# Young のゼータ関数と多重ゼータ値について

東北学院大学　佐々木義卓

Yoshitaka Sasaki
Faculty of Engineering,
Tohoku Gakuin University

## 1　序

Young [13] は, 関数

$$S_{j,r}(s,a) := \sum_{m=j}^{\infty} \frac{R_1(m,j;r)}{m!(m+a)^s} \tag{1.1}$$

を導入し, これが双対性

$$S_{j,r}(k+1,1-t) = S_{k,t}(j+1,1-r) \tag{1.2}$$

を満たすことを示した. ここで, $R_1(m,j;r)$ は重み付きの Stirling 数である (詳細は後述するが, Young とは重み付き Stirling 数の定義が若干異なる. そのため, (1.1) も Young の元々の定義とはスタイルが異なる). また, Young は $S_{j,r}$ が多重 Bernoulli 数と類似した性質を持つことも指摘している. この Young による考察をよく理解するために, まずは多重 Bernoulli 数についてまとめよう.

多重 Bernoulli 数 $B_n^{(k)}$, $C_n^{(k)}$ は, ポリログ $\mathrm{Li}_k(x) := \sum_{n=1}^{\infty} x^n/n^k$ ($k \in \mathbb{Z}$, $|z| < 1$) を用いて Bernoulli 数を拡張したものであり, それぞれ

$$\frac{\mathrm{Li}_k(1-e^{-t})}{1-e^{-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n^{(k)}}{n!} t^n, \qquad \frac{\mathrm{Li}_k(1-e^{-t})}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n^{(k)}}{n!} t^n$$

で定義される (金子 [7], 荒川・金子 [2]). 実際, $k=1$ のときは $\mathrm{Li}_1(x) = -\log(1-x)$ より, 上式の左辺はいずれも Bernoulli 数の母関数

$$\frac{te^t}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n, \qquad \frac{t}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{n!} t^n$$

となるため, 多重 Bernoulli 数が Bernoulli 数の拡張となっていることがわかる ($B_1 = -C_1 = 1/2$, $B_n = C_n$ ($n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \setminus \{1\}$)). この 2 種類の多重 Bernoulli 数は同種の性質を有しており (cf. [7, 3, 1, 8]), ここでは $S_{j,r}$ との対応を見るために, 以下の 2 つに着目する：

(i) 明示式：

$$B_n^{(k)} = (-1)^n \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m m! \left\{ {n \atop m} \right\}}{(m+1)^k}, \tag{1.3a}$$

$$C_n^{(k)} = (-1)^n \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m m! \left\{ {n+1 \atop m+1} \right\}}{(m+1)^k}. \tag{1.3b}$$

ここで, $\left\{ {n \atop m} \right\}$ は第 2 種 Stirling 数 (unsigned) である.

(ii) 双対公式：$k, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$$B_n^{(-k)} = B_k^{(-n)}, \tag{1.4a}$$

$$C_n^{(-k-1)} = C_k^{(-n-1)}. \tag{1.4b}$$

この 2 つの多重 Bernoulli 数を統一的に扱える枠組みとして, 次に述べる 2 変数の "多重 Bernoulli 多項式" $B_n^{(k)}(y,a)$, および "重み付き Stirling 数" がある.

**定義 1.1** (2 変数の多重 Bernoulli 多項式 (cf. Young [13])). 2 変数の多重 Bernoulli 多項式 $B_n^{(k)}(y,a)$ を次で定義する:

$$e^{(y-1)t}\Phi(1-e^{-t}, k, a) = \sum_{n \geq 0} \frac{B_n^{(k)}(y,a)}{n!} t^n.$$

ここで,

$$\Phi(z,s,a) := \sum_{m \geq 0} \frac{z^m}{(m+a)^s} = \frac{1}{z} \sum_{m \geq 0} \frac{z^{m+1}}{(m+a)^s}.$$

母関数より, $B_n^{(k)}(1,1) = B_n^{(k)}$, $B_n^{(k)}(0,1) = C_n^{(k)}$ がわかる. 通常, $a = 1$ の場合を多重 Bernoulli 多項式と呼んでおり, $B_n^{(k)}(y)$ と表す (ここでは大野・若林 [10] による多重 Bernoulli 多項式の表示を用いるが, $B_n^{(k)}(1-y)$ を多重 Bernoulli 多項式と定義する場合もある ([6])). 後述するが, この追加されたパラメータ $a$ が双対公式を考える上ではとても重要な要素となる. また, Young [13] の定義とはパラメータ $y$ の取り方を変えている. これは, 後述する $B_n^{(k)}(y,a)$ の双対公式を綺麗に表現するためである.

**定義 1.2** (重み付き Stirling 数 (Carlitz [5])). 第 1 種, 第 2 種の重み付き Stirling 数 $R_1(n,k;\lambda)$, $R(n,k;\lambda)$ を次で定義する:

$$(1-x)^{-\lambda} \frac{(-\log(1-x))^k}{k!} = \sum_{n \geq k} R_1(n,k,\lambda) \frac{x^n}{n!}, \tag{1.5a}$$

$$e^{\lambda x} \frac{(e^x-1)^k}{k!} = \sum_{n \geq k} R(n,k,\lambda) \frac{x^n}{n!}. \tag{1.5b}$$

Carlitz [5] は, ある種の “重み”の概念を導入して Stirling 数を拡張する中で上記の $R_1$, $R$ を導入しており, 最初から (1.5) のような母関数で導入していたわけではないことに注意されたい. また, この重み付き Stirling 数は, Broder [4] によって導入された $r$-Stirling 数と同じものである ($\lambda = r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$). 従来の Stirling 数との対応関係は,

$$\begin{aligned} R_1(n,k;0) &= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}, & R(n,k;0) &= \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}, \\ R_1(n,k;1) &= \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix}, & R(n,k;1) &= \begin{Bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

となっている. Young は, これらを用いることで次を示している:

**定理 1.3** (Young [13]). (i) 明示式 :

$$B_n^{(k)}(y,a) = (-1)^n \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m m! R(n,m;1-y)}{(m+a)^k}. \tag{1.6}$$

(ii) 双対公式 : $n, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,

$$B_n^{(-k)}(y,a) = B_k^{(-n)}(a,y). \tag{1.7}$$

多重 Bernoulli 数の明示式, 双対公式と上定理との対応関係を見ていこう. 明示式に関しては, (1.3) における Stirling 数の部分の差異が, 重み付き Stirling 数によって統一化されている. また双対公式は, 1 変数の多重 Bernoulli 多項式 $B_n^{(k)}(y)$ では, $n \leftrightarrow$“$y$ の多項式としての次数” という対応であるため, パラメータ $y$ だけでは $n \leftrightarrow k$ の双対的関係が自然には望めないところに, 新たなパラメータ $a$ を追加することで $n \leftrightarrow k$, $y \leftrightarrow a$ という綺麗な双対性を実現している. しかしながら, この双対公式 (1.7) から, 従来の多重 Bernoulli 数の双対性を直接的に導出することは簡単ではないようである. 例えば, $C$ 型の多重 Bernoulli 数の双対公式 (1.4b) を (1.7) から導こうとすると,

$$B_n^{(-k)}(0,1) = B_k^{(-n)}(1,0)$$

の左辺は $C_n^{(-k)}$ そのものであるが, 右辺が $C_{k-1}^{(-n-1)}$ であるとすぐにわかるだろうか. 新たなパラメータ $a$ を追加したことによって, $a \neq 1$ のときの多重 Bernoulli 多項式 $B_n^{(k)}(y,a)$ と, 従来の 1 変数の多重 Bernoulli 数 $B_n^{(k)}(y)$ の関係, とりわけ双対公式を “すっきりと”理解できるような関係を構築する必要が出てきたと言える. その方法を知りたいというのが, 筆者が Young の研究に興味を抱くきっかけの一つであった. 実際に, この双対公式から $C$ 型の多重 Bernoulli 数の双対公式を “すっきりと”導く方法がある.

次に, (1.1), (1.2) と (1.6), (1.7) をそれぞれ見比べてみよう. そうすると, これらが同じ構造を持っていることがわかる. Young が導入した関数 $S_{j,r}$ からは多重ゼータ値との関係が全く感じられないが, よくよく観察すると, 驚くことに多重ゼータ値と深く関係する多重 Bernoulli 数のアナロジーになっているのである. となれば, $S_{j,r}$ をもっと詳しく解析したくなる. 本稿の目的は, 我々がよく知っている多重ゼータ関数の枠組みで, この不思議な関数 $S_{j,r}$ を理解することである. 次節以降では, Young が導入した関数のココロを紐解き, とりわけ $S_{j,r}$ の双対性が多重ゼータ値の双対性とどういう関係にあるのかを議論することにする.

## 2　Youngの関数

Youngは, Barnesゼータ関数

$$\zeta_r(s,a) := \sum_{n_1,\dots,n_r=0}^{\infty} \frac{1}{(a+n_1+\cdots+n_r)^s} \qquad (\Re(s)>r,\ \Re(a)>0)$$

の $r$ についての導関数として冒頭の関数 (1.1) の導入に至っている ([12]). ここで, $r$ は何重級数なのかを表しているため, 積分表示

$$\zeta_r(s,a) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \frac{e^{-at}}{(1-e^{-t})^r}\, dt$$

を通じて $r$ についての導関数を導入している:

$$S_{j,r}(s,a) := \frac{1}{j!} \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^j \zeta_r(s,a).$$

さて, Youngがどのように関数 $S_{j,r}$ を導入したのかを見た上で, $S_{j,r}$ を我々がよく知っている言葉に翻訳していこう. まずは, 多重ポリログを導入する:

$$\mathrm{Li}_{k_1,\dots,k_r}(z) := \sum_{0<m_1<\cdots<m_r} \frac{z^{m_r}}{m_1^{k_1}\dots m_r^{k_r}}.$$

特に, $\mathrm{Li}_{\{1\}^r}(z) := \mathrm{Li}_{\underbrace{1,\dots,1}_{r}}(z) = (-\log(1-z))^r/r!$ に注意する. 多重ポリログを使って, $S_{j,r}$ を次のように書き換えてみる:

$$\begin{aligned} S_{j,r}(s,r) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} e^{-at} \frac{(-\log(1-e^{-t}))^j}{j!(1-e^{-t})^r}\, dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} e^{-at} \frac{\mathrm{Li}_{\{1\}^j}(e^{-t})}{(1-e^{-t})^r}\, dt. \end{aligned}$$

この表示により, (1.1) ではよくわからなかった $S_{j,r}$ は, 実は多重ゼータ関数の積分表示 ([2])

$$\zeta_r(k_1,\dots,k_{r-1},s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \frac{\mathrm{Li}_{k_1,\dots,k_{r-1}}(e^{-t})}{e^t-1}\, dt$$

と同種の構造を持つ関数なのであって, 多重ゼータ関数の枠組みで扱って然るべき対象だということがわかる. であれば, 次は $S_{j,r}$ の双対性が多重ゼータ値の双対性とどういう対応関係にあるのかは気になるところである. 次節では, $S_{j,r}$ の受け皿となる多重ゼータ関数を導入し, その多重ゼータ関数の性質から $S_{j,r}$ の双対性が従来の多重ゼータ値でどのように表現できるのかを議論する.

## 3　多重ゼータ関数

まず, 従来の多重ゼータ関数 $\zeta(s_1,\dots,s_r)$ についてまとめておく．これは,

$$\zeta(s_1,\dots,s_r):=\sum_{0<m_1<\cdots<m_r}\frac{1}{m_1^{s_1}\cdots m_r^{s_r}}$$

で定義され, 領域

$$\left\{(s_1,\dots,s_r)\in\mathbb{C}^r \;\middle|\; \sum_{i=1}^{j}\Re s_{r-i+1}>j\ (j=1,\dots,r)\right\}$$

で絶対収束する ([9]). 次に多重ゼータ関数と Barnes ゼータ関数をミックスしたような多重ゼータ関数を導入しよう.

**定義 3.1.** 変数 $s_i,\ s\in\mathbb{C}\ (i=1,\dots,j)$, $a\in\mathbb{R}_{>-j}$ に対して,

$$\zeta_{j,r}(s_1,\dots,s_j;s,a):=\sum_{\substack{0<m_1<\cdots<m_j\\ n_1,\dots,n_r\geq 0}}\frac{1}{m_1^{s_1}\cdots m_j^{s_j}(a+m_j+n_1+\cdots+n_r)^s}. \tag{3.1}$$

実際に, $\zeta_{0,r}(\varnothing;s,a):=\zeta_r(s,a)$ (Barnes ゼータ関数),

$$\zeta_{j,0}(s_1,\dots,s_j;s,0)=\zeta(s_1,\dots,s_{j-1},s_j+s),$$
$$\zeta_{j,1}(s_1,\dots,s_j;s,1)=\zeta(s_1,\dots,s_j,s)$$

となり, 多重ゼータ関数と Barnes ゼータ関数の両方を内包していることがわかる．また, $\zeta_{j,r}$ は多重 Hurwitz ゼータ関数を特殊化した関数としてみなすことも可能であるため, 領域

$$\left\{(s_1,\dots,s_j,s)\in\mathbb{C}^{j+1} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{t}\Re s_{j-t+1}+\Re s>r+t\ (t=0,1,\dots,j)\right\}$$

で絶対収束する ([9]).

この多重ゼータ関数は, 以下のような積分表示をもつ:

**定理 3.2** (佐々木 [11])**.** $(k_1,\dots,k_j)\in\mathbb{N}^j$, $\Re(s)>r$, $a>-j$ に対して,

$$\zeta_{j,r}(k_1,\dots,k_j;s,a)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\frac{e^{-at}}{(1-e^{-t})^r}\operatorname{Li}_{k_1,\dots,k_j}(e^{-t})\,dt.$$

したがって, Young が導入した関数は $\zeta_{j,r}$ の特別な場合

$$S_{j,r}(s,a)=\zeta_{j,r}(\{1\}^j;s,a)\quad(r\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$$

として理解され, 特に双対性 (1.2) は, 以下のように表現できる:

**定理 3.3** (双対性 (Young [13], 佐々木 [11]))**.** $j,k,a,r \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ j+1 > a,\ k+1 > r$ に対して,

$$\zeta_{j,r}(\{1\}^j; k+1, 1-a) = \zeta_{k,a}(\{1\}^k; j+1, 1-r).$$

多重ゼータ関数 (3.1) の観点から Young の双対公式を見直すと, 多重ゼータ部分の深さと Barnes ゼータ部分の (ある種の) 重さの双対性を表現していると捉えることができるだろう. 次に, この双対性が従来の多重ゼータ値の双対性とどのような対応関係にあるのか, 実際に $\zeta_{j,r}$ を多重ゼータ値で書き表して見てみよう. 詳細は割愛するが, $\zeta_{j,r}$ の反復積分表示などを使って計算することで, 以下のような多重ゼータ値での表示を得ることができる.

**例 3.4.** (i) $a=1,\ r=0$ のとき：

$$\zeta(\{1\}^{j-1}, k+2) = \zeta(\{1\}^k, j+1).$$

この場合は, 高さ 1 の多重ゼータ値の双対公式を表している.

(ii) $a=r=1$ のとき：

$$\zeta(\{1\}^{j-1}, k+2) + \zeta(\{1\}^j, k+1) = \zeta(\{1\}^{k-1}, j+2) + \zeta(\{1\}^k, j+1).$$

この場合は高さ 1 の多重ゼータ値の双対公式の和を表している.

(iii) $r=a=0$ のとき：

$$\sum_{p=0}^{k-1}\sum_{q=0}^{j-1}\binom{p+q}{p}\zeta(\{1\}^{j-q-1}, k-p+1) = \sum_{p=0}^{j-1}\sum_{q=0}^{k-1}\binom{p+q}{q}\zeta(\{1\}^{k-q-1}, j-p+1)$$

この場合も高さ 1 の多重ゼータ値の双対公式の和を表しているが, $a=r=1$ の場合と違って, 両辺とも重さが異なる多重ゼータ値の和となっていることに注意されたい.

(iv) $r=a=2$ のとき：

$$\begin{aligned}
&\zeta(\{1\}^j, 0, k+1) + \zeta(\{1\}^j, k+1) + (-1)^k\zeta(\{1\}^{j-2}, 2)\\
&\quad + \sum_{p=0}^{k-1}(-1)^p\Big\{\zeta(\{1\}^{j-1}, k+1-p) + \zeta(\{1\}^{j-2}, k+2-p)\Big\}\\
&= \zeta(\{1\}^k, 0, j+1) + \zeta(\{1\}^k, j+1) + (-1)^j\zeta(\{1\}^{k-2}, 2)\\
&\quad + \sum_{p=0}^{j-1}(-1)^p\Big\{\zeta(\{1\}^{k-1}, j+1-p) + \zeta(\{1\}^{k-2}, j+2-p)\Big\}
\end{aligned}$$

この場合は, 両辺の先頭項にインデックスに 0 を含んだ多重ゼータ値がいることに注目されたい. これらは絶対収束領域における多重ゼータ関数の特殊値であるが, 従来の多重ゼータ値の双対性の枠組みには含まれていない対象である.

以上の例から, Young が見出した双対性は, 重さの異なる多重ゼータ値の和であったり, インデックスに 0 を含んだ多重ゼータ値などの双対性を表していると捉えられるのだろう.

## 4 終わりに

最後に, $\zeta_{j,r}(\mathbf{k};s,a)$ について述べる. 関数 $\zeta_{j,r}(\mathbf{k};s,a)$ の導入は, Young の関数 $S_{j,r}$ の受け皿としての役割を担っていたが, $S_{j,r}$ の双対性の証明にも有効性を発揮する. 実際に, $\zeta_{j,r}$ の積分表示で変数変換を通じて証明することができる. また, 荒川・金子 [2] によって導入されたゼータ関数

$$\xi(k_1\ldots,k_r;s) := \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\frac{\mathrm{Li}_{k_1,\ldots,k_r}(1-e^{-t})}{1-e^{-t}}\,dt$$

が多重ゼータ値の研究で重要な役割を担ったように, 今回新たに導入した多重ゼータ関数 $\zeta_{j,r}$ は, 荒川・金子のゼータ関数の類似物

$$\xi_{j,r}(k_1,\ldots,k_r;s,a) := \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\frac{e^{-at}}{(1-e^{-t})^r}\,\mathrm{Li}_{k_1,\ldots,k_r}(1-e^{-t})\,dt$$

への興味を自然に抱かせる. この関数についてもすでにいろいろ計算しており, 実際に荒川・金子のゼータ関数と同種の性質を満たすことが確認できている.

### 謝辞

今回, 講演の機会を与えて下さった研究代表者である田坂浩二氏に感謝申し上げます.

## 参考文献


[1] T. Arakawa, T. Ibukiyama and M. Kaneko, Bernoulli Numbers and Zeta Functions, Springer, Tokyo, 2014.

[2] T. Arakawa and M. Kaneko, *Multiple zeta values, poly-Bernoulli numbers, and related zeta functions*, Nagoya Math. J., **153** (1999), 189–209.

[3] T. Arakawa and M. Kaneko, On poly-Bernoulli numbers, Comment. Math. Univ. St. Paul., **48**, 159–167 (1999).

[4] A. Z. Broder, *The r-Stirling numbers*, Discrete Math. **49** (1984), 241–259.

[5] L. Carlitz, *Weighted Stirling numbers of the first and second kind-I*, Fibonacci Quart. **18** (1980), 147–162.

[6] M.-A. Coppo and B. Candelpergher, *The Arakawa-Kaneko zeta function*, Ramanujan J. **22** (2010), 153–162.

[7] M. Kaneko, *Poly-Bernoulli numbers*, J. Th. Nombre Bordeaux, **9** (1997), 199–206.

[8] M. Kaneko, A note on poly-Bernoulli numbers and multiple zeta values, Diophantine analysis and related fields–DARF 2007/2008, 118–124, AIP Conf. Proc., 976, Amer. Inst. Phys., Melville, NY, 2008.

[9] K. Matsumoto, *On the analytic continuation of various multiple zeta-functions*, Number Theory for the Millennium II, Proc. Millennial Conf. on Number Theory (M. A. Bennett et al., eds.), A K Peters (2002), pp. 417–440.

[10] Y. Ohno and N. Wakabayashi, *On basic properties of poly-Bernoulli polynomials*, preprint.

[11] Y. Sasaki, *On Young's zeta-function*, in preparation.

[12] P. Young, *Symmetries of Bernoulli polynomial series and Arakawa-Kaneko zeta functions*, J. Number Theory **143** (2014), 142–161.

[13] P. Young, *Symmetries of Stirling number series*, Fibonacci Quart. **52** (2014), 205–211.

Faculty of Engineering,
Tohoku Gakuin University,
1-13-1, chuo, Tagajo, Miyagi 985-8567, Japan.

*E-mail address*: ysasaki@mail.tohoku-gakuin.ac.jp