

## 重さ奇数の二重ゼータ値の次元について

名古屋大学・高等研究院 広瀬 稔  
MINORU HIROSE  
INSTITUTE FOR ADVANCED RESEARCH,  
NAGOYA UNIVERSITY

## 1. はじめに

正整数  $k_1, \dots, k_{d-1} > 0$  および  $k_d > 1$  に対し, 多重ゼータ値  $\zeta(k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{R}$  を

$$\sum_{0 < m_1 < \dots < m_d} \frac{1}{m_1^{k_1} \dots m_d^{k_d}}$$

で定義する. ここで  $k_1 + \dots + k_d$  は重さ,  $d$  は深さと呼ばれる. また深さ 2 の多重ゼータ値は二重ゼータ値と呼ばれる. 重さ奇数の二重ゼータ値に関して次が知られている.

**定理 1** (Zagier, [3]).  $m \geq 1, n \geq 2$  とし,  $k = m + n$  と置く.  $k$  が奇数のとき

$$\zeta(m, n) = (-1)^m \sum_{s=0}^{(k-3)/2} \left( \binom{k-2s-1}{m-1} + \binom{k-2s-1}{n-1} - \delta_{n,2s} + (-1)^m \delta_{s,0} \right) \zeta(2s) \zeta(k-2s).$$

ここで  $\{\zeta(2s)\zeta(k-2s) : 0 \leq s \leq (k-3)/2\}$  は  $\mathbb{Q}$  上線型独立だと予想されているが証明は知られておらず, 次に関する議論をするのに不便なので, 本稿では多重ゼータ値  $\zeta(k_1, \dots, k_d)$  の代わりにモチビック多重ゼータ値  $\zeta^m(k_1, \dots, k_d)$  を用いて議論を行う. モチビック多重ゼータ値  $\zeta^m(k_1, \dots, k_d)$  についても定理 1 と全く同様の式が成り立つことが分かる. つまり定理 1 と同じ条件, 記号の元で次が成り立つ.

$$\zeta^m(m, n) = (-1)^m \sum_{s=0}^{(k-3)/2} \left( \binom{k-2s-1}{m-1} + \binom{k-2s-1}{n-1} - \delta_{n,2s} + (-1)^m \delta_{s,0} \right) \zeta^m(2s) \zeta^m(k-2s).$$

ただし,  $\zeta^m(0) := -\frac{1}{2}$  と置く. また  $\{\zeta^m(2s)\zeta^m(k-2s) : 0 \leq s \leq (k-3)/2\}$  は  $\mathbb{Q}$  上線型独立であることも分かる.  $k$  を 3 以上の奇数とすると, 重さ  $k$ , 深さ 2 以下の全ての多重ゼータ値が張る空間を  $H_{k-2}$  とする. 上で述べた  $\zeta^m(m, n)$  の明示式および  $\{\zeta^m(2s)\zeta^m(k-2s)\}$  の線型独立性から

$$H_{k-2} = \bigoplus_{s=0}^{(k-3)/2} \mathbb{Q} \zeta^m(2s) \zeta^m(k-2s)$$

となり, 特に

$$\dim_{\mathbb{Q}} H_{k-2} = (k-1)/2$$

である.  $H_{k-2}$  の部分空間

$$\mathbb{Q} \zeta^m(k) + \sum_{\substack{a+b=k \\ a \geq 1, b \geq 2 \\ a:\text{even}, b:\text{odd}}} \mathbb{Q} \zeta^m(a, b),$$

$$\mathbb{Q} \zeta^m(k) + \sum_{\substack{a+b=k \\ a \geq 1, b \geq 2 \\ a:\text{odd}, b:\text{even}}} \mathbb{Q} \zeta^m(a, b)$$

については次が知られている.

**定理 2** (Zagier, [3]).  $k \geq 3$  を奇数とすると,

$$\mathbb{Q} \zeta^m(k) + \sum_{\substack{a+b=k \\ a \geq 1, b \geq 2 \\ a:\text{even}, b:\text{odd}}} \mathbb{Q} \zeta^m(a, b) = H_{k-2}$$

定理 3 (Li-Liu, [2]).  $k \geq 3$  を奇数とするとき,

$$\dim_{\mathbb{Q}} \left( \mathbb{Q}\zeta^m(k) + \sum_{\substack{a+b=k \\ a \geq 1, b \geq 2 \\ a:\text{odd}, b:\text{even}}} \mathbb{Q}\zeta^m(a, b) \right) = \dim_{\mathbb{Q}} H_{k-2} - [\dim_{\mathbb{C}} S_{k+1} + \dim_{\mathbb{C}} S_{k-1}].$$

ただし,  $S_l$  は  $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$  に対する重さ  $l$  カスプ形式の空間とする.

以下,  $\zeta^m(1) = T$ ,  $\zeta^m(k-1, 1) = T\zeta^m(k-1) - \zeta^m(1, k-1) - \zeta^m(k)$  と置くことにする ( $T$  は不定元). 二重ゼータ値を一般化した表記として

$$J(a; b, c) = (-1)^a \sum_{\substack{a'+a''=a \\ a', a'' \geq 0}} \binom{b+a'}{b} \binom{c+a''}{c} \zeta^m(b+a'+1, c+a''+1) \in \hat{H}_w := H_w \oplus \mathbb{Q}T\zeta^m(w+1)$$

を導入しよう.  $J(a; b, c)$  は正規化反復積分の値としても自然に現れる量である.  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$  の部分集合  $N, N', N''$  に対して  $\hat{H}_w$  の部分集合  $H_w(N; N', N'')$  を

$$H_w(N; N', N'') = \mathbb{Q}\zeta^m(w+2) + \sum_{\substack{a \in N, b \in N', c \in N'' \\ a+b+c=w}} \mathbb{Q}J(a; b, c)$$

で定める. また  $\mathbf{ev} = 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $\mathbf{od} = 1 + 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $\mathbf{0} = \{0\}$ ,  $\mathbf{1} = \{1\}$  と置く.  $N, N', N''$  のうち 2 つが  $\{\mathbf{ev}, \mathbf{od}\}$  の元で, 1 つが  $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$  の元の場合に,  $H_w(N; N', N'')$  の次元はどうなるだろうか. このような  $N, N', N''$  の組み合わせは全部で 24 通りある. 著者は [1] で,  $H_w(N, N', N'')$  の次元や生成元が満たす関係式を調査した. 本稿では特に, 重さ奇数の場合 (全部で 12 通りある) の次元について, 得られた結果といくつかの観察事実を紹介したい.

## 2. 次元に関する結果と予想

定理 2, 3 はそれぞれ

$$\dim_{\mathbb{Q}} H_w(\mathbf{0}; \mathbf{od}, \mathbf{ev}) = (w+1)/2,$$

$$\dim_{\mathbb{Q}} H_w(\mathbf{0}; \mathbf{ev}, \mathbf{od}) = (w-1)/2 - \dim_{\mathbb{C}} S_{w+1} - \dim_{\mathbb{C}} S_{w+3},$$

と同値である. 著者は [1] において, いくつかの完全列を与えた. そこから次が従う.

定理 4 ([1]).  $w$  を 3 以上の奇数とするとき

$$\dim_{\mathbb{Q}} H_w(\mathbf{od}; \mathbf{0}, \mathbf{ev}) = (w-1)/2 - [(w-3)/6],$$

$$\dim_{\mathbb{Q}} H_w(\mathbf{ev}; \mathbf{0}, \mathbf{od}) = (w-1)/2,$$

$$\dim_{\mathbb{Q}} H_w(\mathbf{od}; \mathbf{ev}, \mathbf{0}) = (w+1)/2,$$

$$\dim_{\mathbb{Q}} H_w(\mathbf{ev}; \mathbf{od}, \mathbf{0}) = (w+1)/2,$$

$$\dim_{\mathbb{Q}} H_w(\mathbf{1}; \mathbf{ev}, \mathbf{ev}) = (w-1)/2 - \dim_{\mathbb{C}} S_{w+1},$$

$$\dim_{\mathbb{Q}} H_w(\mathbf{od}; \mathbf{1}, \mathbf{od}) = (w-1)/2 - \dim_{\mathbb{C}} S_{w+1},$$

$$\dim_{\mathbb{Q}} H_w(\mathbf{ev}; \mathbf{1}, \mathbf{ev}) = (w+1)/2.$$

残った 3 ケースについては次を予想している.

予想 5 ([1]).  $w$  を 3 以上の奇数とするとき

$$(2.1) \quad \dim_{\mathbb{Q}} H_w(\mathbf{1}; \mathbf{od}, \mathbf{od}) = (w-1)/2,$$

$$(2.2) \quad \dim_{\mathbb{Q}} H_w(\mathbf{od}; \mathbf{od}, \mathbf{1}) = (w-1)/2,$$

$$(2.3) \quad \dim_{\mathbb{Q}} H_w(\mathbf{ev}; \mathbf{ev}, \mathbf{1}) = (w-1)/2.$$

ここで  $J_1(a; b, c) := a!b!c!J(a; b, c)$ ,  $J_1(s) := s!\zeta^m(s+1)$  に対して,

$$\begin{aligned} J_1(1; w-2m-2, 2m+1) &= \sum_{n=0}^{(w-3)/2} \left( -\delta_{m,n} + \binom{w-2m-2}{2n} - \binom{2m+1}{2n} \right) J_1(2n+1)J_1(w-2n-1), \\ J_1(2m+1; w-2m-2, 1) &= \sum_{n=0}^{(w-3)/2} \left( -\delta_{m,n} + \binom{w-2m-2}{2n-2m} - \binom{2m+1}{2n} \right) J_1(2n+1)J_1(w-2n-1), \\ J_1(w-1-2m; 2m, 1) &= \sum_{n=1}^{(w-1)/2} \left( \binom{2s-2m}{2s-2n} - \binom{2m}{2n-1} - \delta_{m,n} \right) J_1(2n)J_1(w-2n) \end{aligned}$$

となることに注意すると, (2.1), (2.2), (2.3) はそれぞれ次の予想に同値である.

**予想 6.**  $w$  を 3 以上の奇数とするとき

$$C_{1,\text{od},\text{od}}(w) = \det \left( -\delta_{m,n} + \binom{w-2m-2}{2n} - \binom{2m+1}{2n} \right)_{\substack{0 \leq m \leq (w-3)/2 \\ 0 \leq n \leq (w-3)/2}} \neq 0.$$

**予想 7.**  $w$  を 3 以上の奇数とするとき

$$C_{\text{od},\text{od},1}(w) = \det \left( -\delta_{m,n} + \binom{w-2m-2}{2n-2m} - \binom{2m+1}{2n} \right)_{\substack{0 \leq m \leq (w-3)/2 \\ 0 \leq n \leq (w-3)/2}} \neq 0.$$

**予想 8.**  $w$  を 3 以上の奇数とするとき

$$\text{rank} \left( -\delta_{m,n} + \binom{w-1-2m}{w-1-2n} - \binom{2m}{2n-1} \right)_{\substack{0 \leq m \leq (w-1)/2 \\ 1 \leq n \leq (w-1)/2}} = (w-1)/2.$$

予想 8 についてはより強く次が予想される.

**予想 9.**  $w$  を 3 以上の奇数とするとき

$$C_{\text{ev},\text{ev},1}(w) = \det \left( -\delta_{m,n} + \binom{w-1-2m}{w-1-2n} - \binom{2m}{2n-1} \right)_{\substack{1 \leq m \leq (w-1)/2 \\ 1 \leq n \leq (w-1)/2}} \neq 0.$$

$C_{1,\text{od},\text{od}}(w)$ ,  $C_{\text{od},\text{od},1}(w)$ ,  $C_{\text{ev},\text{ev},1}(w)$  の具体例は以下の通りである.

$$\begin{aligned} C_{1,\text{od},\text{od}}(3) &= -1 \\ C_{1,\text{od},\text{od}}(5) &= 4 = 2^2 \\ C_{1,\text{od},\text{od}}(7) &= -6 = -2 \cdot 3 \\ C_{1,\text{od},\text{od}}(9) &= -8 = -2^3 \\ C_{1,\text{od},\text{od}}(11) &= 100 = 2^2 \cdot 5^2 \\ C_{1,\text{od},\text{od}}(13) &= 528 = 2^4 \cdot 3 \cdot 11 \\ C_{1,\text{od},\text{od}}(15) &= -2100 = -2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \\ C_{1,\text{od},\text{od}}(17) &= 144896 = 2^9 \cdot 283 \\ C_{1,\text{od},\text{od}}(19) &= -2641320 = -2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 29 \\ C_{1,\text{od},\text{od}}(21) &= -34079040 = -2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11833 \\ C_{1,\text{od},\text{od}}(23) &= 12167614800 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 11^2 \cdot 9311, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{\text{od,od},1}(3) &= -1 \\
C_{\text{od,od},1}(5) &= 6 = 2 \cdot 3 \\
C_{\text{od,od},1}(7) &= -90 = -2 \cdot 3^2 \cdot 5 \\
C_{\text{od,od},1}(9) &= 1050 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \\
C_{\text{od,od},1}(11) &= -21000 = -2^3 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7 \\
C_{\text{od,od},1}(13) &= 9355500 = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \\
C_{\text{od,od},1}(15) &= -998917920 = -2^5 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13 \\
C_{\text{od,od},1}(17) &= 1767300935400 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 326951 \\
C_{\text{od,od},1}(19) &= -9539913173590800 = -1 \cdot 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 17302801 \\
C_{\text{od,od},1}(21) &= 32942059080907977000 = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 11331989 \\
C_{\text{od,od},1}(23) &= -396861213995820493920000 = -2^8 \cdot 3^6 \cdot 5^4 \cdot 7 \cdot 11^3 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 86969941. \\
\\
C_{\text{ev,ev},1}(3) &= -2 \\
C_{\text{ev,ev},1}(5) &= 12 = 2^2 \cdot 3 \\
C_{\text{ev,ev},1}(7) &= -212 = -2^2 \cdot 53 \\
C_{\text{ev,ev},1}(9) &= 2784 = 2^5 \cdot 3 \cdot 29 \\
C_{\text{ev,ev},1}(11) &= -84240 = -2^4 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 13 \\
C_{\text{ev,ev},1}(13) &= 29788800 = 2^7 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 29 \cdot 107 \\
C_{\text{ev,ev},1}(15) &= -4516713600 = -2^7 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 67213 \\
C_{\text{ev,ev},1}(17) &= 6037524864000 = 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 41 \cdot 2029 \\
C_{\text{ev,ev},1}(19) &= -43408510535577600 = -2^{12} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 2242916591 \\
C_{\text{ev,ev},1}(21) &= 148322427257148641280 = 2^{12} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 120157 \cdot 956725271 \\
C_{\text{ev,ev},1}(23) &= -2323151562762052465766400 = -2^{12} \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^4 \cdot 11 \cdot 131 \cdot 162881 \cdot 497011.
\end{aligned}$$

これらの符号に関しては次が予想される。

予想 10 ([1]).

$$\text{sgn}(C_{1,\text{od,od}}(w)) = \begin{cases} 1 & w \equiv 1, 5, 11 \pmod{12}, \\ -1 & w \equiv 3, 7, 9 \pmod{12}. \end{cases}$$

予想 11 ([1]).

$$\text{sgn}(C_{\text{od,od},1}(w)) = (-1)^{(w-1)/2}.$$

予想 12.

$$\text{sgn}(C_{\text{ev,ev},1}(w)) = (-1)^{(w-1)/2}.$$

$C_{1,\text{od,od}}(w)$  や  $C_{\text{od,od},1}(w)$  の 2-order についていくつかの観察を述べる。

予想 13.  $w \in 3 + 4\mathbb{Z}_{\geq 0}$  に対し

$$\text{ord}_2(C_{1,\text{od,od}}(w)) = \lfloor (w+1)/6 \rfloor.$$

予想 14.  $w \in 5 + 4\mathbb{Z}_{\geq 0}$  に対し

$$\text{ord}_2(C_{\text{od,od},1}(w)) = \lfloor (w+1)/6 \rfloor.$$

より一般の  $w$  に対しても規則性を見出すことは可能である。ここでは、 $\text{ord}_2(C_{1,\text{od,od}}(w))$  の場合に観察として述べておこう。

事実 15.  $w$  を 3 以上 700 以下の奇数とする。このとき

$$\text{ord}_2(C_{1,\text{od,od}}(w)) = \begin{cases} \frac{w-1}{2} \left( \frac{4}{3} - A_{\text{ord}_2(w-1)} \right) + c & w \equiv 1 \pmod{4}, \\ \lfloor (w+1)/6 \rfloor & w \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

ここで

$$A_m = \begin{cases} \frac{5}{3 \cdot 2^{2m/3}} & m \in 0 + 3\mathbb{Z}_{\geq 0}, \\ \frac{5}{3 \cdot 2^{(2m+1)/3}} & m \in 1 + 3\mathbb{Z}_{\geq 0}, \\ \frac{1}{3 \cdot 2^{(2m-7)/3}} & m \in 2 + 3\mathbb{Z}_{\geq 0}, \end{cases}$$

であり,  $c$  は  $\text{ord}_2(C_{1,\text{od},\text{od}}(w))$  の整数性から自動的に定まる  $\{0, 2/3, -2/3\}$  の元である.

#### REFERENCES

- [1] Minoru Hirose. Modular phenomena for regularized double zeta values. *Israel Journal of Mathematics*, (to be appeared).
- [2] Jiangtao Li and Fei Liu. Motivic double zeta values of odd weight. *Manuscripta Math.*, 166(1-2):19–36, 2021.
- [3] D. Zagier. Evaluation of the multiple zeta values  $\zeta(2, \dots, 2, 3, 2, \dots, 2)$ . *Ann. of Math. (2)*, 175(2):977–1000, 2012.

(Minoru Hirose) INSTITUTE FOR ADVANCED RESEARCH, NAGOYA UNIVERSITY, FURO-CHO, CHIKUSA-KU, NAGOYA, 464-8602, JAPAN  
*Email address:* minoru.hirose@math.nagoya-u.ac.jp