# Hook 型 Schur 多重ゼータ値の Shuffle 積公式

東京理科大学理学部　武田　渉

Wataru Takeda
Faculty of Science, Tokyo University of Science

**概要**

Euler-Zagier 型多重ゼータ値には Shuffle 積と呼ばれる良い性質を持った積がある．本稿では一般化である hook 型 Schur 多重ゼータ値に対しても, Shuffle 型の積公式を与える．本研究は中筋麻貴氏 (上智大学/東北大学) との共同研究である．

## 1　多重ゼータ値と Shuffle 積

正の整数 $r$ と $k_r \geq 2$ となる正の整数のインデックス $(k_1, k_2, \ldots, k_r)$ に対して, Euler-Zagier 型の多重ゼータ値は

$$\zeta(k_1, \ldots, k_r) = \sum_{1 \leq n_1 < \cdots < n_r} \frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_r^{k_r}}$$

と定義される．ここで, 和は $r$ 個の正の整数の組 $(n_1, \ldots, n_r)$ で $1 \leq n_1 < \cdots < n_r$ を満たすものをわたる．この多重ゼータ値には以下の反復積分による表示があることが知られている．

$$\zeta(k_1, \ldots, k_r) = \int_{1 > x_1 > \cdots > x_k > 0} \prod_{i=1}^{k} \omega_i(x_i).$$

ここで $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_r$ であり, $1 \leq i \leq k$ に対して,

$$\omega_i(t) = \begin{cases} \frac{dt}{1-t} & i \in \{k_r, k_{r-1} + k_r, \ldots, k_1 + k_2 + \cdots + k_r\} \text{ のとき,} \\ \frac{dt}{t} & \text{その他} \end{cases}$$

とする. この反復積分表示により, 多重ゼータ値の積を以下のように計算することができる.

$$\begin{aligned}&\left(\int_{1>x_1>\cdots>x_k>0}\prod_{i=1}^{k}\omega_i(x_i)\right)\left(\int_{1>y_1>\cdots>y_l>0}\prod_{i=1}^{l}\omega_i(y_i)\right)\\&=\sum_{(z_1,\dots,z_{k+l})}\int_{1>z_1>\cdots>z_{k+l}>0}\prod_{i=1}^{k+l}\omega_i(z_i).\end{aligned}$$

ここで, 和 $\displaystyle\sum_{(z_1,\dots,z_{k+l})}$ は組 $(z_1,\dots,z_{k+l})$ で以下 3 つの条件を満たすものをわたる.

- $(z_1,\dots,z_{k+l})$ は $x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_l$ からなる順列である.
- 各 $1\le i\ne j\le k+l$ に対して, $1\le i'<j'\le k$ が存在して, $z_i=x_{i'}$ かつ $z_j=x_{j'}$ ならば, $i<j$. つまり, $x_1,\dots,x_k$ 間の大小を保つ.
- 各 $1\le i\ne j\le k+l$ に対して, $1\le i'<j'\le l$ が存在して, $z_i=y_{i'}$ かつ $z_j=y_{j'}$ ならば, $i<j$. つまり, $y_1,\dots,y_l$ 間の大小を保つ.

このような積を Shuffle 積といい, 級数表示から得られる Harmonic 積とともに多重ゼータ値間の関係式において重要なものである.

**例 1.1** (Shuffle 積)**.**

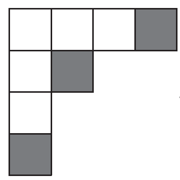
$$\begin{aligned}&\zeta(1,2)\zeta(2)\\&=\left(\int_0^1\frac{dz_1}{z_1}\int_0^{z_1}\frac{dz_2}{1-z_2}\int_0^{z_2}\frac{dz_3}{1-z_3}\right)\left(\int_0^1\frac{dw_1}{w_1}\int_0^{w_1}\frac{dw_2}{1-w_2}\right)\\&=\int_0^1\frac{dz_1}{z_1}\int_0^{z_1}\frac{dz_2}{1-z_2}\int_0^{z_2}\frac{dw_1}{w_1}\int_0^{w_1}\frac{dz_3}{1-z_3}\int_0^{z_3}\frac{dw_2}{1-w_2}(\text{など 10 個の和})\\&=\zeta(2,1,2)+3\zeta(1,2,2)+6\zeta(1,1,3).\end{aligned}$$

## 2 Schur 多重ゼータ関数

本節では [NPY18] による, Schur 多重ゼータ関数の定義を復習する. 正の整数 $n$ に対して, $r$ 個の整数の組 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_r)$ で $n=\lambda_1+\cdots+\lambda_r$ と $\lambda_1\ge$

$\lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r > 0$ を満たすものを $n$ の分割と呼ぶ．この分割 $\lambda$ に対して, $D(\lambda) = \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq \lambda_i\}$ とし, これを $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ 個の箱を上から順に横に並べた Young 図形と同一視する．また, $(i,j) \in D(\lambda)$ が $D(\lambda)$ の角であるとは $(i, j+1) \notin D(\lambda)$ かつ $(i+1, j) \notin D(\lambda)$ を満たすときを言い, $D(\lambda)$ の角全体のなす集合を $C(\lambda)$ とする．例えば, 分割 $\lambda = (4,2,1)$ に対して, 以下が $D(\lambda)$ であり, そのうち灰色部が $C(\lambda)$ の要素である．

**例 2.1** ($\lambda = (4,2,1)$)**.**

$D(\lambda) \longleftrightarrow$  .

Young 図形 $D(\lambda)$ の各々の成分 $(i,j)$ に $t_{ij} \in X$ を対応させた組 $(t_{ij})$ を形 $\lambda$ の $X$-値 Young 盤と言い, $T(\lambda, X)$ を形 $\lambda$ の $X$-値 Young 盤の集合とする．さらに, 正の整数からなる Young 盤 $(m_{ij})$ が行に関しては非減少 $m_{ij} \leq m_{i(j+1)}$ であり, 列に関しては狭義増加 $m_{ij} < m_{(i+1)j}$ であるとき, $(m_{ij})$ を半標準 Young 盤と呼び, $SSYT(\lambda)$ を形 $\lambda$ の半標準 Young 盤の集合とする．

**例 2.2** ($\lambda = (2,1)$)**.**

$$D(\lambda) = \begin{array}{|c|c|}\hline \phantom{1} & \phantom{1} \\ \hline \phantom{1} & \multicolumn{1}{|c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}, \ SSYT(\lambda) = \left\{ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{|c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{|c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}, \ldots, \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{|c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}, \ldots \right\},$$

以上の準備の下, Schur 多重ゼータ関数は以下のように定義される．複素変数からなる Young 盤 $\boldsymbol{s} = (s_{ij}) \in T(\lambda, \mathbb{C})$ に対し,

$$\zeta_\lambda(\boldsymbol{s}) = \sum_{(m_{ij}) \in SSYT(\lambda)} \prod_{(i,j) \in D(\lambda)} \frac{1}{m_{ij}^{s_{ij}}}$$

と定める．この関数の収束域については [NPY18] において考察されており,

$$W_\lambda = \left\{ \boldsymbol{s} = (s_{ij}) \in T(\lambda, \mathbb{C}) \;\middle|\; \begin{array}{l} (i,j) \in D(\lambda) \setminus C(\lambda) \text{ に対して, } \Re(s_{ij}) \geq 1 \\ (i,j) \in C(\lambda) \text{ に対して, } \Re(s_{ij}) > 1 \end{array} \right\}$$

により定まる $W_\lambda$ 内で絶対収束することが示されている．

**例 2.3** ($\lambda = (2,1)$ (cf. 例 2.2))**.**

$$\zeta_\lambda(\boldsymbol{s}) = \frac{1}{1^{s_{11}}1^{s_{12}}2^{s_{21}}} + \frac{1}{1^{s_{11}}2^{s_{12}}2^{s_{21}}} + \cdots + \frac{1}{2^{s_{11}}2^{s_{12}}3^{s_{21}}} + \cdots$$

分割 $(\underbrace{1,\ldots,1}_{r}) =: (\{1\}^r), (r)$ に対する Schur 多重ゼータ関数はそれぞれ以下のように定まる Euler-Zagier 型の多重ゼータ関数 $\zeta$ や多重ゼータスター関数 $\zeta^\star$ となることが分かる:

$$\zeta(s_1,\ldots,s_r) = \sum_{1\le m_1<\cdots<m_r} \frac{1}{m_1^{s_1},\ldots,m_r^{s_r}},\ \zeta^\star(s_1,\ldots,s_r) = \sum_{1\le m_1\le\cdots\le m_r} \frac{1}{m_1^{s_1},\ldots,m_r^{s_r}}.$$

Schur 多重ゼータ関数は和がわたる整数の部分の大小を考えて分解することで Euler-Zagier 型の多重ゼータ関数や多重ゼータスター関数の線形和として表すことができる. 例えば, $\lambda = (2,1)$ のとき, $(m_{ij})$ 間は, $m_{11} = m_{12} < m_{21}, m_{11} < m_{12} < m_{21}, m_{11} < m_{12} = m_{21}$ および $m_{11} < m_{21} < m_{12}$ という大小関係に分解できることから,

$$\begin{aligned}
\zeta_\lambda(\boldsymbol{s}) &= \sum_{\substack{m_{11}\le m_{12}\\ \wedge\\ m_{21}}} \frac{1}{m_{11}^{s_{11}} m_{12}^{s_{12}} m_{21}^{s_{21}}}\\
&= \zeta(s_{11}+s_{12}, s_{21}) + \zeta(s_{11}, s_{12}, s_{21}) + \zeta(s_{11}, s_{12}+s_{21}) + \zeta(s_{11}, s_{21}, s_{12})\\
&= \zeta^\star(s_{11}, s_{12}, s_{21}) + \zeta^\star(s_{11}, s_{21}, s_{12}) - \zeta^\star(s_{11}, s_{12}+s_{21}) - \zeta^\star(s_{11}+s_{21}, s_{12})
\end{aligned}$$

と分解できる.

そして, $\boldsymbol{s}$ に整数からなる Young 盤 $\boldsymbol{k} \in T(\lambda, \mathbb{Z})$ を代入したときの値 $\zeta_\lambda(\boldsymbol{k})$ を「Schur 多重ゼータ値」と呼ぶ.

# 3 Elementary Factorial Schur 多重ゼータ値

まず, Schur 多重ゼータ値に対して Shuffle 積を導入するために基本的なアイデアとなる計算例を紹介し, それによって現れる級数たちを新たに定義する. 以下では次の積

$$\zeta_{(2,1)}\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\right) \times \zeta_{(1)}\left(\begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline\end{array}\right)$$

について考える．まず, [NPY18] によって得られている積分表示より,

$$\zeta_{(2,1)}\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \cline{1-1}\end{array}\right) = \int_0^1 \frac{dz_1}{z_1}\int_0^{z_1}\frac{dz_2}{1-z_2}\int_0^{z_2}\frac{dz_3}{1-z_3}\sum_{m_{12}=1}^{\infty}\frac{1-z_3^{m_{12}}}{m_{12}^3},$$

および, 多重ゼータ値の積分表示から

$$\zeta_{(1)}\left(\boxed{2}\right) = \zeta(2) = \int_0^1 \frac{dw_1}{w_1}\int_0^{w_1}\frac{dw_2}{1-w_2}$$

を得る．ここで, $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2$ の順序を考慮し, 2 つの積分表示の積を考えると, 以下の和に分解される．(変数の順序のみ書いており, 上限の 1 と下限の 0 は省略している.)

$$\begin{aligned}
&\zeta_{(2,1)}\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \cline{1-1}\end{array}\right) \times \zeta_{(1)}\left(\boxed{2}\right) \\
&= \Bigg(\int_{z_1>z_2>z_3>w_1>w_2} + \int_{z_1>z_2>w_1>z_3>w_2} + \int_{z_1>w_1>z_2>z_3>w_2} + \int_{w_1>z_1>z_2>z_3>w_2} \\
&\quad + \int_{z_1>z_2>w_1>w_2>z_3} + \int_{z_1>w_1>z_2>w_2>z_3} + \int_{w_1>z_1>z_2>w_2>z_3} \\
&\quad + \int_{z_1>w_1>w_2>z_2>z_3} + \int_{w_1>z_1>w_2>z_2>z_3} \\
&\quad + \int_{z_1>w_1>w_2>z_2>z_3}\Bigg) \frac{dz_1}{z_1}\frac{dz_2}{1-z_2}\frac{dz_3}{1-z_3}\frac{dw_1}{w_1}\frac{dw_2}{1-w_2}\sum_{m_{12}=1}^{\infty}\frac{1-z_3^{m_{12}}}{m_{12}^3} =: \sum_{k=1}^{10} I_k.
\end{aligned}$$

最初に $I_1$ を計算する．変数 $w_2, w_1$ に関する積分を順に計算して,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 \frac{dz_1}{z_1}\int_0^{z_1}\frac{dz_2}{1-z_2}\int_0^{z_2}\frac{dz_3}{1-z_3}\int_0^{z_3}\frac{dw_1}{w_1}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{w_1^m}{m}\sum_{m_{12}=1}^{\infty}\frac{1-z_3^{m_{12}}}{m_{12}^3} \\
&= \int_0^1 \frac{dz_1}{z_1}\int_0^{z_1}\frac{dz_2}{1-z_2}\int_0^{z_2}\frac{dz_3}{1-z_3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{z_3^m}{m^2}\sum_{m_{12}=1}^{\infty}\frac{1-z_3^{m_{12}}}{m_{12}^3}
\end{aligned}$$

を得る．各級数は $|z_3|<1$ で絶対収束するため，$z_3$ について以下の計算ができる．

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \frac{dz_1}{z_1} \int_0^{z_1} \frac{dz_2}{1-z_2} \int_0^{z_2} \frac{dz_3}{1-z_3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{m_{12}=1}^{\infty} \frac{z_3^m(1-z_3^{m_{12}})}{m^2 m_{12}^3} \\ &= \int_0^1 \frac{dz_1}{z_1} \int_0^{z_1} \frac{dz_2}{1-z_2} \sum_{m_{11}=1}^{m_{12}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{m_{12}=1}^{\infty} \frac{z_2^{m+m_{11}}}{m^2(m+m_{11})m_{12}^3}. \end{aligned}$$

続いて，$z_2, z_1$ で繰り返し積分をすることにより，

$$I_1 = \sum_{\substack{(m_{ij})\in SSYT(\lambda) \\ m\geq 1}} \frac{1}{m^2(m+m_{11})(m+m_{21})^2 m_{12}^3}$$

を得る．これは Schur 多重ゼータ値ではないことに注意する．同様に，以下のように $I_2, I_3, I_4$ は Schur 多重ゼータ値でないものとなる．

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{\substack{(m_{ij})\in SSYT(\lambda) \\ m\geq 1}} \frac{1}{m(m+m_{11})^2(m+m_{21})^2 m_{12}^3}, \\ I_3 = I_4 &= \sum_{\substack{(m_{ij})\in SSYT(\lambda) \\ m\geq 1}} \frac{1}{m(m+m_{11})(m+m_{21})^3 m_{12}^3}. \end{aligned}$$

その一方で，

$$\begin{aligned} I_5 &= \int_0^1 \frac{dz_1}{z_1} \int_0^{z_1} \frac{dz_2}{1-z_2} \int_0^{z_2} \frac{dw_1}{w_1} \int_0^{w_1} \frac{dw_2}{1-w_2} \int_0^{w_2} \frac{dz_3}{1-z_3} \sum_{m_{12}=1}^{\infty} \frac{1-z_3^{m_{12}}}{m_{12}^3} \\ &= \sum_{\substack{(m_{ij})\in SSYT(\lambda) \\ m\geq 1}} \frac{1}{m_{11}(m+m_{11})^2(m+m_{21})^2 m_{12}^3} = \zeta_{(2,1,1)}\left( \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \right), \end{aligned}$$

となり，こちらは Schur 多重ゼータ値である．$I_{10}$ も同じ値となる．残りの和に現れる積分は全て

$$I_6 = I_7 = I_8 = I_9 = \zeta_{(2,1,1)}\left( \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \right).$$

となることが分かるため, 以下が成立する.

$$
\begin{aligned}
&\zeta_{(2,1)}\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\right) \times \zeta_{(1)}\left(\begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline\end{array}\right) \\
&= \sum_{\substack{(m_{ij}) \in SSYT((2,1)) \\ m \geq 1}} \left[ \frac{1}{m^2(m+m_{11})(m+m_{21})^2 m_{12}^3} + \frac{1}{m(m+m_{11})^2(m+m_{21})^2 m_{12}^3} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{m(m+m_{11})(m+m_{21})^3 m_{12}^3} \right] + 2\zeta_{(2,1,1)}\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\right) + 4\zeta_{(2,1,1)}\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\right).
\end{aligned}
$$

また, 以上の例を見ると $\boxed{3}$ の部分は計算に全く影響していないことが分かる. そのため, 横に伸びる項を一般に $\boldsymbol{k}^r$ と書くとより一般に以下が成立する.

**例 3.1.** 分割 $\lambda = (r, 1)$ に対して, 以下が成立する.

$$
\begin{aligned}
&\zeta_{(r,1)}\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \boldsymbol{k}^r \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\right) \times \zeta_{(1)}\left(\begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline\end{array}\right) \\
&= \sum_{\substack{(m_{ij}) \in SSYT(\lambda) \\ m \geq 1}} \prod_{j=2}^{r} \frac{1}{m_{1j}^{k_{1j}}} \left[ \frac{1}{m^2(m+m_{11})(m+m_{21})^2 m_{12}^3} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{m(m+m_{11})^2(m+m_{21})^2 m_{12}^3} + \frac{2}{m(m+m_{11})(m+m_{21})^3 m_{12}^3} \right] \\
&\quad + 2\zeta_{(r,1,1)}\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \boldsymbol{k}^r \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\right) + 4\zeta_{(r,1,1)}\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & \boldsymbol{k}^r \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\right).
\end{aligned}
$$

上記の例たちで確認できるように, hook 型の Schur 多重ゼータ値と Euler-Zagier 型の多重ゼータ値を積を Shuffle 積の類似を用いて計算した場合, Schur 多重ゼータ値でないものも現れる. ここで, これらを統一的に扱うために modified Hurwitz 型の Schur 多重ゼータ関数 (elementary factorial Schur 多重ゼータ関数) を以下のように定義する.

**定義 3.2** (Elementary factorial Schur 多重ゼータ関数)**.** 分割 $\lambda = (\lambda_1, \{1\}^{k-1})$ と変

数の入った Young 盤 $\boldsymbol{s} = (s_{ij}) \in T(\lambda, \mathbb{C}), \boldsymbol{t} = (t_i) \in T(\{1\}^r, \mathbb{C})$ に対して,

$$\zeta_{\lambda,r}(\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}) = \sum_{\substack{(m_{ij}) \in SSYT(\lambda) \\ (m_i) \in SSYT(\{1\}^r)}} \prod_{i=1}^{r} \frac{1}{m_i^{t_i}} \prod_{j=2}^{\lambda_1} \frac{1}{m_{1j}^{s_{1j}}} \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{(m_r + m_{i1})^{s_{i1}}}$$

と定義する. この級数で定義される関数を「elementary factorial Schur 多重ゼータ関数」と呼び, その特殊値を「elementary factorial Schur 多重ゼータ値」と呼ぶ.

**注意 3.3.** 論文 [MN21] において, 松本-中筋は $A$ 型の root 系に付随する modified ゼータ関数を以下のように定義した: 正の整数 $r > 0$ と $0 \leq d \leq r$ に対して,

$$\zeta^{\bullet}_{r,d}(\underline{\mathbf{s}}, A_r) = \left(\sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_d=0}^{\infty}\right)' \left(\sum_{m_{d+1}=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=1}^{\infty}\right) \prod_{1 \leq i < j \leq r+1} \frac{1}{(m_i + \cdots + m_{j-1})^{s(i,j)}}. \tag{3.4}$$

ここで, $()'$ は多重和において $1 \leq i < j \leq d+1$ かつ $m_i = \cdots = m_{j-1} = 0$ の場合を除くことを意味する. また, $\underline{\mathbf{s}} = (s(i,j))$ であり, 各 $s(i,j)$ は $(i,j)$ $(1 \leq i, j \leq r+1, i \neq j)$ によってパラメタライズされる root に対応する変数である. つまり,

$$\underline{\mathbf{s}} = (s(1,2), s(2,3), \ldots, s(r, r+1), s(1,3), s(2,4), \ldots, s(r-1, r+1), \\ s(1,r), s(2, r+1), s(1, r+1))$$

と表される.

ここで, 特に $\lambda = (\lambda_1, \{1\}^{k-1})$, $r = \lambda_1 + k - 1 + \ell$ かつ $d = \lambda_1 - 1$ の場合,

$$s_{ij} = \begin{cases} s(\lambda_1 - j + 1, \lambda_1) & 1 < j \leq \lambda_1, \\ s(\lambda_1, \lambda_1 + \ell + i - 1) & 1 \leq i \leq k, \end{cases}$$

$$t_i = s(\lambda_1 + \ell - i + 1, \lambda_1 + \ell),$$

その他の $s(i,j)$ に対しては $s(i,j) = 0$ と変数の対応を決めると,

$$\zeta^{\bullet}_{r,d}(\underline{\mathbf{s}}, A_r) = \zeta_{\lambda,\ell}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t})$$

ということが分かる. つまり, elementary factorial Schur 多重ゼータ値は松本-中筋による $A$ 型の root 系に付随する modified ゼータ関数 (3.4) に対する値の特別な場合とみなすことができる.

この多重ゼータ値の導入により, 例 3.1は以下のように表される.

**例 3.5** (cf. 例 3.1)**.** 分割 $\lambda = (r, 1)$ に対して, 以下が成立する.

$$\begin{aligned}
&\zeta_{(r,1)}\left(\begin{ytableau} 1 & \boldsymbol{k}^r \\ 2 \end{ytableau}\right)\cdot\zeta_{(1)}\left(\begin{ytableau} 2 \end{ytableau}\right)\\
&= \zeta_{\lambda,1}\left(\begin{ytableau} 1 & \boldsymbol{k}^r \\ 2 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 2 \end{ytableau}\right) + \zeta_{\lambda,1}\left(\begin{ytableau} 2 & \boldsymbol{k}^r \\ 2 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 \end{ytableau}\right) + 2\zeta_{\lambda,1}\left(\begin{ytableau} 1 & \boldsymbol{k}^r \\ 3 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 \end{ytableau}\right)\\
&\qquad + 2\zeta_{(r,1,1)}\left(\begin{ytableau} 1 & \boldsymbol{k}^r \\ 2 \\ 2 \end{ytableau}\right) + 4\zeta_{(r,1,1)}\left(\begin{ytableau} 1 & \boldsymbol{k}^r \\ 1 \\ 3 \end{ytableau}\right).
\end{aligned}$$

## 4 Hoffman 代数構造

$\mathfrak{H}$ を $\{x, y\}$ で生成される非可換な $\mathbb{Q}$ 係数多項式環とする. Hoffman は論文 [H05] において, $\mathfrak{H}$ 上の積 $\sqcup\!\sqcup$ を以下の公理を満たすものとして定義した.

**公理 4.1.**

1. 任意の語 $w \in \mathfrak{H}$ に対して, $1 \sqcup\!\sqcup\, w = w \sqcup\!\sqcup\, 1 = w$;
2. 任意の語 $w_1, w_2 \in \mathfrak{H}$ と $a, b \in \{x, y\}$ に対して,

$$aw_1 \sqcup\!\sqcup\, bw_2 = a(w_1 \sqcup\!\sqcup\, bw_2) + b(aw_1 \sqcup\!\sqcup\, w_2).$$

このとき, $x\mathfrak{H}y$ の元 $w$ は $k_r \geq 2$ なる正の整数 $r, k_1, k_2, \ldots, k_r$ を用いて,

$$w = x^{k_r-1}y\cdots x^{k_2-1}yx^{k_1-1}y$$

と表される. この各元 $w$ に対して, $\mathbb{Q}$ 線形写像 $\zeta : x\mathfrak{H}y \to \mathbb{R}$ を以下のように定義する.

$$\zeta(x^{k_r-1}y\cdots x^{k_2-1}yx^{k_1-1}y) = \zeta(k_1, \ldots, k_r).$$

このとき, $\zeta$ は $x\mathfrak{H}y$ から $\mathbb{R}$ への準同型となる, つまり,

$$\zeta(w_1 \sqcup\!\sqcup\, w_2) = \zeta(w_1)\zeta(w_2)$$

が成立し, これは $\zeta(w_1), \zeta(w_2)$ の値を積分表示で表して, Shuffle 積を計算する操作を代数的に記述したものに対応する. 以下で例 1.1を Hoffman 代数を用いて計算する.

**例 4.2** (cf. 例 1.1)**.** 多重ゼータ値を $\mathfrak{H}$ の元と対応させると,

$$\zeta(1,2)\zeta(2)=\zeta(xyy)\zeta(xy)=\zeta(xyy \sqcup\!\sqcup\, xy).$$

である. ここで, $xyy \sqcup\!\sqcup\, xy$ を上の公理 4.1に沿って計算すると

$$\begin{aligned} xyy \sqcup\!\sqcup\, xy &= x(yy \sqcup\!\sqcup\, xy)+x(xyy \sqcup\!\sqcup\, y) \\ &= xy(y \sqcup\!\sqcup\, xy)+x^2(yy \sqcup\!\sqcup\, y)+x^2(yy \sqcup\!\sqcup\, y)+xy(xyy \sqcup\!\sqcup\, 1) \\ &= xyy(1 \sqcup\!\sqcup\, xy)+xyx(y \sqcup\!\sqcup\, y)+2x^2y(y \sqcup\!\sqcup\, y)+2x^2y(yy \sqcup\!\sqcup\, 1)+xyxyy. \end{aligned}$$

$y \sqcup\!\sqcup\, y=2yy$ であるため,

$$\begin{aligned} xyy \sqcup\!\sqcup\, xy &= xyyxy+2xyxyy+4x^2yyy+2x^2yyy+xyxyy \\ &= 3xyyxy+6x^2yyy+xyxyy. \end{aligned}$$

よって, 例 1.1の結果

$$\zeta(1,2)\zeta(2)=\zeta(2,1,2)+3\zeta(1,2,2)+6\zeta(1,1,3)$$

を得る.

本稿ではこの対応を hook 型の Schur 多重ゼータ値や先の級数に拡張をする. その準備として, $Y$ という新しい変数を加えた非可換多項式環 $\mathbb{Q}\langle x,y,Y\rangle$ で上記の公理 4.1の演算を持ったものを導入する. ここで, $\mathbb{Q}\langle x,y,Y\rangle$ の元で, hook 型 Schur 多重ゼータ値や elementary factorial Schur 多重ゼータ値に対応するものの集合として $\mathfrak{H}^{\mathrm{Schur}}=x\mathfrak{H}Y\mathfrak{H}y+x\mathfrak{H}Y$ を考える. $w\in\mathfrak{H}^{\mathrm{Schur}}$ と $v\in T(\{1\}^{r-1},\mathbb{Z})$ に対して, $\zeta^{\mathrm{Schur}}(w,v)$ を以下のように定義する:

$$\begin{aligned} &\zeta^{\mathrm{Schur}}\left(x^{k_{n1}-1}y\cdots x^{k_{\ell 1}-1}Yx^{k_{(\ell-1)1}}y\cdots x^{k_{11}-1}y, \boxed{k_{12}}\boxed{\cdots}\boxed{k_{1r}}\right) \\ &=\sum_{\substack{(m_{ij})\in SSYT(r,\{1\}^{n-\ell}) \\ (m_i)\in SSYT(\{1\}^{\ell})}}\prod_{i=1}^{\ell}\frac{1}{m_i^{t_i}}\prod_{j=2}^{r}\frac{1}{m_{1j}^{k_{1j}}}\prod_{i=1}^{n-\ell+1}\frac{1}{(m_\ell+m_{i1})^{k_{i1}}}. \end{aligned}$$

この $\zeta^{\mathrm{Schur}}(w,v)$ を $w$ に関して $\mathbb{Q}$ 線形に拡張したものを写像 $\zeta^{\mathrm{Schur}}:\mathfrak{H}^{\mathrm{Schur}}\times$

$T(\{1\}^{r-1}, \mathbb{Z}) \to \mathbb{R}$ とする．具体例を考えると以下の対応が分かる．

$$\zeta^{\mathrm{Schur}}\left(x^2yYxy, \boxed{7}\right) = \sum_{\substack{(m_{ij})\in SSYT((2,1))\\ m\geq 1}} \frac{1}{m^2(m+m_{11})(m+m_{21})^3 m_{12}^7}.$$

$$\zeta^{\mathrm{Schur}}\left(x^2yyxY, \boxed{7}\right) = \zeta_{(2,1,1)}\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 7 \\ \hline 1 & \\ \cline{1-1} 3 & \\ \cline{1-1}\end{array}\right).$$

より一般に, $\boldsymbol{k} = (k_{ij}) \in T(\lambda, \mathbb{Z})$ のとき,

$$\zeta^{\mathrm{Schur}}\left(x^{k_{n1}-1}y\cdots x^{k_{11}-1}Y, \begin{array}{|c|c|c|}\hline k_{12} & \cdots & k_{1r} \\ \hline\end{array}\right) = \zeta_\lambda(\boldsymbol{k})$$

である．そして, 任意の $w_1 \in \mathfrak{H}^{\mathrm{Schur}}, w_2 \in x\mathfrak{H}y$ に対して,

$$\zeta^{\mathrm{Schur}}\left(w_1, \begin{array}{|c|c|c|}\hline k_{12} & \cdots & k_{1r} \\ \hline\end{array}\right)\zeta^{\mathrm{Schur}}(w_2, \emptyset) = \zeta^{\mathrm{Schur}}\left(w_1 \sqcup\!\sqcup\, w_2, \begin{array}{|c|c|c|}\hline k_{12} & \cdots & k_{1r} \\ \hline\end{array}\right) \tag{4.3}$$

が成立する．これにより, Euler-Zagier 多重ゼータ値と hook 型 Schur 多重ゼータ値, さらには elementary factorial Schur 多重ゼータ値との間における Shuffle 積を定義することができる．

## 5　主定理

本稿で定義した Shuffle 積の類似を用いて, elementary factorial Schur 多重ゼータ値と多重ゼータ値の Shuffle 積が elementary factorial Schur 多重ゼータ値からなる $\mathbb{Q}$ 線形空間の中で閉じることを示した．

**定理 5.1.** $\lambda = (n, \{1\}^{r-1})$ を分割とする．このとき, 整数からなる Young 盤 $\boldsymbol{k} = (k_{ij}) \in T(\lambda, \mathbb{Z})$, $\boldsymbol{\ell} = (\ell_i) \in T(\{1\}^s, \mathbb{Z})$ および $\boldsymbol{m} = (m_i) \in T(\{1\}^t, \mathbb{Z})$ に対して,

$$\zeta_{\lambda,s}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}) \cdot \zeta_{(\{1\}^t)}(\boldsymbol{m}) = \sum_{p+q=t}\sum_{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})} c_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}}\zeta_{\nu_p,q}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \tag{5.2}$$

が成立する．ただし, ここで $\nu_p = (n, \{1\}^{r+s+p-1})$ であり, $c_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}}$ は 0 以上の整数である．また, 和 $\sum_{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}$ は Young 盤の組 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = ((u_{ij}), (v_i))$ で以下の性質を満たすものをわたる．

1. $j \geq 2$ に対して, $u_{1j} = k_{1j}$;
2. 各 $u_{i1}, v_i$ $(i \geq 1)$ については, $\zeta(l_1, \ldots, l_s, k_{11}, \ldots, k_{r1})$ と $\zeta(m_1, \ldots, m_t)$ の Shuffle 積から多重ゼータ値 $\zeta(v_1, \ldots, v_q, u_{11}, \ldots, u_{(r+s+p)1})$ が現れる.

**証明**. Elementary factorial Schur 多重ゼータ値 $\zeta_{\lambda,s}$ と $\mathfrak{H}^{\mathrm{Schur}} \times T(\{1\}^{n-1}, \mathbb{Z})$ の対応により,

$$\zeta_{\lambda,s}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}) = \zeta^{\mathrm{Schur}}\left(x^{k_{r1}-1}y \cdots x^{k_{11}-1}Yx^{\ell_s-1}y \cdots x^{\ell_1-1}y, \boxed{k_{12}}\boxed{\cdots}\boxed{k_{1n}}\right),$$

および

$$\zeta_{(\{1\}^t)}(\boldsymbol{m}) = \zeta^{\mathrm{Schur}}\left(x^{m_t-1}y \cdots x^{m_1}y, \emptyset\right)$$

を得る. (4.3)により, Shuffle 積の計算をすると

$$\begin{aligned}
&\zeta_{\lambda,s}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}) \cdot \zeta_{(\{1\}^t)}(\boldsymbol{m}) \\
&= \zeta^{\mathrm{Schur}}\left(x^{k_{r1}-1}y \cdots x^{k_{11}-1}Yx^{\ell_s-1}y \cdots x^{\ell_1-1}y, \boxed{k_{12}}\boxed{\cdots}\boxed{k_{1n}}\right) \zeta^{\mathrm{Schur}}\left(x^{m_t-1}y \cdots x^{m_1-1}y, \emptyset\right) \\
&= \zeta^{\mathrm{Schur}}\left(x^{k_{r1}-1}y \cdots x^{k_{11}-1}Yx^{\ell_s-1}y \cdots x^{\ell_1-1}y \sqcup x^{m_t-1}y \cdots x^{m_1-1}y, \boxed{k_{12}}\boxed{\cdots}\boxed{k_{1n}}\right)
\end{aligned}$$

となる. 写像 $\zeta^{\mathrm{Schur}}$ は準同型なので, Shuffle 積で得られるものを和で分解すると

$$\begin{aligned}
&\zeta_{\lambda,s}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}) \cdot \zeta_{(\{1\}^t)}(\boldsymbol{m}) \\
&= \sum_{p+q=t} \sum_{(u_{i1}),(v_i)} c_{(u_{i1}),(v_i)} \zeta^{\mathrm{Schur}}\left(x^{u_{(r+s+p)1}-1}y \cdots x^{u_{11}-1}Yx^{v_q-1}y \cdots x^{v_1-1}y, \boxed{k_{12}}\boxed{\cdots}\boxed{k_{1n}}\right).
\end{aligned}$$

ここで $(u_{i1}), (v_i)$ は $\zeta(l_1, \ldots, l_s, k_{11}, \ldots, k_{r1})$ と $\zeta(m_1, \ldots, m_t)$ の Shuffle 積から多重ゼータ値 $\zeta(v_1, \ldots, v_q, u_{11}, \ldots, u_{(r+s+p)1})$ が現れるような $(u_{i1}), (v_i)$ をわたる. また, $c_{(u_{i1}),(v_i)}$ は非負整数である. 各和の項は

$$\begin{aligned}
&\zeta^{\mathrm{Schur}}\left(x^{u_{(r+s+p)1}-1}y \cdots x^{u_{11}-1}Yx^{v_q-1}y \cdots x^{v_1-1}y, \boxed{k_{12}}\boxed{\cdots}\boxed{k_{1n}}\right) \\
&= \zeta_{\lambda,1}\left(\begin{array}{|c|c|}\hline u_{11} & \boldsymbol{k}^r \\ \hline \vdots & \\ \cline{1-1} u_{R1} & \\ \cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline v_1 \\ \hline \vdots \\ \hline v_q \\ \hline\end{array}\right) \quad (R = r+s+p)
\end{aligned}$$

であるため, 以下の定理の主張を得る.

$$\zeta_{\lambda,s}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{l})\cdot\zeta_{(\{1\}^t)}(\boldsymbol{m})=\sum_{p+q=t}\sum_{(u_{i1}),(v_i)}c_{(u_{i1}),(v_i)}\zeta_{\nu_p,q}\left((u_{ij}),(v_i)\right).$$

□

## 謝辞

2022 年度 RIMS 共同研究 (公開型)「多重ゼータ値の諸相」における講演の機会を与えてくださった田坂浩二先生にこの場をお借りして感謝いたします. また集会中, 山本修司氏, Henrik Bachmann 氏からは Hoffman 代数に関して, 小野雅隆氏からは $n$-tuple elementary factorial Schur 多重ゼータ関数に関して貴重なご指摘いただきました. お三方にもこの場をお借りして感謝申し上げます. 本研究は JSPS 科研費 JP18K03223, JP22K03274, JP22K13900 の助成を受けたものです.

## 参考文献

[H05] M. Hoffman. Algebraic Aspects of Multiple Zeta Values, *Zeta Functions, Topology and Quantum Physics*, Springer, Boston, MA, (2005), 51–73.

[MN21] K. Matsumoto and M. Nakasuji. Expressions of Schur multiple zeta-functions of anti-hook-type by zeta-functions of root systems. *Publ. Math. Debrecen* **98** (2021), no. 3-4, 345–377.

[NPY18] M. Nakasuji, O. Phuksuwan and Y. Yamasaki. On Schur multiple zeta functions: A combinatoric generalization of multiple zeta functions, *Advances in Mathematics*, **333** (2018), 570–619.