_{\mathrm{Lau}}$) に対し、$\mathcal{F}_m$ により $\mathcal{F}_{\mathrm{ser},m}$ (resp. $\mathcal{F}_{\mathrm{Lau},m}$) を表すとする。

定義 1.1. **（$\mathcal{F}=\bigcup_{m\geqslant 0}\mathcal{F}_m$ に値を持ち集合 Γ によりインデックス付けされる）*mould*** とは族

$$M=\left(M\binom{x_1,\dots,x_m}{\sigma_1,\dots,\sigma_m}\right)_{m\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0},\sigma_i\in\Gamma},$$

であって、$m \geq 0$ に対し $M\binom{x_1,\dots,x_m}{\sigma_1,\dots,\sigma_m} \in \mathcal{F}_m$ となるときをいう。$\mathcal{F}$ に値を持ち集合 Γ によりインデックス付けされる *mould* 全体の集合を $\mathcal{M}(\mathcal{F};\Gamma)$ により表す。この集合 $\mathcal{M}(\mathcal{F};\Gamma)$ は次のような演算により非可換 $\mathbb{Q}$-代数の構造を持つ：

$$A + B := \left(A\binom{x_1,\dots,x_m}{\sigma_1,\dots,\sigma_m} + B\binom{x_1,\dots,x_m}{\sigma_1,\dots,\sigma_m}\right)_{m\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0},\sigma_i\in\Gamma},$$
$$A \times B := \left(\sum_{i=0}^{m} A\binom{x_1,\dots,x_i}{\sigma_1,\dots,\sigma_i} B\binom{x_{i+1},\dots,x_m}{\sigma_{i+1},\dots,\sigma_m}\right)_{m\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0},\sigma_i\in\Gamma}.$$

ここで、単位元 $I \in \mathcal{M}(\mathcal{F};\Gamma)$ は

$$I\binom{x_1,\dots,x_m}{\sigma_1,\dots,\sigma_m} := \begin{cases} 1 & (m = 0), \\ 0 & (\textit{otherwise}), \end{cases}$$

として与えられる（ただし $m \geqslant 0$ かつ $(\sigma_1,\dots,\sigma_m) \in \Gamma^m$）。また、すべての成分が $\mathbb{Q}$ に属する *mould* を ***constant-mould*** と呼ぶ（単位元 I は *constant-mould* の一例である）。

注意 1.2. $\mathcal{M}(\mathcal{F};\Gamma)$ の部分集合として

$$\mathrm{ARI}(\mathcal{F};\Gamma) := \{M \in \mathcal{M}(\mathcal{F};\Gamma) \mid M(\emptyset) = 0\},$$
$$\mathrm{GARI}(\mathcal{F};\Gamma) := \{M \in \mathcal{M}(\mathcal{F};\Gamma) \mid M(\emptyset) = 1\},$$

を考えると、$(\mathrm{ARI}(\mathcal{F};\Gamma), [,])$ はリー代数に、$(\mathrm{GARI}(\mathcal{F};\Gamma), \times)$ は群になることが分かる。ここで、$[A,B] := A\times B - B\times A$（$A, B \in \mathrm{ARI}(\mathcal{F};\Gamma)$）とした。

次に集合 $\mathrm{ARI}(\mathcal{F};\Gamma)$, $\mathrm{GARI}(\mathcal{F};\Gamma)$ の部分集合を導入する。集合 $X := \{\binom{x_i}{\sigma}\}_{i\in\mathbb{N},\sigma\in\Gamma}$ に対し

$$X_{\mathbb{Z}} := \{\binom{u}{\sigma} \mid u = a_1x_1 + \cdots + a_kx_k,\ k \in \mathbb{N},\ a_j \in \mathbb{Z},\ \sigma \in \Gamma\},$$

と定め、$X_{\mathbb{Z}}$ のすべての元により生成される非可換自由モノイドを $X_{\mathbb{Z}}^{\bullet}$ により表す。また、$X_{\mathbb{Z}}$ の元により生成される $\mathbb{Q}$ 上非可換多項式環を $\mathbb{Q}\langle X_{\mathbb{Z}}\rangle$ により表す（単位元は $\emptyset$ と書く）。$\mathbb{Q}\langle X_{\mathbb{Z}}\rangle$ 上の積 $⧢$ を $\emptyset ⧢ \omega := \omega ⧢ \emptyset := \omega$ かつ

$$u\omega ⧢ v\eta := u(\omega ⧢ v\eta) + v(u\omega ⧢ \eta),$$

により定める（ただし $u, v \in X_{\mathbb{Z}}$ かつ $\omega, \eta \in X_{\mathbb{Z}}^{\bullet}$）。このとき、$(\mathbb{Q}\langle X_{\mathbb{Z}}\rangle, ш)$ は可換な $\mathbb{Q}$ 上結合代数になる。今、整数の族 $\{\mathrm{Sh}\binom{\omega;\eta}{\alpha}\}_{\omega,\eta,\alpha\in X_{\mathbb{Z}}^{\bullet}}$ を

$$\omega ш \eta = \sum_{\alpha\in X_{\mathbb{Z}}^{\bullet}} \mathrm{Sh}\binom{\omega;\eta}{\alpha}\alpha,$$

により定める。

定義 1.3. *Mould* $M \in \mathrm{ARI}(\mathcal{F};\Gamma)$ *(resp.* $\in \mathrm{GARI}(\mathcal{F};\Gamma)$*)* が

$$\sum_{\alpha\in X_{\mathbb{Z}}^{\bullet}} \mathrm{Sh}\left(\begin{matrix}\binom{x_1,\ \dots,\ x_p}{\sigma_1,\ \dots,\ \sigma_p};\binom{x_{p+1},\ \dots,\ x_{p+q}}{\sigma_{p+1},\ \dots,\ \sigma_{p+q}}\\ \alpha\end{matrix}\right)M(\alpha)=0$$

$$(\textit{resp.}\ \ = M\begin{pmatrix}x_1,\ \dots,\ x_p\\ \sigma_1,\ \dots,\ \sigma_p\end{pmatrix} M\begin{pmatrix}x_{p+1},\ \dots,\ x_{p+q}\\ \sigma_{p+1},\ \dots,\ \sigma_{p+q}\end{pmatrix}),$$

（$p, q \geq 1$）をみたすとき、M は ***alternal*** *(resp.* ***symmetral****)* であるという。

$\mathrm{ARI}(\mathcal{F};\Gamma)$, $\mathrm{GARI}(\mathcal{F};\Gamma)$ の部分集合を

$$\mathrm{ARI}(\mathcal{F};\Gamma)_{\mathrm{al}} := \{M \in \mathrm{ARI}(\mathcal{F};\Gamma) \mid M \text{ は alternal}\},$$
$$\mathrm{GARI}(\mathcal{F};\Gamma)_{\mathrm{as}} := \{M \in \mathrm{GARI}(\mathcal{F};\Gamma) \mid M \text{ は symmetral}\},$$

により定める。このとき、$(\mathrm{ARI}(\mathcal{F};\Gamma)_{\mathrm{al}}, [,])$（resp. $(\mathrm{GARI}(\mathcal{F};\Gamma)_{\mathrm{as}}, \times)$）は $(\mathrm{ARI}(\mathcal{F};\Gamma), [,])$（resp. $(\mathrm{GARI}(\mathcal{F};\Gamma), \times)$）の部分リー代数（resp. 部分群）になる。

1.2 Dimould

定義 1.4. **（$\mathcal{F}$ に値を持ち集合 Γ_1，Γ_2 によりインデックス付けされる）** ***dimould*** とは族

$$M := \left(M\begin{pmatrix}x_1,\dots,x_r;\,x_{r+1},\dots,x_{r+s}\\ \sigma_1,\dots,\sigma_r;\,\sigma_{r+1},\dots,\sigma_{r+s}\end{pmatrix}\right)_{r,s\in\mathbb{Z}_{\geq 0},\sigma_1,\dots,\sigma_r\in\Gamma_1,\sigma_{r+1},\dots,\sigma_{r+s}\in\Gamma_2},$$

であって、$M(\emptyset;\emptyset) \in \mathbb{Q}$ かつ $M\begin{pmatrix}x_1,\dots,x_r;\,x_{r+1},\dots,x_{r+s}\\ \sigma_1,\dots,\sigma_r;\,\sigma_{r+1},\dots,\sigma_{r+s}\end{pmatrix} \in \mathcal{F}_{r+s}$（$r \geq 1$ *or* $s \geq 1$）となるときをいう。*Dimould* 全体の集合を $\mathcal{M}_2(\mathcal{F};\Gamma_1,\Gamma_2)$ により表す。集合 $\mathcal{M}_2(\mathcal{F};\Gamma_1,\Gamma_2)$ は次のような積により非可換 $\mathbb{Q}$ 上代数の構造を持つ：

$$\begin{aligned}&(A\times B)\begin{pmatrix}x_1,\dots,x_r;\,x_{r+1},\dots,x_{r+s}\\ \sigma_1,\dots,\sigma_r;\,\sigma_{r+1},\dots,\sigma_{r+s}\end{pmatrix}\\ &:= \sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{s} A\begin{pmatrix}x_1,\dots,x_i;\,x_{r+1},\dots,x_{r+j}\\ \sigma_1,\dots,\sigma_i;\,\sigma_{r+1},\dots,\sigma_{r+j}\end{pmatrix} B\begin{pmatrix}x_{i+1},\dots,x_r;\,x_{r+j+1},\dots,x_{r+s}\\ \sigma_{i+1},\dots,\sigma_r;\,\sigma_{r+j+1},\dots,\sigma_{r+s}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

ここで、単位元 $I \in \mathcal{M}_2(\mathcal{F};\Gamma_1,\Gamma_2)$ は次で与えられる。

$$I\left(\begin{smallmatrix} x_1,\dots,x_r;\, x_{r+1},\dots,x_{r+s} \\ \sigma_1,\dots,\sigma_r;\, \sigma_{r+1},\dots,\sigma_{r+s}\end{smallmatrix}\right) := \begin{cases} 1 & (r=s=0), \\ 0 & (\mathit{otherwise}). \end{cases}$$

Dimould を用いて alternal mould や symmetral mould の定義を書き換えてみよう。まず、写像を 2 つ導入する。$\mathbb{Q}$ 上線形写像 $\otimes : \mathcal{M}(\mathcal{F};\Gamma_1) \otimes \mathcal{M}_2(\mathcal{F};\Gamma_2) \to \mathcal{M}_2(\mathcal{F};\Gamma_1,\Gamma_2)$ を

$$(M \otimes N)\left(\begin{smallmatrix} x_1,\dots,x_r;\, x_{r+1},\dots,x_{r+s} \\ \sigma_1,\dots,\sigma_r;\, \sigma_{r+1},\dots,\sigma_{r+s}\end{smallmatrix}\right) := M\left(\begin{smallmatrix} x_1,\dots,x_r \\ \sigma_1,\dots,\sigma_r\end{smallmatrix}\right) \cdot N\left(\begin{smallmatrix} x_{r+1},\dots,x_{r+s} \\ \sigma_{r+1},\dots,\sigma_{r+s}\end{smallmatrix}\right),$$

により定め、$\mathbb{Q}$ 上線形写像 $\mathcal{Sh} : \mathcal{M}(\mathcal{F};\Gamma) \to \mathcal{M}_2(\mathcal{F};\Gamma,\Gamma)$ を

$$\mathcal{Sh}(M) := \left(\sum_{\alpha \in X_{\mathbb{Z}}^{\bullet}} \mathrm{Sh}\left(\begin{matrix} \left(\begin{smallmatrix} x_1, & \dots, & x_p \\ \sigma_1, & \dots, & \sigma_p \end{smallmatrix}\right);\left(\begin{smallmatrix} x_{p+1}, & \dots, & x_{p+q} \\ \sigma_{p+1}, & \dots, & \sigma_{p+q} \end{smallmatrix}\right) \\ \alpha \end{matrix} \right) M(\alpha) \right)_{p,q\in\mathbb{Z}_{\geq 0},\sigma_i\in\Gamma},$$

により定める。次が成り立つ。

補題 1.5 ([FHK]). $\mathcal{F}=\mathcal{F}_{\mathrm{ser}}$ のとき、テンソル積 $\otimes$ は次の $\mathbb{Q}$ 上代数同型を誘導する。

$$\widehat{\otimes} : \mathcal{M}(\mathcal{F};\Gamma_1)\widehat{\otimes}\mathcal{M}(\mathcal{F};\Gamma_2) \simeq \mathcal{M}_2(\mathcal{F};\Gamma_1,\Gamma_2).$$

Dimould により alternality や symmetrality は次のように言い換えられる。

命題 1.6 ([K, Sau]). *Mould* $M \in \mathcal{M}(\mathcal{F};\Gamma)$ に対し、次が成り立つ：

(i). $M \in \mathrm{ARI}(\mathcal{F};\Gamma)_{\mathrm{al}} \Longleftrightarrow \mathcal{Sh}(M) = M\otimes I + I \otimes M,$

(ii). $M \in \mathrm{GARI}(\mathcal{F};\Gamma)_{\mathrm{as}} \Longleftrightarrow \mathcal{Sh}(M) = M \otimes M$ かつ $M(\emptyset)=1.$

1.3 $S_\bullet$-mould

次に、mould や dimould を一般化した概念を導入する。

定義 1.7 ([FHK]). $S_\bullet = (S_0, S_1, S_2, \dots)$ を集合の列とする。**（$\mathcal{F}$ に値を持つ）$S_\bullet$*-mould*** とは族

$$M = (M_s(x_1,\dots,x_m))_{m\geq 0, s\in S_m},$$

であって、$M_s(x_1,\dots,x_m) \in \mathcal{F}_m$ となるときをいう。$S_\bullet$-*mould* 全体の集合を $\mathcal{M}(\mathcal{F},S_\bullet)$ により表す。

注意 1.8. $S_\bullet$*-mould* は以下のように、*mould* や *dimould* を特殊な場合に持つ。

1. 集合 Γ に対し、$S_m = \Gamma^m$ と置くと $\mathcal{M}(\mathcal{F}, S_\bullet) = \mathcal{M}(\mathcal{F}, \Gamma)$ となる。
2. 集合 Γ_1, Γ_2 に対し、$S_m = \coprod_{i+j=m} \Gamma^i \times \Gamma^j$ と置くと $\mathcal{M}(\mathcal{F}, S_\bullet) = \mathcal{M}_2(\mathcal{F}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ となる。

以下、簡単のために $\mathcal{M}(\mathcal{F}, S_\bullet) = \mathcal{M}(\mathcal{F}, \Gamma)$ または $\mathcal{M}_2(\mathcal{F}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ として話を進める。

定義 1.9 ([FHK]). $m \geq 0$ とする。(集合の間の) 写像 $f : \mathcal{M}(\mathcal{F}_{\mathrm{Lau}}, S_\bullet) \to \mathcal{F}_{\mathrm{Lau},m}$ は任意の $M \in \mathcal{M}(\mathcal{F}_{\mathrm{Lau}}, S_\bullet)$ に対し $f(M)(x_1, \ldots, x_m)$ が $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_m)$ を係数にもつ

$$\left\{ M_s(v_1, \ldots, v_n) \;\middle|\; \begin{array}{l} n \geq 0, s \in S_n, \\ v_1, \ldots, v_n\text{: } \textit{linearly independent in } \mathbb{Q}x_1 + \cdots + \mathbb{Q}x_m \end{array} \right\}$$

の多項式として表されるとき ***mould-proper*** である、という。また写像 $g : \mathcal{M}(\mathcal{F}_{\mathrm{Lau}}, S_\bullet) \to \mathcal{M}(\mathcal{F}_{\mathrm{Lau}}, T_\bullet)$ は、任意の $m \geq 0$ と $t \in T_m$ に対して写像

$$g_t : \mathcal{M}(\mathcal{F}_{\mathrm{Lau}}, S_\bullet) \to \mathcal{F}_{\mathrm{Lau},m} \ ; \ M \mapsto g(M)_t(x_1, \ldots, x_m)$$

が *mould-proper* であるとき ***mould-proper*** である、という。

注意 1.10. 上記で導入したいくつかの *mould* の演算 $(+, \times, \otimes, \mathcal{S}\!h)$ は *mould-proper* な写像の具体例になっている。

定理 1.11 ([FHK], Unique prolongation theorem). $\mathcal{M}(\mathcal{F}_{\mathrm{ser}}, S_\bullet)$ 上の *mould-proper* な写像は $\mathcal{M}(\mathcal{F}_{\mathrm{Lau}}, S_\bullet)$ 上の *mould-proper* な写像に一意的に拡張することができる。

系 1.12 ([FHK]). $\mathcal{M}(\mathcal{F}_{\mathrm{Lau}}, S_\bullet)$ 上の写像 f, g が *mould-proper* であるとする。もしこれらの $\mathcal{M}(\mathcal{F}_{\mathrm{ser}}, S_\bullet)$ への制限が一致するなら、$f = g$ が成り立つ。

2　写像 ma_Γ

この節では、Γ は $n-1$ 元集合として、$\mathfrak{f}_\Gamma$ を n 変数 f_0, f_σ ($\sigma \in \Gamma$) により生成される $\mathbb{Q}$ 上自由リー代数とする。また、$U\mathfrak{f}_\Gamma := \mathbb{Q}\langle f_0, f_\sigma \mid \sigma \in \Gamma \rangle$ を

$\mathfrak{f}_\Gamma$ の普遍包絡環として、その次数による完備を $\widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma} := \mathbb{Q}\langle\langle f_0, f_\sigma \mid \sigma \in \Gamma \rangle\rangle$ により表すとする。$e_0 : \widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma} \to \mathbb{Q}$ を f_0 の係数を取り出す写像とする。このとき、$\widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma}$ の coproduct Δ を用いて、

$$\widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma}^{\dagger} := \{w \in \widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma} \mid (e_0 \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta(w) = 0\}.$$

と定める[1]。

さて、

$$h = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{(\sigma_1,\dots,\sigma_r)\in\Gamma^r} \sum_{k_0,\dots,k_r\in\mathbb{N}_0} \left\langle h \,\middle|\, {}^{k_0,\dots,k_r}_{\sigma_1,\dots,\sigma_r} \right\rangle f_0^{k_0} f_{\sigma_1} \cdots f_{\sigma_r} f_0^{k_r} \in \widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma},$$

に対して、mould

$$\mathrm{ma}_{\Gamma,h} = \{\mathrm{ma}^r_{\Gamma,h}\left({}^{x_1,\dots,x_r}_{\sigma_1,\dots,\sigma_r}\right)\}_{r\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0},\sigma_i\in\Gamma} \in \mathcal{M}(\mathcal{F}_{\mathrm{ser}};\Gamma)$$

を次のように構成されるとする。

$$\begin{aligned} \mathrm{ma}^r_{\Gamma,h}\left({}^{x_1,\dots,x_r}_{\sigma_1,\dots,\sigma_r}\right) &= \mathrm{vimo}^r_{\Gamma,h}\left({}^{0,x_1,x_1+x_2,\dots,x_1+\cdots+x_r}_{\sigma_1,\dots,\sigma_r}\right), \\ \mathrm{vimo}^r_{\Gamma,h}\left({}^{z_0,\dots,z_r}_{\sigma_1,\dots,\sigma_r}\right) &= \sum_{k_0,\dots,k_r\in\mathbb{N}_0} \left\langle h \,\middle|\, {}^{k_0,\dots,k_r}_{\sigma_1,\dots,\sigma_r} \right\rangle z_0^{k_0} z_1^{k_1} z_2^{k_2} \cdots z_r^{k_r}. \end{aligned}$$

補題 2.1 ([FHK])**.** $h \in \widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma}$ に対し、次の４つの条件は同値である：

1. $h \in \widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma}^{\dagger}$.

2. 任意の $r \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $\sigma_1, \dots, \sigma_r \in \Gamma$ 及び $k_0, \dots, k_r \in \mathbb{N}_0$ に対し、

$$\sum_{i=0}^{r} (k_i + 1) \left\langle h \,\middle|\, {}^{k_0,\dots,k_i+1,\dots,k_r}_{\sigma_1,\dots,\sigma_r} \right\rangle = 0.$$

3. 任意の $r \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $\sigma_1, \dots, \sigma_r \in \Gamma$ に対し、

$$\sum_{i=0}^{r} \left(\frac{\partial}{\partial z_i}\right) \mathrm{vimo}^r_{\Gamma,h}\left({}^{z_0,\dots,z_r}_{\sigma_1,\dots,\sigma_r}\right) = 0.$$

4. 任意の $r \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, $\sigma_1, \dots, \sigma_r \in \Gamma$ に対し、$\mathrm{vimo}^r_{\Gamma,h}\left({}^{z_0,\dots,z_r}_{\sigma_1,\dots,\sigma_r}\right)$ は変換 $(z_0, \dots, z_r) \mapsto (z_0 + \alpha, \dots, z_r + \alpha)$ （$\alpha \in \mathbb{Q}$）のもとで不変である.

[1] $1, f_\sigma \in \widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma}^{\dagger}$（$\sigma \in \Gamma$）であるが、but $f_0^n \notin \widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma}^{\dagger}$（$n \in \mathbb{N}$）となることに注意。

上記で導入した $\widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma}$ の部分集合 $\widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma}^\dagger$ は次のような性質を持つ。

補題 2.2 ([FHK])**.** $\widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma}^\dagger$ は $\widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma}$ の完備な部分 *Hopf* 代数になる。

$D^1\mathfrak{f}_\Gamma$ を $\mathfrak{f}_\Gamma$ の depth ≥ 1 となる元全体からなる $\mathfrak{f}_\Gamma$ の部分リー代数、すなわち次を満たすとする。

$$\mathfrak{f}_\Gamma = \mathbb{Q}f_0 \oplus D^1\mathfrak{f}_\Gamma.$$

命題 2.3 ([FHK])**.** 完備な *Hopf* 代数 $\widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma}^\dagger$ はリー代数 $D^1\mathfrak{f}_\Gamma$ の完備な普遍包絡環になる、すなわち

$$\widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma}^\dagger \simeq \widehat{U}(D^1\mathfrak{f}_\Gamma).$$

Hopf 代数 $\widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma}^\dagger$ が mould の集合と対応することを以下で見る。

定義 2.4 ([E11])**.** $\mathbb{Q}$ 上線形写像 $\mathrm{pari}, \mathrm{anti} : \mathcal{M}(\mathcal{F};\Gamma) \to \mathcal{M}(\mathcal{F};\Gamma)$ を

$$\mathrm{pari}(M)\begin{pmatrix} u_1, & \ldots, & u_m \\ \sigma_1, & \ldots, & \sigma_m \end{pmatrix} := (-1)^m M\begin{pmatrix} u_1, & \ldots, & u_m \\ \sigma_1, & \ldots, & \sigma_m \end{pmatrix},$$
$$\mathrm{anti}(M)\begin{pmatrix} u_1, & \ldots, & u_m \\ \sigma_1, & \ldots, & \sigma_m \end{pmatrix} := M\begin{pmatrix} u_m, & \ldots, & u_1 \\ \sigma_m, & \ldots, & \sigma_1 \end{pmatrix},$$

により定める。

命題 2.5 ([FHK])**.** 非可換代数 $\mathcal{M}(\mathcal{F}_{\mathrm{ser}};\Gamma)$ は *coproduc* を $\mathcal{S}h$、*antipode* を $\mathrm{anti}\circ\mathrm{pari}$ とする完備な *Hopf* 代数になる。さらに、写像

$$\mathrm{ma}_\Gamma : \widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma}^\dagger \to \mathcal{M}(\mathcal{F}_{\mathrm{ser}};\Gamma)\ ;\ h \mapsto \mathrm{ma}_{\Gamma,h}$$

は完備な *Hopf* 代数の間の同型を与える。

注意 2.6. $\mathcal{M}(\mathcal{F}_{\mathrm{ser}};\Gamma)$ の *Hopf* 代数の構造は補題 *1.5* に由来する。一方、$\mathcal{M}(\mathcal{F}_{\mathrm{Lau}};\Gamma)$ はこの補題のような同型が存在しない（テンソル積は単射にしかならない）ため *Hopf* 代数の構造を持たない。

最後に $\mathrm{ARI}(\mathcal{F};\Gamma)_{\mathrm{al}}$, $\mathrm{GARI}(\mathcal{F};\Gamma)_{\mathrm{as}}$ が写像 ma_Γ により $\widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma}^\dagger$ のどのような部分集合と対応するか見る。定数項が 0 である $h \in \widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma}$ に対し、

$$\exp(h) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} \in \widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma},$$

と定める。$\widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma}^\dagger$ の部分集合として

$$\exp\widehat{\mathfrak{f}_\Gamma}^\dagger := \exp\widehat{\mathfrak{f}_\Gamma} \cap \widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma}^\dagger, \qquad \widehat{\mathfrak{f}_\Gamma}^\dagger := \widehat{\mathfrak{f}_\Gamma} \cap \widehat{U\mathfrak{f}_\Gamma}^\dagger,$$

を考える。このとき、次が成り立つ。

命題 2.7 ([FHK])**.** 写像 ma_Γ は群の同型

$$\exp \widehat{\mathfrak{f}_\Gamma}^{\dagger} \to \mathrm{GARI}(\mathcal{F}_{\mathrm{ser}};\Gamma)_{\mathrm{as}},$$

及び、リー代数の同型

$$\widehat{\mathfrak{f}_\Gamma}^{\dagger} \to \mathrm{ARI}(\mathcal{F}_{\mathrm{ser}};\Gamma)_{\mathrm{al}},$$

を誘導する。

参考文献

[E81] Ecalle, J., *Les fonctions résurgentes. Tome I et II*, Publications Mathématiques d'Orsay **81**, 6. Université de Paris-Sud, Département de Mathématique, Orsay, 1981.

[E03] Ecalle, J., *ARI/GARI, la dimorphie et l'arithmétique des multizêtas: un premier bilan*, J. Théeor. Nombres Bordeaux **15** (2003), no. 2, 411–478.

[E11] Ecalle, J., *The flexion structure and dimorphy: flexion units, singulators, generators, and the enumeration of multizeta irreducibles*, With computational assistance from S. Carr. CRM Series, **12**, Asymptotics in dynamics, geometry and PDEs; generalized Borel summation. Vol. II, 27–211, Ed. Norm., Pisa, 2011.

[FHK] H. Furusho, M. Hirose, N. Komiyama, *Associators, the Grothendieck-Teichmüller group and the bigaded variants in mould theory*, in preparation.

[K] N. Komiyama, *On properties of* adari(pal) *and* ganit(pic), arXiv:2110.04834.

[Sau] D. Sauzin, *Mould expansions for the saddle-node and resurgence monomials*, Renormalization and Galois theories, 83–163, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., 15, Eur. Math. Soc., Zürich, 2009.

[Sch12] Schneps, L., *Double shuffle and Kashiwara-Vergne Lie algebras*, J. Algebra **367** (2012), 54–74.

[Sch15] Schneps, L., *ARI, GARI, ZIG and ZAG: An introduction to Ecalle's theory of multiple zeta values*, `arXiv:1507.01534`, preprint.