レベル 4 の多重 L 値について

金子昌信 (Masanobu Kaneko)
九州大学数理学研究院 (Faculty of Mathematics, Kyushu University)

1 レベル 4 の多重 L 値

故荒川恒男さんと [2] で導入した，いわゆる荒川–金子ゼータ関数というもの，それは多重ベルヌーイ数と多重ゼータ値とを結びつけるような対象であるが，その類似物ないしは一般化を都立大の津村博文さんと，長年に渡って研究している．今回の「諸相」集会では，その共同研究の中から,「レベル 4」の荒川–金子ゼータ関数の考察を通して立ち現れてきた，レベル 4（あるいは導手 4）多重 L 値にまつわるいくつかの現象，公式などをお話しさせて頂いた．これらの中には，単なる一般化のための一般化に留まらないような面白そうなこともあるかと思っている．詳細は津村さんとの共著論文 [12] を参照して頂くとよいと思うので，ここでは証明は省いて，概略の紹介にとどめようと思う．

多重 L 値というのは，多重ゼータ値に指標を乗せた一般化であるが，指標の乗せ方に二通りあって，それぞれ以下のように定義する．

$$L_{ш}(k_1,\dots,k_r;\chi_1,\dots,\chi_r)=\sum_{1\le m_1<\cdots<m_r}\frac{\chi_1(m_1)\chi_2(m_2-m_1)\cdots\chi_r(m_r-m_{r-1})}{m_1^{k_1}m_2^{k_2}\cdots m_r^{k_r}},\tag{1}$$

$$L_{*}(k_1,\dots,k_r;\chi_1,\dots,\chi_r)=\sum_{1\le m_1<\cdots<m_r}\frac{\chi_1(m_1)\chi_2(m_2)\cdots\chi_r(m_r)}{m_1^{k_1}m_2^{k_2}\cdots m_r^{k_r}}.\tag{2}$$

ここに k_i たちは正整数，χ_i は Dirichlet 指標で，$k_r=1$ のときは収束のための条件がいるが，立ち入らない．記号が示すように，$L_ш$ は「積分シャッフル」積，L_* の方は「級数シャッフル」積（あるいは調和積）に従う．以下用いるのはもっぱら $L_ш$ の方である．これら多重 L 値の基本的な性質，正規化や導分関係式などについてかつて荒川さんと [3] を書いた．

さて χ_4 を導手が 4 の（唯一の）原始的 Dirichlet 指標とし，χ_i がすべて χ_4 の場合を考える．χ_4 は偶数で値 0 をとり，奇数 n では $\chi_4(n)=(-1)^{(n-1)/2}$ であるから，定義よりただちに

$$L_{ш}(k_1,\dots,k_r;\chi_4,\dots,\chi_4)=\sum_{\substack{1\le m_1<\cdots<m_r\\ m_j\equiv j \bmod 2}}\frac{(-1)^{(m_r-r)/2}}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}},\tag{3}$$

であることが分かる．これは $k_r=1$ であっても，和の範囲を $1\le m_1<\cdots<m_r<M$ とした有限和の $M\to\infty$ での極限値として意味をもつ．$L_ш(1;\chi_4)$ は有名な Leibniz の

$$L_{ш}(1;\chi_4)=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}$$

である． 記号の簡便化と，後の都合上 2 のベキをかけたものを $\widetilde{T}$ で表すことにし，多重 $\widetilde{T}$ 値と呼ぶ.

定義 1.1 自然数の組 $(k_1,\dots,k_r)$ に対し多重 $\widetilde{T}$ 値を

$$\widetilde{T}(k_1,\dots,k_r):=2^rL_{ш}(k_1,\dots,k_r;\chi_4,\dots,\chi_4)=2^r\sum_{\substack{1\le m_1<\cdots<m_r\\ m_j\equiv j \bmod 2}}\frac{(-1)^{(m_r-r)/2}}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}\tag{4}$$

で定義する．

我々は以前 [10, 11] において「多重 T 値」というものを導入し調べた．その定義と対比させるならば，

$$T(k_1,\ldots,k_r) = 2^r L_{ш}(k_1,\ldots,k_r;\chi_4^2,\ldots,\chi_4^2) = 2^r \sum_{\substack{1\le m_1<\cdots<m_r \\ m_j\equiv j \bmod 2}} \frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}} \tag{5}$$

となる．

多重 $\widetilde{T}$ 値の一つの積分表示が

$$\begin{aligned}&\widetilde{T}(k_1,k_2,\ldots,k_r)\\ &= \int\cdots\int_{0<t_1<\cdots<t_k<1} \frac{2dt_1}{1+t_1^2}\underbrace{\frac{dt_2}{t_2}\cdots\frac{dt}{t}}_{k_1-1}\frac{2dt}{1+t^2}\underbrace{\frac{dt}{t}\cdots\frac{dt}{t}}_{k_2-1}\cdots\cdots\frac{2dt}{1+t^2}\underbrace{\frac{dt}{t}\cdots\frac{dt_k}{t_k}}_{k_r-1}\end{aligned} \tag{6}$$

で与えられるが（積分変数の添え字を一部省略している），T 値ではこれが

$$\begin{aligned}&T(k_1,k_2,\ldots,k_r)\\ &= \int\cdots\int_{0<t_1<\cdots<t_k<1} \frac{2dt_1}{1-t_1^2}\underbrace{\frac{dt_2}{t_2}\cdots\frac{dt}{t}}_{k_1-1}\frac{2dt}{1-t^2}\underbrace{\frac{dt}{t}\cdots\frac{dt}{t}}_{k_2-1}\cdots\cdots\frac{2dt}{1-t^2}\underbrace{\frac{dt}{t}\cdots\frac{dt_k}{t_k}}_{k_r-1}\end{aligned} \tag{7}$$

であった．ここで $k=k_1+\cdots k_r$ である．この積分表示によって多重 $\widetilde{T}$ 値が多重ゼータ値（および多重 T 値）と同じシャッフル積，例えば

$$\widetilde{T}(2)^2 = 2\,\widetilde{T}(2,2)+4\,\widetilde{T}(1,3)$$

のような積を和に変える関係式を満たすことが分かる．最後の成分が 1 でも収束するので，

$$\widetilde{T}(1)^2 = 2\,\widetilde{T}(1,1),\ \widetilde{T}(1)\widetilde{T}(2) = 2\,\widetilde{T}(1,2)+\widetilde{T}(2,1)$$

のような式も「正規化」をせずとも成り立つ．

さてこのような対象を定義すると，それらが $\mathbb{Q}$ 上生成するベクトル空間を考えるのが通例である．すなわち，$\widetilde{\mathcal{T}}$ を

$$\widetilde{\mathcal{T}} = \sum_{k=0}^{\infty}\widetilde{\mathcal{T}}_k,$$

$$\widetilde{\mathcal{T}}_0=\mathbb{Q},\quad \widetilde{\mathcal{T}}_k = \sum_{\substack{1\le r\le k\\ k_1,\ldots,k_r\ge 1\\ k_1+\cdots+k_r=k}} \mathbb{Q}\cdot\widetilde{T}(k_1,\ldots,k_r)\quad (k\ge 1)$$

で定義する．シャッフル積があるので，$\widetilde{\mathcal{T}}$ は自然に $\mathbb{Q}$ 代数となる．例の如く数値実験をして（Pari-GP），$\widetilde{\mathcal{T}}_k$ の次元 d_k，また，深さが偶数/奇数のみの $\widetilde{T}$ 値が張る空間の次元 $d_{k,ev}$ および $d_{k,od}$ の予想値を表にすると次のようになった．

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
d_k	1	1	2	3	6	8	16	22	44	59	118	162
$d_{k,ev}$	1	0	1	2	3	4	8	12	22	30	59	84
$d_{k,od}$	0	1	1	1	3	4	8	10	22	29	59	78

深さの偶奇が異なる多重 $\widetilde{T}$ 値は独立であると思われ，数値実験した限り（重さ 11 まで）$d_k=d_{k,ev}+d_{k,od}$ が成り立っている． またこの範囲で，$k>1$ が偶数なら $d_k=2d_{k-1}$ および $d_{k,ev}=d_{k,od}$ が成り立っているが，そうなるべき理由は今のところ分からない．

また，実験をする中に，多重 T 値はすべて，深さが偶数の多重 $\widetilde{T}$ 値の一次結合で書けると予想し講演で述べたのであったが，それは直ちに広瀬稔氏，梅澤瞭太氏によって指摘された如く，積分表示と，反復積分の積分区間を分割したときの “path-composition formula” と呼ばれる公式を使えば証明できることであった（[12] に証明を書いた）．

2 「高さ 1」の多重 $\widetilde{T}$ 値

反復積分表示を用いた，今やスタンダードな手法によって，インデックスの成分が最後のもの以外はすべて 1 であるようなもの（'height 1'）の母関数を計算することができる．古典的な多重ゼータ値や，前に調べた多重 T 値の場合はガウスの超幾何級数 ${}_2F_1$ がそこに現れたのであるが，今度は Appell の超幾何が登場した．結果だけ紹介する．

多重ゼータ値，多重 T 値の場合の公式は，

$$1-\sum_{m,n=1}^{\infty}\zeta(\underbrace{1,\ldots,1}_{n-1},m+1)X^mY^n=\frac{\Gamma(1-X)\Gamma(1-Y)}{\Gamma(1-X-Y)}={}_2F_1(X,Y;1;1)^{-1}$$

および

$$1-\sum_{m,n=1}^{\infty}T(\underbrace{1,\ldots,1}_{n-1},m+1)X^mY^n=\frac{2\,\Gamma(1-X)\Gamma(1-Y)}{\Gamma(1-X-Y)}{}_2F_1(1-X,1-Y;1-X-Y;-1)$$

であった ([1, 4, 11])．ここに ${}_2F_1(a,b;c;z)$ はガウスの超幾何級数である．

対応する多重 $\widetilde{T}$ 値の母関数を計算すると，

$$\sum_{m,n\geq 1}\widetilde{T}(\underbrace{1,\cdots,1}_{n-1},m)X^{m-1}Y^{n-1}=\frac{2}{1-X}F_1(1-X;1-iY,1+iY;2-X;i,-i)$$

となる．ここに F_1 は Appell の超幾何級数

$$F_1(a;b_1,b_2;c;x,y)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}(b_1)_m(b_2)_n}{(c)_{m+n}\,m!\,n!}\,x^my^n$$

である．

多重ゼータ値や T 値の場合は，インデックスの最後の成分が 2 以上でないと収束しないので，高さ 1 の値すべての母関数を考えていることになるが，$\widetilde{T}$ 値の場合は最後の成分が 1 でも収束するため，このような母関数を考えることをどう正当化するのか，よく分からない面もある．しかしともかくも，新たに Appell の超幾何が現れ出るというのは面白いことと思う．

3 特別な多重 $\widetilde{T}$ 値の関係式と Entringer 数

インデックスの成分のうち一つだけが 2 で，あとは 1 であるような，特殊な多重 $\widetilde{T}$ 値がある線形関係式を満たして，その係数に「Entringer 数」という，組合せ論的に面白い数が現れる．この節ではこれを紹介する．

その関係式というのは次のものである．

定理 3.1 各自然数 n に対し，

$$\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}(n,j)\widetilde{T}(\underbrace{1,\ldots,1,\overset{j}{\check{2}},1,\ldots,1}_{n})=\begin{cases}\widetilde{T}(n+1) & (n:\text{ 奇数})\\ T(n+1) & (n:\text{ 偶数})\end{cases}\tag{8}$$

が成り立つ．

この $\mathbb{E}(n,j)$ が Entringer 数で，対称群 S_{n+1} の 'down-up permutation' で $j+1$ で始まるものの個数，として定義される．

Entringer 数と言っても馴染みのない方も多いのではないかと思われるので（我々も全く知らなかったが，例によって Sloane さんの OEIS で見つけた），ここで少し，その組合せ論的背景である ‘alternating permutations’ について概観しておこうと思う．より詳しくは Entringer [5] や Stanley [13] を参照．

対称群 S_n の元 σ を通常の如く $\{1,2,\ldots,n\}$ からそれ自身への全単射と見たとき，

$$\sigma(1) > \sigma(2) < \sigma(3) > \cdots$$

と，行き先が順に下がって上がってをジグザグに繰り返すような置換を ‘down-up permutation’，また

$$\sigma(1) < \sigma(2) > \sigma(3) < \cdots$$

と，上がって下がってを交互に繰り返すものを ‘up-down permutation’ といい，総称して ‘alternating permutation’ もしくは ‘zig-zag permutation’ という． S_n の元を，$\sigma(i) = a_i$ $(1 \le i \le n)$ であれば $(a_1 a_2 \cdots a_n)$ のように表記することにすると，対応 $(a_1 a_2 \cdots a_n) \leftrightarrow (n+1-a_1, n+1-a_2, \cdots n+1-a_n)$ によって down-up permutation と up-down permutation は一対一に対応し，それぞれの総数は等しくなる．そこで，

$$\mathbb{E}_n := S_n \text{ の down-up permutations の総数}$$

と定義する．up-down permutations の総数としても同じである．S_1 の元 (1) は down-up permutation でもあり up-down permutation でもあると思うことにして $\mathbb{E}_1 = 1$，また $\mathbb{E}_0 = 1$ とする．たとえば 4 次対称群 S_4 では，$(2143), (3142), (3241), (4132), (4231)$ の 5 つが down-up permutations のすべてであり，$\mathbb{E}_4 = 5$ である．はじめのいくつかを表にしておくと

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathbb{E}_n$	1	1	1	2	5	16	61	272	1385	7936	50521

表 1: $\mathbb{E}_n$ $(0 \le n \le 10)$

この $\mathbb{E}_n$ は Euler 数とよばれることもある数で，その母関数として

$$\sec x + \tan x = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_n \frac{x^n}{n!} \tag{9}$$

が知られている ([13, Theorem 1.1] によれば少なくとも 1879 年の D. André という人の論文に遡るらしい)．通常 Euler 数は

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{\cosh x} \tag{10}$$

で定義される E_n のことを指すことが多いと思うので，ここでは記号（フォント）を変えてみた．$\cosh x$ は偶関数だから n が奇数の E_n は 0 で，偶数番目が $E_{2n} = (-1)^n \mathbb{E}_{2n}$ という関係にある．奇数番号の $\mathbb{E}_{2n+1}$ は通常 ‘tangent number’ として知られる数に他ならない．

母関数 (9) の一つの証明は，まず漸化式

$$\mathbb{E}_{n+2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathbb{E}_k \mathbb{E}_{n+1-k} \quad (n \ge 0)$$

を組合せ論的に証明する．それには，S_{n+2} の down-up permutation のうち，左から $k+1$ 番目に初めて 1 または $n+2$ が来るものの総数を数えると $\binom{n}{k}\mathbb{E}_k \mathbb{E}_{n+1-k}$ となることを示す．そのときに down-up permutation と up-down permutation の総数は等しいということを使う（すなわち，k の偶奇に応じて，$k+2$ 番目以降が up-down または down-up となる）．この漸化式から母関数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_n \frac{x^n}{n!}$ の満たす微分方程式

$$f''(x) = f(x) f'(x), \quad f(0) = f'(0) = 1$$

が得られ，この唯一の解が $\sec x + \tan x$ $(= \tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}))$ となる．

Entringer 数というのは，この Euler 数 $\mathbb{E}_n$ の細分化である．慣例で一つインデックスがずれるのだが，$0 \le j \le n$ なる n, j に対し（先にも書いたように），

$$\mathbb{E}(n,j) := \text{対称群 } S_{n+1} \text{の down-up permutation で } j+1 \text{ で始まるものの個数}$$

で定義される．$\mathbb{E}(0,0)=1$ とおく．

例えば先に挙げた S_4 の 5 つの例で見ると，先頭の数に従って，

$$\mathbb{E}(3,1)=1,\ \mathbb{E}(3,2)=2,\ \mathbb{E}(3,3)=2$$

である．$\sigma(1)=1$ である置換はもう下がりようがないから，$n>1$ ならば down-up permutation はなく，$\mathbb{E}(n,0)=0$ である．Entringer 数はまた漸化式

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}(0,0)=1, \quad \mathbb{E}(n,0)=0 \ \ (n>0),\\ &\mathbb{E}(n,j)=\mathbb{E}(n,j-1)+\mathbb{E}(n-1,n-j) \ \ (n\ge 1,\ 1\le j\le n)\end{aligned} \tag{11}$$

によって決まっていると言ってもよい．この漸化式は，$\mathbb{E}(n,j)=\sum_{i=n-j}^{n-1}\mathbb{E}(n-1,i)$ を示すことにより得られる．これは演習問題ということにしておく．（より直接に (11) を示せるのか，よく分からない．）$\mathbb{E}(n,j)$ のいくつかを表にしておく．

n \ j	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	0	1						
2	0	1	1					
3	0	1	2	2				
4	0	2	4	5	5			
5	0	5	10	14	16	16		
6	0	16	32	46	56	61	61	
7	0	61	122	178	224	256	272	272

表 2: $\mathbb{E}(n,j)$ $(0 \le n,\ j \le 7)$

この Euler 数 $\mathbb{E}_n$ を使うと，‘深さ 1’ の T 値および $\widetilde{T}$ 値が統一的に

$$\left.\begin{array}{ll} T(n+1) & (n:\text{odd}) \\ \widetilde{T}(n+1) & (n:\text{even}) \end{array}\right\} = \frac{\mathbb{E}_n}{n!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1} \tag{12}$$

と書ける．ここでの n の偶奇は定理 3.1 でのそれと逆である．つまり定理は,「難しい」方の深さ 1 T 値および $\widetilde{T}$ 値が左辺のように，Euler 数の細分である Entringer 数を使って書ける，と見ることも出来る．何か玄妙な感じがする．

低い重さの例を（左辺と右辺を逆にして）挙げておく．

例 3.2

$$\begin{aligned}
T(3) &= \widetilde{T}(2,1)+\widetilde{T}(1,2),\\
\widetilde{T}(4) &= \widetilde{T}(2,1,1)+2\widetilde{T}(1,2,1)+2\widetilde{T}(1,1,2),\\
T(5) &= 2\widetilde{T}(2,1,1,1)+4\widetilde{T}(1,2,1,1)+5\widetilde{T}(1,1,2,1)+5\widetilde{T}(1,1,1,2),\\
\widetilde{T}(6) &= 5\widetilde{T}(2,1,1,1,1)+10\widetilde{T}(1,2,1,1,1)+14\widetilde{T}(1,1,2,1,1)\\
&\quad +16\widetilde{T}(1,1,1,2,1)+16\widetilde{T}(1,1,1,1,2),\\
T(7) &= 16\widetilde{T}(2,1,1,1,1,1)+32\widetilde{T}(1,2,1,1,1,1)+46\widetilde{T}(1,1,2,1,1,1)\\
&\quad +56\widetilde{T}(1,1,1,2,1,1)+61\widetilde{T}(1,1,1,1,2,1)+61\widetilde{T}(1,1,1,1,1,2).
\end{aligned}$$

定理の証明は，$n \geq 1$ に関する帰納法と母関数の計算である．興味のある方は論文 [12] を参照いただきたい．Entringer 数の 2 変数母関数を書いておくと，

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}\mathbb{E}(k,l)\frac{x^{k-l}}{(k-l)!}\frac{y^l}{l!}=\frac{\cos x+\sin y}{\cos(x+y)} \tag{13}$$

となる．

上付き指数が負の「多重ベルヌーイ数」はいくつかの面白い組合せの数としての解釈を持つことが知られ，その類似や一般化の研究が多くあるが,「多重ゼータ値側」でこのような組合せの数が現れたことは余りないように思う（(12) はその一例ではある）．なぜ定理の関係式の係数に Entringer 数が現れるのか，その内在的な理由を問うのは当然の問題である．これについては名古屋大学の梅澤瞭太氏が，定理 3.1 の「レベル 6」版を見つけていて，そこにやはり Entringer 数が現れるのだが，その組合せ的理由を明らかにしている．その考察が我々の場合にも適用されるのだと思われる．いずれどこかで発表されることと思う．

4　二重 $\widetilde{T}$ 値とモジュラー形式

論文 [8] 以来，二重ゼータ値とモジュラー形式（あるいはモジュラー形式に付随する周期多項式）の関係は様々な観点から興味を持たれ続けているが，この $\widetilde{T}$ 値についても同じような現象が存在していると思われる．今のところ，数値的に観察された予想でしかないが，この場合にも面白いことが起こっているのは確実に見える．同じ研究会で発表された，広瀬稔氏の研究 [9] とも関係があるはずと思うが，今のところよく分からない．どなたか興味を持って下さって証明をつけて下されば，我々としてはありがたく思う．

自然数 $N=2$ および 4 と，偶数 $k \geq 4$，そして $1 \leq j \leq (k-2)/2$ なる j に対し，有理数係数の多項式 $\widetilde{S}_{N,k,j}(X)$ を

$$\begin{aligned}\widetilde{S}_{N,k,j}(X)=&\frac{N^{k-2j-1}}{k-2j}X^{k-2}B^0_{k-2j}\left(\frac{1}{NX}\right)-\frac{1}{2j}B^0_{2j}(X)\\&-\frac{kB_{2j}B_{k-2j}}{2j(k-2j)B_k}\left(\frac{1-2^{-2j}}{1-2^{-k}}\frac{X^{k-2}}{N}-\frac{1-2^{-k+2j}}{1-2^{-k}}\frac{1}{N^{2j}}\right)\end{aligned}$$

によって定義する．ここに B_n はベルヌーイ数で，$B^0_n(X)$ は通常のベルヌーイ多項式から項 nB_1X^{n-1} を取り去ったもの:

$$B^0_n(X)=\sum_{\substack{0\leq j\leq n\\ j:\mathrm{even}}}\binom{n}{j}B_jX^{n-j}.$$

さらに，この $\widetilde{S}_{N,k,j}(X)$ をつかって $P_{N,k,j}(X)$ および $P^{(\pm)}_{N,k,j}(X)$ を

$$P_{N,k,j}(X)=(-2X+2)^{k-2}\widetilde{S}_{N,k,j}\left(\frac{X+1}{-2X+2}\right)$$

および

$$P^{(\pm)}_{N,k,j}(X)=\frac{1}{2}\left(P_{N,k,j}(X)\pm P_{N,k,j}(-X)\right)$$

として定義する．このとき我々の予想は

予想 4.1 *1)* $N=2$ または 4，偶数 $k \geq 4$，および $1 \leq j \leq (k-2)/2$ を満たす自然数 j に対し，多項式 $P^{(+)}_{N,k,j}(X+1)$ を

$$P^{(+)}_{N,k,j}(X+1)=\sum_{i=0}^{k-2}a_i\binom{k-2}{i}X^i$$

と書く（各係数 a_i は $N,\ k,\ j$ に依っている）．このとき，二重 $\widetilde{T}$ 値の関係

$$\sum_{i=0}^{k-2} a_i\,\widetilde{T}(i+1, k-i-1) = 0$$

が成り立つ．$P^{(+)}_{4,k,j}(X)$ $(1 \le j \le (k-2)/2)$ が張る $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 $V_{4,k}$ は $[(k-2)/4]$ 次元で，この数が重さ k の二重 $\widetilde{T}$ 値の間に成り立つ独立な線形関係式の個数に等しいであろう．多項式 $P^{(+)}_{2,k,j}(X)$ たちは $V_{4,k}$ に含まれ，その $[(k-2)/6]$ 次元の部分空間を生成する．

2) $N=2$ または 4，偶数 $k \ge 4$，および $1 \le j \le (k-2)/2$ を満たす自然数 j に対し，多項式 $P^{(-)}_{N,k,j}(X+1)$ を

$$P^{(-)}_{N,k,j}(X+1) = \sum_{i=0}^{k-3} b_i \binom{k-2}{i} X^i$$

と書く．このとき，二重 T 値の関係

$$\sum_{i=0}^{k-3} b_i\,T(i+1, k-i-1) = 0$$

が成り立つ．

$P^{(-)}_{4,k,j}(X)$ $(1 \le j \le (k-2)/2)$ が張る $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 W_k は $[k/4]-1$ 次元と予想される．一方重さ k の二重 T の次元は $k/2-2$ であると予想される．

注意 4.2 *i)* ここでの多項式 $\widetilde{S}_{N,k,j}(X)$ は，*Fukuhara-Yang [6]* における周期多項式 $r^+(R_{\Gamma_0(N),k-2,2j-1})(X)$ である．彼らは，合同群 $\Gamma_0(N)$ に関するある特別な *cusp form* $R_{\Gamma_0(N),k-2,2j-1}$ に対する周期多項式を具体的に計算し，いろいろな性質を証明している．

ii) 1) における $[(k-2)/4]$ という数は，$\Gamma_0(4)$ および $\Gamma_0(2)$ に関する重さ k の *cusp forms* の空間の次元の差 $\dim S_k(\Gamma_0(4)) - \dim S_k(\Gamma_0(2))$ に等しい． そして，差 $[(k-2)/4]-[(k-2)/6]$ が $\Gamma_0(4)$ に関する重さ k の *'new forms'* の空間の次元になっている．また，*2)* の $[k/4]-1$ という数は $\dim S_k(\Gamma_0(2))$ に等しく，一方 $k/2-2 = \dim S_k(\Gamma_0(4))$ である．二重 T 値の，残り $k/2-2-([k/4]-1) = [(k-2)/4]$ 分の関係式を周期多項式からどう与えることが出来るのか（或いは出来ないのか）は今のところ分からない．

iii) Fukuhara and Yang [7, Cor. 1.9] (resp. [6, Cor. 1.5]) によれば，多項式 $\widetilde{S}_{4,k,j}(X)$ *(resp.* $\widetilde{S}_{2,k,j}(X)$*)* たちは $k/2-2 = \dim S_k(\Gamma_0(4))$ 次元 *(resp.* $[k/4]-1 = \dim S_k(\Gamma_0(2))$ 次元*)* の空間を張る．

例 4.3 *i)* $N=4,\ k=6,\ j=1$ に対し，

$$\widetilde{S}_{4,6,1}(X) = -\frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{32}, \quad P^{(+)}_{4,6,1}(X) = X^4 - 10X^2 + 1$$

および

$$\begin{aligned} P^{(+)}_{4,6,1}(X+1) &= -8 - 16X - 4X^2 + 4X^3 + X^4 \\ &= -8\binom{4}{0} - 4\binom{4}{1}X - \frac{2}{3}\binom{4}{2}X^2 + 1\cdot\binom{4}{3}X^3 + 1\cdot\binom{4}{4}X^4 \\ &= -\frac{1}{3}\left(24\binom{4}{0} + 12\binom{4}{1}X + 2\binom{4}{2}X^2 - 3\binom{4}{3}X^3 - 3\binom{4}{4}X^4\right). \end{aligned}$$

これに対応して，

$$24\widetilde{T}(1,5) + 12\widetilde{T}(2,4) + 2\widetilde{T}(3,3) - 3\widetilde{T}(4,2) - 3\widetilde{T}(5,1) = 0$$

が数値的に（たとえば小数点以下数百桁くらいなら難なく）確認される．

ii) $N=2,\ k=8,\ j=2$ とすると

$$\begin{aligned} \widetilde{S}_{2,8,2}(X) &= -\frac{1}{17}X^6 + \frac{1}{4}X^4 - \frac{1}{8}X^2 + \frac{1}{136}, \\ P^{(+)}_{2,8,2}(X) &= -\frac{2}{17}(5X^6 - 61X^4 - 61X^2 + 5) \end{aligned}$$

および

$$
\begin{aligned}
P^{(+)}_{2,8,2}(X+1) &= \frac{2}{17}(112+336X+352X^2+144X^3-14X^4-30X^5-5X^6) \\
&= \frac{2}{17}\left(112\binom{6}{0}+56\binom{6}{1}X+\frac{352}{15}\binom{6}{2}X^2+\frac{36}{5}\binom{6}{3}X^3\right. \\
&\qquad \left. -\frac{14}{15}\binom{6}{4}X^4-5\binom{6}{5}X^5-5\binom{6}{6}X^6\right).
\end{aligned}
$$

やはり数値的に，高い精度で

$$
112\widetilde{T}(1,7)+56\widetilde{T}(2,6)+\frac{352}{15}\widetilde{T}(3,5)+\frac{36}{5}\widetilde{T}(4,4)-\frac{14}{15}\widetilde{T}(5,3)-5\widetilde{T}(6,2)-5\widetilde{T}(7,1)=0
$$

が確認できる．

iii) $N=4,\ k=8,\ j=1$ なら

$$
\widetilde{S}_{4,8,1}(X)=\frac{208}{51}X^6-\frac{16}{3}X^4+\frac{7}{6}X^2-\frac{19}{408},\quad P^{(-)}_{4,8,1}(X)=-\frac{640}{17}\left(X^5-8X^3+X\right)
$$

および

$$
\begin{aligned}
P^{(-)}_{4,8,1}(X+1) &= \frac{640}{17}\left(6+18X+14X^2-2X^3-5X^4-X^5\right) \\
&= \frac{64}{51}\left(180\binom{6}{0}+90\binom{6}{1}X+28\binom{6}{2}X^2-3\binom{6}{3}X^3-10\binom{6}{4}X^4-5\binom{6}{5}X^5\right).
\end{aligned}
$$

対応する予想式は

$$
180T(1,7)+90T(2,6)+28T(3,5)-3T(4,4)-10T(5,3)-5T(6,2)=0
$$

で，実験的には極めて確からしい．

参考文献

[1] K. Aomoto, Special values of hyperlogarithms and linear difference schemes, Illinois J. of Math. **34-2** (1990), 191–216.

[2] T. Arakawa and M. Kaneko, Multiple zeta values, poly-Bernoulli numbers, and related zeta functions, Nagoya Math. J., **153** (1999), 189–209.

[3] T. Arakawa and M. Kaneko, On multiple L-values, J. Math. Soc. Japan **56** (2004), 967–991.

[4] V. G. Drinfel'd, On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, Leningrad Math. J. **2** (1991), 829–860.

[5] R. C. Entringer, A combinatorial interpretation of the Euler and Bernoulli numbers, Nieuw Arch. Wisk. (3) **14** (1966), 241–246.

[6] S. Fukuhara and Y. Yang, Period polynomials and explicit formulas for Hecke operators on $\Gamma_0(2)$. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **146** (2009), no. 2, 321–350.

[7] S. Fukuhara and Y. Yang, A basis for $S_k(\Gamma_0(4))$ and representations of integers as sums of squares, Ramanujan J. **28** (2012), no. 1, 25–43.

[8] H. Gangl, M. Kaneko, and D. Zagier, Double zeta values and modular forms, *Automorphic Forms and Zeta Functions*, S. Böcherer et. al. (eds.), World Scientific, Singapore, (2006), 71–106.

[9] M. Hirose, Colored double zeta values and modular forms of general level, preprint, arXiv:2205.08507 [math.NT] 17 May 2022.

[10] M. Kaneko and H. Tsumura, Zeta functions connecting multiple zeta values and poly-Bernoulli numbers, Adv. Stud. Pure Math. **84**, 2020, pp. 181–204.

[11] M. Kaneko and H. Tsumura, On multiple zeta values of level two, Tsukuba J. Math. **44** (2020), 213–234.

[12] M. Kaneko and H. Tsumura, Multiple L-values of level four, poly-Euler numbers, and related zeta functions, preprint, arXiv:2208.05146 [math.NT] 10 Aug 2022.

[13] R. P. Stanley, A survey of alternating permutations, Combinatorics and graphs, 165–196, Contemp. Math., 531, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2010).