ある種の山辺ソリトンとその一般化に対する分類について

前田　瞬　　(千葉大学　教育学部数学科)*1
Shun Maeta　(Department of Mathematics, Faculty of Education, Chiba University)

概　　要

R. S. Hamilton は 1980 年代に山辺フローの概念を導入した．勾配山辺ソリトンはこの自己相似解として現れる．勾配山辺ソリトンは田代らにより研究されてきた concircular field をもつリーマン多様体の特別なものと見ることができる．本要約では，非自明な concircular field をもつ 3 次元完備リーマン多様体の分類，特に，非自明な 3 次元完備勾配山辺ソリトンの分類を紹介する．また，部分多様体としてのある種の山辺ソリトンの一般化に対して得られた結果を述べる．

本要約において，(M, g) とはリーマン多様体を表す．

1. 山辺ソリトンについて

まずは，山辺ソリトンの定義を述べる．

定義 1.1 ([12]). M 上の完備ベクトル場 X，$\lambda \in \mathbb{R}$ に対して，

$$Rg + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \lambda g$$

を満たすとき，(M, g, X) を山辺ソリトンと呼ぶ．ここで，R は M のスカラー曲率，$\mathcal{L}_X g$ は g の X によるリー微分を表す．$\lambda > 0$, $= 0$, < 0 となるとき，縮小，安定，拡大という．M 上の滑らかな関数 F を用いて，$X = -\nabla F$, すなわち，

$$Rg - \nabla\nabla F = \lambda g$$

となるとき，(M, g, F) を勾配山辺ソリトンという．F が定数のとき，山辺ソリトンは自明であるという．

山辺ソリトンはリッチソリトンと類似の方程式である．

定義 1.2 ([11]). M 上の完備ベクトル場 X，$\lambda \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\mathrm{Ric} + \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g = \lambda g$$

を満たすとき，(M, g, X) をリッチソリトンと呼ぶ．ここで，Ric は M のリッチテンソルを表す．$\lambda > 0$, $= 0$, < 0 となるとき，縮小，安定，拡大という．M 上の滑らかな関数 F を用いて，$X = -\nabla F$, すなわち，

$$\mathrm{Ric} - \nabla\nabla F = \lambda g$$

本研究は科研費，若手研究 (課題番号:No.19K14534) の助成を受けたものである．
*1 〒263-8522 千葉県千葉市稲毛区弥生町１－３３
e-mail: `shun.maeta@gmail.com` *or* `shun.maeta@chiba-u.jp`
web: `https://sites.google.com/site/shunmaetahomepage/`

となるとき，(M, g, F) を勾配リッチソリトンという．F が定数のとき，リッチソリトンは自明であるという．

リッチソリトンにおいて，最も重要な問題の 1 つに次の予想がある．

予想 1.3 (Perelman [17]). 正曲率をもつ3次元完備κ非崩壊安定勾配リッチソリトンは回転対称（すなわち，*Bryant*ソリトン）になるだろう．

この予想は多くの研究者により数々の研究結果が与えられたが，最終的に Brendle [2] により肯定的に解決された．山辺ソリトンにおける Perelman 予想と類似の問題をはじめに考えたのは Daskalopoulos と Sesum である．その後，Catino-Mantegazza-Mazzieri, Cao-Sun-Zhang により研究が進められた．

定理 1.4 (Daskalopoulos-Sesum [9]). 正の断面曲率をもつ局所共形平坦完備勾配山辺ソリトンは回転対称である．

定理 1.5 (Catino-Mantegazza-Mazzieri [7]). 非正リッチテンソルを持つ完備勾配山辺ソリトンで，リッチテンソルがある 1 点で正であるとすると，回転対称である．

定理 1.6 (Cao-Sun-Zhang [6]). 正のスカラー曲率をもつ局所共形平坦完備勾配山辺ソリトンは回転対称である．

注意 1.7. なお，コンパクト勾配山辺ソリトンは自明なものしかないことが知られている ([13]).

2. 山辺ソリトンの一般化

山辺ソリトンの一般化は数多く知られている：

1. almost 山辺ソリトン (Barbosa-Ribeiro [1])
2. 勾配 k-山辺ソリトン (Catino-Mantegazza-Mazzieri [7])
3. h-almost 勾配山辺ソリトン (Zeng [20])

これらの方程式を全て含む形での一般化は Catino-Mantegazza-Mazzieri により与えられた．

定義 2.1 (Catino-Mantegazza-Mazzieri [7]). F, φ を M 上の滑らかな関数とする．(M, g, F, φ) が勾配共形ソリトンであるとは次を満たすときをいう．

$$\varphi g = \nabla\nabla F.$$

勾配共形ソリトンは田代 [19], Cheeger-Colding [5] により研究されていた．特に，田代は次の分類を与えている．

定理 2.2 (Tashiro [19]). 完備勾配共形ソリトン $(M, g, F, -kF + b)$, $(k, b \in \mathbb{R})$ は次の 5 つのみである．

1 直積 $\mathbb{R} \times N$, ここで，N は $(n-1)$ 次元完備リーマン多様体,

2 $\mathbb{E}^n$,

3 0 もしくは負の型の擬双曲空間,

4 $\mathbb{H}^n$,

5 $\mathbb{S}^n$.

著者は非自明な完備勾配共形ソリトンの分類定理を与えた．

定理 2.3 ([16])**.** 非自明な完備勾配共形ソリトン (M^n, g, F, φ)

$$\varphi g = \nabla\nabla F$$

は次のいずれかとなる．

(1) コンパクトかつ回転対称，

(2) 回転対称であり，次のワープ積となる：

$$([0,\infty), dr^2) \times_{|\nabla F|} (\mathbb{S}^{n-1}, \bar{g}_S),$$

(3) 次のワープ積となる：

$$(\mathbb{R}, dr^2) \times_{|\nabla F|} \left(N^{n-1}, \bar{g}\right),$$

かつ次を満たす

$$|\nabla F|^2 R = \bar{R} - (n-1)(n-2)\varphi^2 - 2(n-1)g(\nabla F, \nabla\varphi).$$

この定理を証明するために，次の補題を示す．

補題 2.4 ([16])**.** (M, g, F, φ) を完備勾配共形ソリトンとする．$\Sigma_c = F^{-1}(c)$ を正則レベル面とすると，次が成立する．

(1) $|\nabla F|$, φ は Σ_c 上定数である．

(2) Σ_c の第二基本形式は $B_{ab} = \frac{\varphi}{|\nabla F|} g_{ab}$ とかける．

(3) 平均曲率 $H = (n-1)\frac{\varphi}{|\nabla F|}$ は Σ_c 上定数となる．

(4) F が臨界点を取らないような Σ_c の任意の近傍 $F^{-1}((\alpha,\beta))$ において，

$$g = dr^2 + \frac{(F'(r))^2}{(F'(r_0))^2}\bar{g}_{r_0}.$$

ここで，$\bar{g}_{r_0} = g_{ab}(r_0, x)dx^a dx^b$ は Σ_c 上の誘導計量で，$(x^2, \cdots, x^n)$ は Σ_c の局所座標系である．

「補題の証明の概略」

c_0 を F の正則値，$\Sigma_{c_0} = F^{-1}(c_0)$, $I(\ni c_0)$ を $U_I = F^{-1}(I)$ $(\subset \Sigma_{c_0})$ 内で F が臨界点を持たない区間とする．このとき，

$$g = \frac{1}{|\nabla F|^2}dF^2 + \overline{g}_{\Sigma_{c_0}} = \frac{1}{|\nabla F|^2}dF^2 + g_{ab}(F,x)dx^a dx^b.$$

ここで，

$$\nabla(|\nabla F|^2) = 2\nabla\nabla F \nabla F = 2\varphi g(\nabla F, \cdot).$$

$r = \displaystyle\int \frac{dF}{|\nabla F|}$ とおくと，次を得る．

$$g = dr^2 + g_{ab}(r,x)dx^a dx^b,$$

$$\nabla F = F'(r)\partial_1\,(= F'(r)\partial_r).$$

また，一般性を失うことなく，$F' > 0$ としてよい．ソリトン方程式より

$$F''(r) = \varphi,$$

であるので，φ は Σ_c 上で定数である．$F^{-1}(c_0)$ における部分多様体の知識より

$$B_{ab} = \frac{F''(r)}{F'(r)}g_{ab} = \frac{\varphi}{F'(r)}g_{ab}$$

なので，$H = (n-1)\frac{\varphi}{F'(r)}$ は定数となる．また，第 2 基本形式は

$$B_{ab} = g(\partial_1, -\nabla_a\partial_b) = \frac{1}{2}\partial_1 g_{ab}$$

とかける．以上より，

$$\partial_1 g_{ab} = 2\frac{F''(r)}{F'(r)}g_{ab}.$$

従って，

$$g_{ab}(r,x) = \left(\frac{F'(r)}{F'(r_0)}\right)^2 g_{ab}(r_0,x).$$

□

この補題を用いて定理 2.3 を証明する．

「定理 2.3 の証明の概略」

$N = F^{-1}(c_0), \overline{g} = (F'(r_0))^{-2}\,\overline{g}_{r_0}$ とおく．このとき，補題の議論より起こりうるのは次の 3 つである．

(1) $I = [\alpha_0, \beta_0]$ で，$F'(\alpha_0) = F'(\beta_0) = 0,$

(2) $I = [0, \infty)$ で $F'(0) = 0,$

(3) $I = (-\infty, \infty).$

(1) のとき：
コンパクトかつ回転対称であることが知られている．
(2) のとき：
F はただ 1 つの臨界点 x_0 を持つので， $r(x) = \mathrm{dist}(x, x_0)$. よって，$\Sigma_c = \{F(x) = c\} \cong \mathbb{S}^{n-1}(x_0)$ となる．
(3) $I = (-\infty, \infty)$ のとき：
$a, b, c, d = 2, 3, \cdots, n$ に対して次を得る．

$$R_{1a1b} = -F'F'''\overline{g}_{ab}, \quad R_{1abc} = 0,$$
$$R_{abcd} = (F')^2\bar{R}_{abcd} + (F'F'')^2(\overline{g}_{ad}\overline{g}_{bc} - \overline{g}_{ac}\overline{g}_{bd}),$$

$$\begin{aligned} R_{11} =& -(n-1)\frac{F'''}{F'}, \quad R_{1a}=0, \\ R_{ab} =& \bar{R}_{ab} - ((n-2)(F'')^2 + F'F''')\bar{g}_{ab}, \end{aligned}$$

$$R = (F')^{-2}\bar{R} - (n-1)(n-2)\Big(\frac{F''}{F'}\Big)^2 - 2(n-1)\frac{F'''}{F'}.$$

□

2.1. 回転対称性

定理2.3より，完備勾配共形ソリトンが回転対称であることを示すには定理2.3の(3)の場合のみ考えればよいことがわかる．ここでは，定理2.3を用いて，勾配共形ソリトンが回転対称となる結果を述べる．

I. 3次元山辺ソリトン

まずは，Cao-Sun-Zhang により与えられた，3次元山辺ソリトンが回転対称であることを示す．

系 2.5 (Cao-Sun-Zhang [6]). 非自明，非平坦な3次元完備勾配山辺ソリトン

$$(R-\lambda)g = \nabla\nabla F$$

で $R \geq 0$ は回転対称となる．

「証明の概略」

$$R = (F')^{-2}\bar{R} - (n-1)(n-2)\Big(\frac{F''}{F'}\Big)^2 - 2(n-1)\frac{F'''}{F'}$$

とソリトン方程式 $R-\lambda = F''$ より，N^2 の曲率 $\bar{R}(>0)$ は定数となる． □

II. 局所的共形平坦

M が局所的共形平坦であるとは，次を満たすことをいう．$\dim M = 3$ のとき，$C \equiv 0$，$\dim M \geq 4$ のとき $W \equiv 0$．ここで，C はコットンテンソルであり，次式で定義される．

$$C_{ijk} = \nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} - \frac{1}{2(n-1)}(g_{jk}\nabla_i R - g_{ik}\nabla_j R).$$

また，W はワイルテンソルであり，次式で定義される．

$$\begin{aligned} W_{ijk\ell} =& R_{ijk\ell} - \frac{1}{n-2}(R_{ik}g_{j\ell} + R_{j\ell}g_{ik} - R_{i\ell}g_{jk} - R_{jk}g_{i\ell}) \\ &+ \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{ik}g_{j\ell} - g_{i\ell}g_{jk}). \end{aligned}$$

命題 2.6 ([16]). 非自明，非平坦な局所的共形平坦完備勾配共形ソリトンで $R \geq 0$ を満たすものは回転対称となる．

「証明の概略」
定理2.3の(3)の場合のみ考えればよい．Mは

$$(\mathbb{R}, dr^2) \times_{|\nabla F|} \left(N^{n-1}, \bar{g}\right)$$

であり，$a, b, c, d = 2, 3, \cdots, n$に対して次を得ている：

$$\begin{aligned}
R_{1a1b} &= -F'F'''\bar{g}_{ab}, \quad R_{1abc} = 0,\\
R_{abcd} &= (F')^2\bar{R}_{abcd} + (F'F'')^2(\bar{g}_{ad}\bar{g}_{bc} - \bar{g}_{ac}\bar{g}_{bd}),\\
R_{11} &= -(n-1)\frac{F'''}{F'}, \quad R_{1a} = 0,\\
R_{ab} &= \bar{R}_{ab} - ((n-2)(F'')^2 + F'F''')\bar{g}_{ab},\\
R &= (F')^{-2}\bar{R} - (n-1)(n-2)\left(\frac{F''}{F'}\right)^2 - 2(n-1)\frac{F'''}{F'}.
\end{aligned}$$

$\dim M = 3$のとき，

$$\begin{aligned}
C_{1a1} &= \nabla_1 R_{a1} - \nabla_a R_{11} - \frac{1}{4}(g_{a1}\nabla_1 R - g_{11}\nabla_a R)\\
&= \frac{1}{4}\nabla_a R.
\end{aligned}$$

よって，Nのスカラー曲率$\bar{R}$は定数である．

$\dim M \geq 4$のとき，ワイルテンソルWの定義より次を得る．

$$\begin{aligned}
W_{1a1b} &= -\frac{\bar{R}_{ab}}{n-2} + \frac{\bar{R}}{(n-1)(n-2)}\bar{g}_{ab}, \qquad W_{1abc} = 0,\\
W_{abcd} &= (F')^2\Bigg(\bar{W}_{abcd}\\
&\quad + \frac{1}{(n-2)(n-3)}\left\{\frac{2}{n-1}\bar{R}(\bar{g}_{ad}\bar{g}_{bc} - \bar{g}_{ac}\bar{g}_{bd})\right.\\
&\qquad \left. - (\bar{R}_{ad}\bar{g}_{bc} + \bar{R}_{bc}\bar{g}_{ad} - \bar{R}_{ac}\bar{g}_{bd} - \bar{R}_{bd}\bar{g}_{ac})\right\}\Bigg).
\end{aligned}$$

今，$W \equiv 0$より，

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{ab} &= \frac{\bar{R}}{n-1}\bar{g}_{ab},\\
\bar{W}_{abcd} &= -\frac{1}{(n-2)(n-3)}\left\{\frac{2}{n-1}\bar{R}(\bar{g}_{ad}\bar{g}_{bc} - \bar{g}_{ac}\bar{g}_{bd})\right.\\
&\qquad \left. - (\bar{R}_{ad}\bar{g}_{bc} + \bar{R}_{bc}\bar{g}_{ad} - \bar{R}_{ac}\bar{g}_{bd} - \bar{R}_{bd}\bar{g}_{ac})\right\}.
\end{aligned}$$

以上より，

$$\bar{R}_{ab} = \frac{\bar{R}}{n-1}\bar{g}_{ab}, \qquad \bar{W}_{abcd} = 0.$$

よって，N はアインシュタイン多様体であり，かつ，局所共形平坦である．従って，N は空間形である．

III. Cao-Chen テンソル

Cao-Chen はリッチソリトンに対して次の定義を導入した．

定義 2.7 ([3], [4])**.**

$$\begin{aligned} D_{ijk} =& \frac{1}{n-2}(R_{kj}\nabla_i F - R_{ki}\nabla_j F) \\ &+ \frac{1}{(n-1)(n-2)}(R_{it}g_{jk}\nabla_t F - R_{jt}g_{ik}\nabla_t F) \\ &- \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{kj}\nabla_i F - g_{ki}\nabla_j F). \end{aligned}$$

これを *Cao-Chen*テンソルという．

これをそのまま勾配共形ソリトンに対して定義する．

定理 2.8 ([16])**.** 非自明な完備勾配共形ソリトン (M^n, g, F, φ) で F が臨界点を持たないとする．*Cao-Chen*テンソルが消えているとき，M は次のワープ積となる．

$$(\mathbb{R}, dr^2) \times_{|\nabla F|} \left(N^{n-1}_{Ein}, \bar{g}\right).$$

ただし，N_{Ein} はアインシュタイン多様体である．

「証明の概略」

$$\begin{aligned} D_{1ab} =& \frac{1}{n-2}R_{ba}\nabla_1 F + \frac{1}{(n-1)(n-2)}R_{11}g_{ab}\nabla_1 F \\ &- \frac{R}{(n-1)(n-2)}g_{ba}\nabla_1 F. \end{aligned}$$

これより，

$$R_{ab} = \frac{R - R_{11}}{n-1}g_{ab}.$$

これと定理2.3で得られている結果

$$\begin{aligned} R_{11} =& -(n-1)\frac{F'''}{F'}, \quad R_{ab} = \bar{R}_{ab} - ((n-2)(F'')^2 + F'F''')\bar{g}_{ab}, \\ R =& (F')^{-2}\bar{R} - (n-1)(n-2)\left(\frac{F''}{F'}\right)^2 - 2(n-1)\frac{F'''}{F'}, \end{aligned}$$

を用いると

$$\bar{R}_{ab} = \frac{\bar{R}}{n-1}\bar{g}_{ab}.$$

$\square$

3次元以下のアインシュタイン多様体は空間形より，次の結果を得る．

系 2.9 ([16])**.** 非自明，非平坦な完備勾配共形ソリトン (M^n, g, F, φ) $(n \leq 4)$ で $D \equiv 0$ と $R \geq 0$ を満たすものは回転対称となる．

2.2. 負曲率を許容する場合

次に，負曲率を許容する場合を考える．特に，$\mathrm{Ric}(\nabla F, \nabla F) \leq 0$ を満たす場合を考える．以下，勾配山辺ソリトン

$$(R-\lambda)g = \nabla\nabla F$$

を考える．

まず，M が拡大の場合を考える．

命題 2.10 ([15])**.** 非自明，非平坦な3次元完備拡大勾配山辺ソリトン (M^3, g, F) で F が臨界点を持たないとする．また，次を満たすとする．

$$\mathrm{Ric}(\nabla F, \nabla F) \leq 0, \quad \mathrm{Ric} \geq -c.$$

このとき，$R \leq \lambda$ であれば，$|\nabla F|$ が定数であり，M は

$$(\mathbb{R}, dr^2) \times \left(\mathbb{H}^2\left(\frac{1}{2}\lambda|\nabla F|^2\right), \bar{g}\right)$$

と等長となる．

「証明の概略」

$u := \lambda - R$ に対して，次を得る．

$$\Delta u \geq \frac{1}{n-1}u^2.$$

Omori-Yau の最大値原理により，$R = \lambda$. これと定理2.3の結果を用いると求める結果を得る． □

次に，縮小及び，安定の場合を考える．

命題 2.11 ([15])**.** I. M^3 が完備縮小勾配山辺ソリトンであり，$R \geq \lambda$ かつ $\mathrm{Ric}(\nabla F, \nabla F) \leq 0$ であるならば，M は次のいずれかとなる．

(1) M^3 は回転対称であり，次のワープ積となる．

$$([0,\infty), dr^2) \times_{|\nabla F|} (\mathbb{S}^2, \bar{g}_S).$$

(2) $|\nabla F|$ は定数であり， M は次と等長である．

$$(\mathbb{R}, dr^2) \times \left(\mathbb{S}^2\left(\frac{1}{2}\lambda|\nabla F|^2\right), \bar{g}\right).$$

II. M^3 が完備安定（もしくは拡大）勾配山辺ソリトンであり，$R \geq 0$ かつ $\mathrm{Ric}(\nabla F, \nabla F) \leq 0$ とする．このとき，M は回転対称であり，次のワープ積となる．

$$([0,\infty), dr^2) \times_{|\nabla F|} (\mathbb{S}^2, \bar{g}_S).$$

「証明の概略」

定理2.3の(3)の場合を考えればよい．リッチの恒等式とソリトン方程式($R-\lambda=F''$)より，

$$(n-1)\Delta R+\frac{1}{2}g(\nabla R,\nabla F)+R(R-\lambda)=0. \tag{2.1}$$

更に，次を得る．

$$\mathrm{Ric}(\nabla F,\nabla F)=-\,(n-1)F'R'\leq 0.$$

よって，$R'\geq 0$を得る．更に，

$$\Delta R=R''+(n-1)\frac{F''}{F'}R'$$

を得る．これを(2.1)に代入して，

$$R''=-(n-1)\frac{(R-\lambda)}{F'}R'-\frac{1}{2(n-1)}F'R'-\frac{1}{n-1}R(R-\lambda).$$

このとき，次のことが分かる．

(1) Mが縮小もしくは安定のとき，$R\geq\lambda$であれば$R''\leq 0$. よって，$R\geq\lambda\geq 0$は凹関数で，定数となるので，$R=\lambda$を得る．

(2) $R\geq 0$ を満たす拡大勾配山辺ソリトンは存在しない．

(1)，(2)と定理2.3の結果を用いると，求める結果が得られる． □

命題 2.12 ([14]). 完備勾配山辺ソリトン(M,g)が次の(1)もしくは(2)のいずれかの条件を満たすとき，Mはリッチ平坦である．

(1) (M,g)は安定もしくは縮小であり，

$$\mathrm{Ric}\leq 0,\quad R\in L^p(M)\ \ (0<p<\infty).$$

(2) (M,g)は拡大であり，

$$R\leq 0,\quad R\in L^p(M)\quad (0<p<\infty),$$

かつ，ある非負関数φに対し，

$$\mathrm{Ric}\geq\varphi Rg.$$

「証明の概略」

リッチの恒等式とソリトン方程式より，

$$(n-1)\Delta R+\frac{1}{2}g(\nabla R,\nabla F)+R(R-\lambda)=0$$

を得る．これより，

$$\Delta R^2=\frac{1}{(n-1)^2}R\,\mathrm{Ric}(\nabla F,\nabla F)-\frac{2}{n-1}R^2(R-\lambda)+2|\nabla R|^2.$$

M上のカットオフ関数ηを次式で定義する．

$$\begin{cases}0\leq\eta(p)\leq 1 & (p\in M),\\ \eta(p)=1 & (p\in B_r(p_0)),\\ \eta(p)=0 & (p\notin B_{2r}(p_0)),\\ |\nabla\eta|\leq\dfrac{C}{r} & (p\in M),\quad C\text{はrによらない定数}.\end{cases} \tag{2.2}$$

ここで， $B_r(p_0)$ はM上の中心$p_0 \in M$，半径rの球である．これを用いて，積分を実行すると，積分条件の仮定より，

$$\int_M \frac{1}{(n-1)^2} R^{2a+1} \operatorname{Ric}(\nabla F, \nabla F) dv_g \\ + \int_M \frac{2\lambda}{n-1} R^{2(a+1)} dv_g + (1+4a) \int_M R^{2a} |\nabla R|^2 dv_g \leq 0, \quad (a > 0).$$

曲率の仮定から求める結果を得る． □

3. 部分多様体としての山辺ソリトン

本章の研究は島根大の藤井春哉氏，瀬古竜也氏との共同研究である．
本章では，(M, g_M)はあるリーマン多様体(N, g_N)の部分多様体とする．まず，山辺ソリトンの一般化を考える．

定義 3.1 ([10])**.** M上の完備ベクトル場X，$\varphi \in C^\infty(M)$に対して，

$$\varphi g = \frac{1}{2} \mathcal{L}_X g$$

を満たすとき，(M, g, X, φ)を共形ソリトンと呼ぶ．$X \equiv 0$のとき，Mを自明と呼ぶ．

注意 3.2. 勾配共形ソリトン

$$\varphi g = \nabla\nabla F$$

は共形ソリトンの特別な場合である．

本章では部分多様体としての共形ソリトンを考える．部分多様体の計量g_Mが(N^{n+1}, g_N)から誘導されるように，部分多様体としての共形ソリトン

$$\varphi g = \frac{1}{2} \mathcal{L}_X g$$

のベクトル場XをN^{n+1}から導入したい．一方で，人工的な条件ではなく，自然な条件を考えたい．すなわち，Nは自然なベクトルを持つ多様体を考えたい．ユークリッド空間$\mathbb{E}^m$は自然に位置ベクトルVを持つ．そこで，ユークリッド空間内の部分多様体としての山辺ソリトンを考える．得られた結果は以下の通りである．

定理 3.3 ([18], [10])**.** $\mathbb{E}^{n+1}$内の共形ソリトン超曲面 (M^n, g, V^T, φ) は超平面，超球面もしくは *conic* 超曲面のいずれかに含まれる．ここで，V^TはVの接方向を表す．

従って，特に山辺ソリトンの完全な分類を得る．

系 3.4 ([18], [10])**.** $\mathbb{E}^{n+1}$内の山辺ソリトン超曲面 (M^n, g, V^T) は超平面，超球面もしくは *conic* 超曲面のいずれかに含まれる．

「証明の概略」

次の3つの場合を考えればよい．

(1) $V^\perp \equiv 0$,　(2) $V^\perp \neq 0$,　(3) その他

(1) の場合（$V^\perp \equiv 0$）:

$V = V^T$ であるので，Chen [8] の結果「$V = V^T$ を満たす部分多様体 M は conic である」より，conic 超曲面の一部である．

(2) の場合 ($V^\perp \neq 0$)：
共形ソリトンは次の方程式を満たす．

$$(\varphi - 1)g(X, Y) = g(A_{V^\perp}(X), Y), \quad (X, Y \in \mathfrak{X}(M)).$$

ここで，A は型作用素である．

$$A_N(e_i) = \kappa_i e_i \quad (i = 1, \cdots, n),$$

とする．ただし，$\{e_i\}_{i=1,\cdots,n}$ は M 上の正規直交系，N は単位法線ベクトル場を表す．これを上式に代入すると，

$$(\varphi - 1)g_{ij} = \kappa_i g_{ij} \lambda$$

を得る．これより，$\kappa_i = H$ である．よって，M は totally umbilical である．以上より，M は超平面もしくは超球面の一部である．

(3) の場合（その他）：
$U_0 = \{x \in M | \lambda := \langle N, V \rangle = 0\}$ とおく．Ω を $p \in M \backslash U_0$ の開近傍で常に $\lambda \neq 0$ となるものとする．このとき，(2) と同じ議論で Ω は超平面もしくは超球面に含まれることがわかる．ところが，超平面のときは矛盾を導き出せる．故に，Ω は超球面に含まれる．ここで，V の性質を用いることで，$\mathrm{Int}U_0 = \emptyset$ を示すことができる．これと (2) の議論より，$X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して $M \backslash U_0$ 上で，

$$\kappa_i = \kappa_j \quad \text{かつ} \quad X(\kappa_i) = 0$$

を得るので，κ_i は M 上で i に依存しない定数関数となる．以上より，超球面の一部となる． □

参考文献

[1] E. Barbosa and E. Ribeiro, *On conformal solutions of the Yamabe flow*, Arch. Math. **101** (2013), 79-89.

[2] S. Brendle, *Rotational symmetry of self-similar solutions to the Ricci flow*, Invent. Math. (2013) **194**, 731–764.

[3] H.-D. Cao and Q. Chen, *On locally conformally flat gradient steady Ricci solitons*, Trans. Amer. Math. Soc. **364** (2012), 2377-2391.

[4] H.-D. Cao and Q. Chen, *On Bach-flat gradient shrinking Ricci solitons*, Duke Math. J. (2013) **162**, 1149–1169.

[5] J. Cheeger and T. H. Colding, *Lower bounds on Ricci curvature and the almost rigidity of warped products,* Ann. of Math. (1996) **144**, 189–237.

[6] H.-D. Cao, X. Sun and Y. Zhang, *On the structure of gradient Yamabe solitons,* Math. Res. Lett. (2012) **19**, 767–774.

[7] G. Catino, C. Mantegazza and L. Mazzieri, *On the global structure of conformal gradient solitons with nonnegative Ricci tensor*, Commun. Contemp. Math. (2012) **14**, 12pp.

[8] B. Y. Chen *Differential geometry of rectifying submanifolds*, Int. Electron. J. Geom. **9** (2016), 1-8.

[9] P. Daskalopoulos and N. Sesum, *The classification of locally conformally flat Yamabe solitons,* Adv. Math. (2013) **240**, 346–369.

[10] S. Fujii and S. Maeta, *Classification of generalized Yamabe solitons in Euclidean spaces*, Internat. J. Math. **32** (2021), 12 pages.

[11] R. Hamilton, *Three-manifolds with positive Ricci curvature*, J. Differential Geom. (1982) **17**, 255–306.

[12] R. Hamilton, *Lectures on geometric flows*, (1989), unpublished.

[13] S. Y. Hsu, *A note on compact gradient Yamabe solitons,* J. Math. Anal. Appl. (2012) **388** (2), 725–726.

[14] S. Maeta, *Complete Yamabe solitons with finite total scalar curvature*, Diff. Geom. Appl. **66** (2019), 75–81.

[15] S. Maeta, *Three dimensional complete gradient Yamabe solitons with divergence-free Cotton tensor*, Ann. Glob. Anal. Geom. **58** (2020), 227-237.

[16] S. Maeta, *Classification of gradient conformal solitons,* arXiv:2107.05487[math DG].

[17] G. Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications,* arXiv math.DG/0211159, (2002).

[18] T. Seko and S. Maeta, *Classification of almost Yamabe solitons in Euclidean spaces*, J. Geom. Phys. **136** (2019), 97-103.

[19] Y. Tashiro, *Complete Riemannian manifolds and some vector fields*, Trans. Amer. math. Soc., **117** (1965), 251–275.

[20] F. Zeng, *On the h-almost Yamabe soliton*, J. Math. Study, **54** (2021), 371–386.