Riemann 多様体間の写像の第二基本形式から定まる積分不変量の変分問題に関する諸結果

東京都立大学大学院 理学研究科　秋山 梨佳 *
Rika Akiyama
Department of Mathematical Sciences,
Tokyo Metropolitan University

概要

本稿の目的は, 研究集会「RIMS 共同研究: 部分多様体論と幾何解析の新展開」での講演に基づき, 論文 [1] の概説を行うことである. Riemann 多様体間の写像の第二基本形式から定まる積分不変量に対し変分問題の観点から研究を行った. まず, 写像の第二基本形式から定まる積分不変量の定式化をする. 次に, 二重エネルギー汎関数を含むような積分不変量の族を構成し, この族に対し統一的に第一変分公式を導出した. さらに, この積分不変量の族に属するエネルギー汎関数の Euler–Lagrange 方程式は一般に 4 階の偏微分方程式となるが, その中でも唯一 2 階の偏微分方程式となる Chern–Federer エネルギー汎関数を見出すことができた. これらの結果について, 先行研究との比較を交えながら報告をする. また, 本稿の内容は酒井高司氏 (東京都立大学) と佐藤雄一郎氏 (工学院大学) との共同研究に基づく.

1　Introduction

本研究は, 写像の変分問題に対し積分幾何のアイデアを用いてアプローチするといった手法を取っている. まず, それぞれの理論の主要な部分について研究背景を踏まえ説明をする.

微分幾何の分野での重要な研究対象の一つとして, 調和写像/二重調和写像の理論がある. Riemann 多様体間のなめらかな写像 $\varphi : (M, g_M) \to (N, g_N)$ が調和写像であるとは, 写像 φ がエネルギー汎関数:

$$E(\varphi) = \frac{1}{2}\int_M |d\varphi|^2 d\mu_{g_M}$$

の臨界点となることをいう. また, エネルギー汎関数の第一変分公式を導出することにより, 調和写像 φ は次式の Euler–Lagrange 方程式:

$$\tau(\varphi) = \mathrm{tr}_{g_M} \widetilde{\nabla} d\varphi = 0$$

により特徴づけられることがわかる. この方程式は φ に関して 2 階の偏微分方程式となっている. ここで, $\widetilde{\nabla} d\varphi$ は写像 φ の第二基本形式, $\tau(\varphi)$ は φ のテンション場をあらわしている. 調和写像として例えば, 調和関数や極小部分多様体などがある. Eells と Lemaire [6] により, 調和写像の一般

* 本研究は, JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2156 の支援を受けたものである.

化として二重調和写像が導入された．Riemann 多様体間の写像 φ が二重調和写像であるとは, 写像 φ が二重エネルギー汎関数:

$$E_2(\varphi) = \frac{1}{2}\int_M |\tau(\varphi)|^2 d\mu_{g_M}$$

の臨界点となることをいう．さらに Jiang [8] により, 二重調和写像 φ は次式の Euler–Lagrange 方程式:

$$\tau_2(\varphi) = -\overline{\nabla}^*\overline{\nabla}\tau(\varphi) - \mathrm{tr}_{g_M} R^N\big(d\varphi(\cdot), \tau(\varphi)\big)d\varphi(\cdot) = 0$$

により特徴づけられることがわかった．この方程式は φ に関して 4 階の偏微分方程式となっている．ここで, $-\overline{\nabla}^*\overline{\nabla}$ は疎ラプラシアン, R^N は (N, g_N) の Riemann 曲率テンソルをあらわしている．また $\tau_2(\varphi)$ を二重テンション場という．ここまでの定義と特徴づけにより, 調和写像は二重調和写像であることは明らかである．また, 二重調和写像に関する重要な問題の一つに, Chen 予想がある．この予想は, Euclid 空間内の任意の二重調和部分多様体は調和 (極小) となるであろうという内容であり, 部分的に肯定的に解決されているが現在もなお未解決の問題として残されている．二重エネルギー汎関数の更に高次元化として, ES-r-エネルギー汎関数 [3, 6] や r-エネルギー汎関数 [9, 10] など様々なエネルギーが導入され (図 1), 変分問題や部分多様体の観点から研究が行われている．

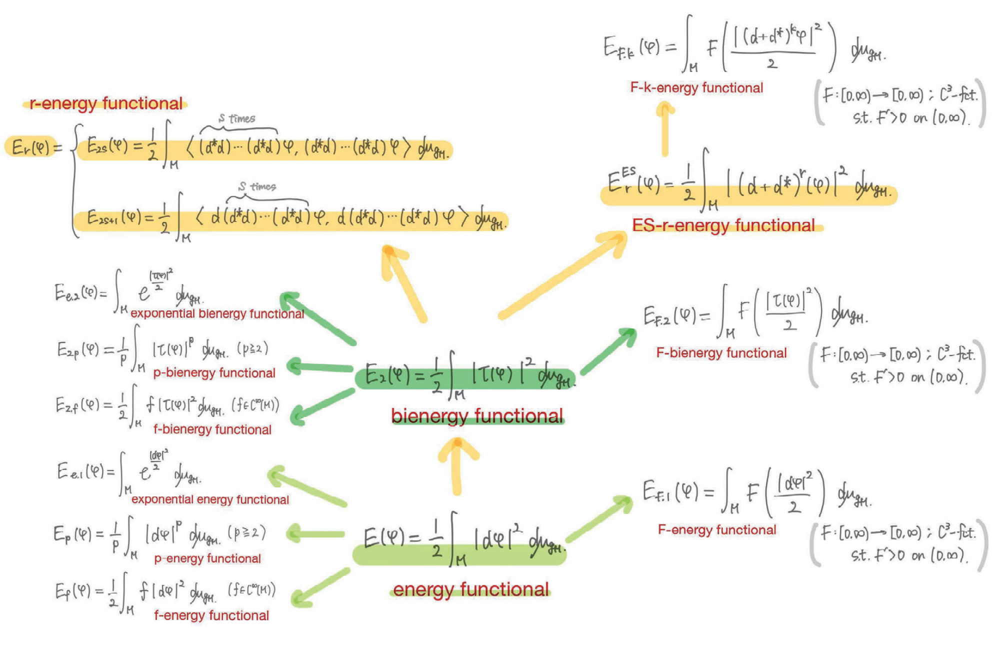

図 1　高次エネルギー汎関数の相関図

本研究で用いる, 積分幾何のアイデアを紹介する．まず, 部分多様体に対し定まり, 外空間の等

長変換で不変な量のことを部分多様体に対する不変量という．部分多様体に対する不変量の一つとして, Howard [7] により, 等質空間内の部分多様体の第二基本形式から定まる積分不変量が定式化され, 積分幾何の分野で盛んに研究され興味深い結果が数多く得られている．その一つとして Chern–Federer kinematic formula がある．例えばこれは, Weyl により示された管状近傍の体積の公式 [11] に表れる．さらに, Allendoerfer と Weil [2] はこの積分不変量を用いて, 一般化された Gauss–Bonnet の定理を示し, この結果は特性類の理論の発展に繋がった．また別の積分不変量として, 2 次の斉次多項式から定まる積分不変量がある．これは Willmore–Chen 不変量の定義にあらわれ, この不変量は部分多様体の共形不変量になることが知られている ([4, 5]).

本稿で報告する流れを説明する．2 節では, Howard の定式化の拡張版として, 写像の第二基本形式から定まる積分不変量を定める．3 節ではまず, 2 節での定義をもとに, 二重エネルギー汎関数を含むような, 2 次の斉次多項式から定まる積分不変量の族を構成する．そして, 構成した積分不変量の族に対して第一変分公式を導出した．その中でも, 積分幾何に由来する Chern–Federer エネルギー汎関数について 4 節では着目する．変分問題の観点から考察することにより, 今回構成したエネルギー汎関数の族の中でも Chern–Federer エネルギーだけが, ある特異な性質を持つことが分かった．また, 本稿で扱う内容はすべて, Riemann 多様体としているところを擬 Riemann 多様体としても成り立つ.

2　Riemann 多様体間の写像に対する積分不変量の定義

まず, Riemann 多様体間の写像の第二基本形式から定まる積分不変量の定義をする．Euclid 空間 $\mathbb{E}^m$ と $\mathbb{E}^n$ に対し $\mathrm{II}(\mathbb{E}^m, \mathbb{E}^n)$ を

$$\mathrm{II}(\mathbb{E}^m, \mathbb{E}^n) := \{H : \mathbb{E}^m \times \mathbb{E}^m \to \mathbb{E}^n \,;\, \text{対称双線形写像}\,\}$$

と定める．$\mathrm{II}(\mathbb{E}^m, \mathbb{E}^n)$ は $\frac{1}{2}nm(m+1)$ 次元のベクトル空間である．また, G を直交群の直積群:

$$G := O(m) \times O(n)$$

とする．このとき, 次のように G は $\mathrm{II}(\mathbb{E}^m, \mathbb{E}^n)$ に作用する．$g = (a, b) \in G$ と $H \in \mathrm{II}(\mathbb{E}^m, \mathbb{E}^n)$ に対し

$$(gH)(u, v) := b\big(H(a^{-1}u, a^{-1}v)\big) \qquad (u, v \in \mathbb{E}^m)$$

と定める．ここで, $\mathcal{P}$ を $\mathrm{II}(\mathbb{E}^m, \mathbb{E}^n)$ 上の関数とする．このとき任意の $g \in G$ と $H \in \mathrm{II}(\mathbb{E}^m, \mathbb{E}^n)$ に対し, $\mathcal{P}(gH) = \mathcal{P}(H)$ が成り立つとき $\mathcal{P}$ は G の作用に関して不変であるという.

次に, 写像の第二基本形式の定義をする．まず (M^m, g_M) と (N^n, g_N) を Riemann 多様体とし, その間のなめらかな写像 $\varphi : (M^m, g_M) \to (N^n, g_N)$ を考える．このとき, 写像 φ の第二基本形式は対称双線形形式:

$$\widetilde{\nabla} d\varphi : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(\varphi^{-1}TN)$$

であって次で定められる:

$$(\widetilde{\nabla} d\varphi)(X, Y) := \overline{\nabla}_X(d\varphi(Y)) - d\varphi(\nabla_X Y) \qquad (X, Y \in \Gamma(TM)).$$

ここで, ∇ は TM 上の Levi-Civita 接続, $\overline{\nabla}$ と $\widetilde{\nabla}$ はそれぞれ $\varphi^{-1}TN$ と $T^*M \otimes \varphi^{-1}TN$ 上に誘導される接続としている．写像 φ を等長はめ込みとすると, この定義は部分多様体の第二基本形式の定義と一致することが確認できる．

ここまでを踏まえ, 各点 $x \in M$ に対し, T_xM と $\mathbb{E}^m$, $T_{\varphi(x)}N$ と $\mathbb{E}^n$ をそれぞれ同一視することで, $\mathrm{II}(\mathbb{E}^m, \mathbb{E}^n)$ と $T_x^*M \odot T_x^*M \otimes T_{\varphi(x)}N$ の間に線形同型な対応を作る．ここで $\odot$ は対称積をあらわしている．実際, $(\widetilde{\nabla} d\varphi)_x \in T_x^*M \odot T_x^*M \otimes T_{\varphi(x)}N$ に対し $H_x := (h_{ij}^\alpha) \in \mathrm{II}(\mathbb{E}^m, \mathbb{E}^n)$ を対応させる．ここで h_{ij}^α は

$$h_{ij}^\alpha = g_N\big((\widetilde{\nabla} d\varphi)_x(e_i, e_j), \xi_\alpha\big)$$

としている．$\{e_i\}_{i=1}^m$ は T_xM の, $\{\xi_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ は $T_{\varphi(x)}N$ の正規直交基底としている．つまり h_{ij}^α はそれぞれの接空間に基底をとったときの $(\widetilde{\nabla} d\varphi)_x$ の成分表示である．この線形同型な対応を用いて, $\mathrm{II}(\mathbb{E}^m, \mathbb{E}^n)$ 上の G 不変な関数 $\mathcal{P}$ に対し, 写像 φ の第二基本形式の不変関数 $\mathcal{P}$ を次で定める:

$$\mathcal{P}\big((\widetilde{\nabla} d\varphi)_x\big) := \mathcal{P}(H_x).$$

この定義は, T_xM と $T_{\varphi(x)}N$ それぞれの正規直交基底のとり方によらず well-defined に定まる．実際, $\mathrm{II}(\mathbb{E}^m, \mathbb{E}^n)$ 上の関数 $\mathcal{P}$ が G 不変であることと, 基底の変換は群作用であらわせることから確認ができる．以上を踏まえ, 写像の第二基本形式から定まる積分不変量を次で定義する．

定義 2.1. (M^m, g_M) を m 次元 Riemann 多様体, (N^n, g_N) を n 次元 Riemann 多様体とし, $\mathcal{P}$ を $\mathrm{II}(\mathbb{E}^m, \mathbb{E}^n)$ 上の G 不変な関数とする．このとき, なめらかな写像 $\varphi \in C^\infty(M, N)$ に対し, $\mathcal{P}$ に関する φ の積分不変量を次で定める:

$$I^{\mathcal{P}}(\varphi) := \int_M \mathcal{P}\big((\widetilde{\nabla} d\varphi)_x\big) d\mu_{g_M}.$$

$I^{\mathcal{P}}(\varphi)$ は写像 φ の不変量になっていることが確認できる．つまり任意の $f \in \mathrm{Isom}(M)$ と $g \in \mathrm{Isom}(N)$ に対し

$$I^{\mathcal{P}}(g \circ \varphi \circ f^{-1}) = I^{\mathcal{P}}(\varphi)$$

が成り立つ．

3 $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$ エネルギー汎関数の導入とそれぞれの第一変分公式

写像の第二基本形式から定まる積分不変の定義を用いて, 本研究で扱うエネルギー汎関数を導入していく．$H = (h_{ij}^\alpha) \in \mathrm{II}(\mathbb{E}^m, \mathbb{E}^n)$ に対し, 多項式 $\mathcal{Q}_1$ と多項式 $\mathcal{Q}_2$ をそれぞれ次式で定める:

$$\mathcal{Q}_1(H) := \sum_\alpha \sum_{i,j} (h_{ij}^\alpha)^2, \quad \mathcal{Q}_2(H) := \sum_\alpha \Big(\sum_i h_{ii}^\alpha\Big)^2.$$

ここで h_{ij}^α は $\mathbb{E}^m$ と $\mathbb{E}^n$ にそれぞれ正規直交基底をとったときの成分表示としている．多項式 $\mathcal{Q}_1$ と $\mathcal{Q}_2$ はそれぞれ G 不変な 2 次の斉次多項式である．これより, 多項式 $\mathcal{Q}_1$ と $\mathcal{Q}_2$ の線形結合であらわされる多項式も G 不変な 2 次の斉次多項式となる．さらに次がわかっている．

命題 3.1. $\mathrm{II}(\mathbb{E}^m, \mathbb{E}^n)$ 上の G 不変な 2 次斉次多項式全体は多項式 $\mathcal{Q}_1$ と $\mathcal{Q}_2$ で張られる.

さらに, φ を Riemann 多様体間のなめらかな写像とすると次が成り立つ:

$$\mathcal{Q}_1\big((\widetilde{\nabla} d\varphi)_x\big) = |\widetilde{\nabla} d\varphi|^2(x), \quad \mathcal{Q}_2\big((\widetilde{\nabla} d\varphi)_x\big) = |\mathrm{tr}_{g_M}(\widetilde{\nabla} d\varphi)|^2(x).$$

以上を踏まえ, 写像の第二基本形式から定まる積分不変の定義に基づきエネルギー汎関数を次のように定義する.

定義 3.2. $\varphi \in C^\infty(M, N)$ に対し, $\mathcal{Q}_1$ エネルギー汎関数と $\mathcal{Q}_2$ エネルギー汎関数をそれぞれ次で定める:

$$I^{\mathcal{Q}_1}(\varphi) = \int_M \mathcal{Q}_1\big((\widetilde{\nabla} d\varphi)_x\big) d\mu_{g_M} = \int_M |\widetilde{\nabla} d\varphi|^2 d\mu_{g_M},$$
$$I^{\mathcal{Q}_2}(\varphi) = \int_M \mathcal{Q}_2\big((\widetilde{\nabla} d\varphi)_x\big) d\mu_{g_M} = \int_M |\mathrm{tr}_{g_M}(\widetilde{\nabla} d\varphi)|^2 d\mu_{g_M}.$$

このとき, $I^{\mathcal{Q}_1}(\varphi)$ の臨界点を $\mathcal{Q}_1$ 写像, $I^{\mathcal{Q}_2}(\varphi)$ の臨界点を $\mathcal{Q}_2$ 写像と呼ぶ.

注意 3.3. $\mathcal{Q}_2$ エネルギー汎関数は 2 倍の二重エネルギー汎関数と一致する.

注意 3.4. $\mathrm{dim} M = 4$ のとき, $\mathcal{Q}_1$ エネルギー汎関数と $\mathcal{Q}_2$ エネルギー汎関数はそれぞれ (M^m, g_M) の相似変換で不変である.

本研究の主要な結果の一つである, $\mathcal{Q}_1$ エネルギーと $\mathcal{Q}_2$ エネルギーの第一変分公式を紹介する.

定理 3.5. (M^m, g_M) をコンパクト Riemann 多様体, (N^n, g_N) を Riemann 多様体とし, $\varphi : (M^m, g_M) \to (N^n, g_N)$ をなめらかな写像とする. また $\{\varphi_t\}_{t \in I}$ を φ のなめらかな変分, $V \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$ を変分ベクトル場とする. このとき次が成り立つ:

$$\frac{d}{dt} I^{\mathcal{Q}_i}(\varphi_t)\Big|_{t=0} = 2 \int_M \langle W_i(\varphi), V \rangle \, d\mu_{g_M} \qquad (i = 1, 2).$$

ここで $W_1(\varphi)$ と $W_2(\varphi)$ はそれぞれ

$$W_1(\varphi) = \sum_{i,j} \Big\{ \big(\widetilde{\nabla}^3 d\varphi\big)(e_i, e_j, e_i, e_j) + R^N\big((\widetilde{\nabla} d\varphi)(e_i, e_j), d\varphi(e_i)\big) d\varphi(e_j) \Big\},$$
$$W_2(\varphi) = \sum_{i,j} \Big\{ \big(\widetilde{\nabla}^3 d\varphi\big)(e_i, e_i, e_j, e_j) + R^N\big((\widetilde{\nabla} d\varphi)(e_i, e_i), d\varphi(e_j)\big) d\varphi(e_j) \Big\}$$

で定められる. $\{e_i\}_{i=1}^m$ は (M^m, g_M) の局所正規直交枠場としている.

これより, $\mathcal{Q}_1$ エネルギーと $\mathcal{Q}_2$ エネルギーの Euler–Lagrange 方程式はそれぞれ $W_1(\varphi) = 0$ と $W_2(\varphi) = 0$ であり, 両方とも φ に関して 4 階の偏微分方程式となっている. 続けて, 定理 3.5 の詳細な証明はせず, 概略として証明に用いる補題を述べる. まず準備として, φ のなめらかな変分 $\{\varphi_t\}_{t \in I}$ を考えることで次の写像 Φ が得られる:

$$\Phi : M \times I \to N, \ (x, t) \mapsto \Phi(x, t) =: \varphi_t(x) \ \text{ s.t. } \ \varphi_0(x) = \varphi(x) \quad ({}^\forall x \in M).$$

また, 変分ベクトル場 V は

$$V = d\Phi\left(\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0}\right) \in \Gamma(\varphi^{-1}TN)$$

とあらわせる．また, $\{e_i\}_{i=1}^m$ で $x \in M$ の近傍 U 上の局所正規直交枠場をあらわすことにすると, $\left\{e_i, \frac{\partial}{\partial t}\right\}$ は $(x,t) \in M \times I$ の近傍 $U \times I$ 上の正規直交枠場となる．$\mathcal{Q}_1$ エネルギーの場合, 第一変分公式の導出には次の二つの補題を用いる．

補題 3.6. 上述の設定の下, 次が成り立つ．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}I^{\mathcal{Q}_1}(\varphi_t) = 2\int_M \sum_{i,j} &\left\langle (\tilde{\nabla}^2 d\Phi)\left(e_i, e_j, \frac{\partial}{\partial t}\right), (\tilde{\nabla} d\Phi)(e_i, e_j)\right\rangle d\mu_{g_M} \\ &- 2\int_M \sum_{i,j} \left\langle R^N\left(d\Phi(e_i), d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) d\Phi(e_j), (\tilde{\nabla} d\Phi)(e_i, e_j)\right\rangle d\mu_{g_M}\end{aligned}$$

補題 3.7. 上述の設定の下, 次が成り立つ．

$$\begin{aligned}&\int_M \sum_{i,j} \left\langle (\tilde{\nabla}^2 d\Phi)\left(e_i, e_j, \frac{\partial}{\partial t}\right), (\tilde{\nabla} d\Phi)(e_i, e_j)\right\rangle d\mu_{g_M} \\ &= \int_M \sum_{i,j} \left\langle d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), (\tilde{\nabla}^3 d\Phi)(e_i, e_j, e_i, e_j)\right\rangle d\mu_{g_M}\end{aligned}$$

補題 3.6 の等式の, 右辺の第一項を変形するため補題 3.7 がある．また, $\mathcal{Q}_2$ エネルギーの場合も計算の流れは同様で, 実際に用いる補題は次の二つである．

補題 3.8. 上述の設定の下, 次が成り立つ．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}I^{\mathcal{Q}_2}(\varphi_t) = 2\int_M \sum_{i,j} &\left\langle (\tilde{\nabla}^2 d\Phi)\left(e_i, e_i, \frac{\partial}{\partial t}\right), (\tilde{\nabla} d\Phi)(e_j, e_j)\right\rangle d\mu_{g_M} \\ &- 2\int_M \sum_{i,j} \left\langle R^N\left(d\Phi(e_i), d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) d\Phi(e_i), (\tilde{\nabla} d\Phi)(e_j, e_j)\right\rangle d\mu_{g_M}\end{aligned}$$

補題 3.9. 上述の設定の下, 次が成り立つ．

$$\begin{aligned}&\int_M \sum_{i,j} \left\langle (\tilde{\nabla}^2 d\Phi)\left(e_i, e_i, \frac{\partial}{\partial t}\right), (\tilde{\nabla} d\Phi)(e_j, e_j)\right\rangle d\mu_{g_M} \\ &= \int_M \sum_{i,j} \left\langle d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), (\tilde{\nabla}^3 d\Phi)(e_i, e_i, e_j, e_j)\right\rangle d\mu_{g_M}\end{aligned}$$

一方, 二重エネルギー汎関数の第一変分公式の導出の際は次の二つの補題 [8, Lemma 1, Lemma 2, Section 2] が用いられた．

補題 3.10 (Jiang 1986)**.**

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_2(\varphi_t) = 2\int_M \sum_{i,j} &\left\langle (\tilde{\nabla}^2 d\Phi)\left(e_i, e_i, \frac{\partial}{\partial t}\right) \cancel{- (\tilde{\nabla} d\Phi)\left(\nabla_{e_i} e_i, \frac{\partial}{\partial t}\right)}, (\tilde{\nabla} d\Phi)(e_j, e_j)\right\rangle d\mu_{g_M} \\ &- 2\int_M \sum_{i,j} \left\langle R^N\left(d\Phi(e_i), d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right) d\Phi(e_i), (\tilde{\nabla} d\Phi)(e_j, e_j)\right\rangle d\mu_{g_M}\end{aligned}$$

補題 3.11 (Jiang 1986).

$$\int_M \sum_{i,j} \left\langle (\widetilde{\nabla}^2 d\Phi)\left(e_i, e_i, \frac{\partial}{\partial t}\right) \cancel{-(\widetilde{\nabla} d\Phi)(\nabla_{e_i} e_i, \tfrac{\partial}{\partial t})}, (\widetilde{\nabla} d\Phi)(e_j, e_j) \right\rangle d\mu_{g_M}$$
$$= \int_M \sum_{i,j} \left\langle d\Phi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), (\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i} - \overline{\nabla}_{\nabla_{e_i} e_i})(\widetilde{\nabla} d\Phi)(e_j, e_j) \right\rangle d\mu_{g_M}$$

補題 3.10 と補題 3.11 について, それぞれ一か所ずつ間違いがある. 論文の流れに沿って正しく計算を行うと, 中央赤線部は余分な項となっている. ここで, 二重エネルギー汎関数と $\mathcal{Q}_2$ エネルギー汎関数は定数倍の差を除いて一致していることから, それぞれのエネルギー汎関数の第一変分公式を比較することで次が得られた.

命題 3.12. $\varphi : (M^m, g_M) \to (N^n, g_N)$ を Riemann 多様体間のなめらかな写像とする. このとき次が成り立つ.

$$-\overline{\nabla}^* \overline{\nabla} \tau(\varphi) = \sum_{i,j} (\widetilde{\nabla}^3 d\varphi)(e_i, e_i, e_j, e_j)$$

ここで $-\overline{\nabla}^*\overline{\nabla} := \sum_k \left(\overline{\nabla}_{e_k}\overline{\nabla}_{e_k} - \overline{\nabla}_{\nabla_{e_k} e_k}\right)$ は疎ラプラシアン, $\{e_i\}_{i=1}^m$ は (M^m, g_M) の局所正規直交枠場としている.

Jiang 氏による二重エネルギー汎関数の計算と我々の $\mathcal{Q}_2$ エネルギーの計算との一番の差は, $-\overline{\nabla}^*\overline{\nabla}\tau(\varphi)$ とみるか, 写像の第二基本形式 $\widetilde{\nabla} d\varphi$ の 2 回の共変微分とみるかの違いである. 後者の表示を得たことで, $\mathcal{Q}_1$ エネルギーと $\mathcal{Q}_2$ エネルギーの第一変分公式を統一的に表示/導出することができた.

4 Chern–Federer エネルギー汎関数の導入とその Euler–Lagrange 方程式

ここでは, 本研究の主要な結果の二つ目である, Chern–Federer エネルギー汎関数の持つ特異性について説明する. まず, $H = (h_{ij}^\alpha) \in \mathrm{II}(\mathbb{E}^m, \mathbb{E}^n)$ に対し, 2 次の Chern–Federer 多項式を次式で定める:

$$\mathrm{CF}(H) := \mathcal{Q}_2(H) - \mathcal{Q}_1(H).$$

定義 4.1. $\varphi \in C^\infty(M, N)$ に対し, Chern–Federer エネルギー汎関数を次で定める:

$$I^{\mathrm{CF}}(\varphi) = \int_M \mathrm{CF}\big((\widetilde{\nabla} d\varphi)_x\big) d\mu_{g_M}.$$

このとき, $I^{\mathrm{CF}}(\varphi)$ の臨界点をChern–Federer 写像と呼ぶ.

また, 本研究では言及しないが, Chern–Federer エネルギーと対になる Willmore–Chen エネルギーの導入もしておく. $H = (h_{ij}^\alpha) \in \mathrm{II}(\mathbb{E}^m, \mathbb{E}^n)$ に対し, Willmore–Chen 多項式を次式で定める:

$$\mathrm{WC}(\varphi) := m\mathcal{Q}_1(H) - \mathcal{Q}_2(H).$$

定義 4.2. $\varphi \in C^\infty(M,N)$ に対し, Willmore–Chen エネルギー汎関数を次で定める:

$$I^{\mathrm{WC}}(\varphi) = \int_M \mathrm{WC}\big((\widetilde{\nabla} d\varphi)_x\big) d\mu_{g_M}.$$

このとき, $I^{\mathrm{WC}}(\varphi)$ の臨界点をWillmore–Chen 写像と呼ぶ.

Chern–Federer エネルギーも Willmore–Chen エネルギーも, それぞれ積分幾何での先行研究が由来のエネルギー汎関数である.

これまで導入したエネルギーを統一的に扱うため, 次の写像を定義する. $\varphi : (M^m, g_M) \to (N^n, g_N)$ をなめらかな写像, α と β を $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ を満たす定数とする. このとき写像 φ が

$$\alpha W_1(\varphi) + \beta W_2(\varphi) = 0$$

を満たすとき, $(\alpha\mathcal{Q}_1 + \beta\mathcal{Q}_2)$ 写像と呼ぶことにする. このとき $(\alpha\mathcal{Q}_1 + \beta\mathcal{Q}_2)$ 写像に対し, それぞれ以下が成り立つ:

1. $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ のとき φ は $\mathcal{Q}_1$ 写像;
2. $(\alpha, \beta) = (0, 1)$ のとき φ は $\mathcal{Q}_2$ 写像;
3. $(\alpha, \beta) = (-1, 1)$ のとき φ は Chern–Federer 写像;
4. $(\alpha, \beta) = (m, -1)$ のとき φ は Willmore–Chen 写像.

ここで強調しておきたいことは, 我々の研究ではエネルギー汎関数を一つ固定して変分問題を考えるのではなく, エネルギー汎関数の族に対し変分問題を考えている点である. これにより, エネルギー汎関数の族に属する全てのエネルギーの Euler–Lagrange 方程式を統一的に表示し, 考察することができる.

上述からわかる通り, Chern–Federer エネルギー汎関数の Euler–Lagrange 方程式は $W_2(\varphi) - W_1(\varphi) = 0$ である. この方程式に関し次の結果を得た.

命題 4.3. なめらかな写像 $\varphi : (M^m, g_M) \to (N^n, g_N)$ が Chern–Federer 写像であることの必要十分条件は, 次が成り立つことである.

$$\begin{aligned}
0 = \sum_{i,j} \big\{ &\big(\nabla R^N\big)\big(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i), d\varphi(e_j)\big) d\varphi(e_j) - \big(\widetilde{\nabla} d\varphi\big)\big(e_i, R^M(e_i, e_j)e_j\big) \\
&- d\varphi\big((\nabla R^M)(e_i, e_i, e_j)e_j\big) + 2R^N\big((\widetilde{\nabla} d\varphi)(e_i, e_i), d\varphi(e_j)\big) d\varphi(e_j) \\
&+ 2R^N\big(d\varphi(e_i), (\widetilde{\nabla} d\varphi)(e_i, e_j)\big) d\varphi(e_j) \big\}.
\end{aligned}$$

ここで, $\{e_i\}_{i=1}^m$ は (M^m, g_M) の局所正規直交枠場としている.

一般に, $\mathcal{Q}_1$ エネルギーと $\mathcal{Q}_2$ エネルギーで張られるエネルギー汎関数の族に属するエネルギーの Euler–Lagrange 方程式は, φ に関する 4 階の偏微分方程式となっている. しかしこの命題から, Chern–Federer エネルギー $I^{\mathrm{CF}}(\varphi)$ の Euler–Lagrange 方程式は, φ に関する 2 階の偏微分方程式になっていることがわかる. また, このエネルギー汎関数の族の中でも (定数倍の差を除いて) Chern–Federer エネルギーだけが, Euler–Lagrange 方程式が 2 階になることもわかっている. 命題 4.3 の証明には次の二つの補題を用いた.

補題 4.4. なめらかな写像 $\varphi : (M^m, g_M) \to (N^n, g_N)$ と $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ に対し, 次が成り立つ.

$$\big(\widetilde{\nabla}^2 d\varphi\big)(X,Y,Z) - \big(\widetilde{\nabla}^2 d\varphi\big)(Y,X,Z) = R^N\big(d\varphi(X), d\varphi(Y)\big)d\varphi(Z) - d\varphi(R^M(X,Y)Z)$$

補題 4.5. なめらかな写像 $\varphi : (M^m, g_M) \to (N^n, g_N)$ と $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ に対し, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
&\big(\widetilde{\nabla}^3 d\varphi\big)(X,Y,Z,W) - \big(\widetilde{\nabla}^3 d\varphi\big)(X,Z,Y,W)\\
&= \big(\nabla R^N\big)\big(d\varphi(X), d\varphi(Y), d\varphi(Z)\big)d\varphi(W) + R^N\big((\widetilde{\nabla} d\varphi)(X,Y), d\varphi(Z)\big)d\varphi(W)\\
&\quad + R^N\big(d\varphi(Y), (\widetilde{\nabla} d\varphi)(X,Z)\big)d\varphi(W) + R^N\big(d\varphi(Y), d\varphi(Z)\big)(\widetilde{\nabla} d\varphi)(X,W)\\
&\quad - (\widetilde{\nabla} d\varphi)\big(X, R^M(Y,Z)W\big) - d\varphi\big((\nabla R^M)(X,Y,Z)W\big)
\end{aligned}$$

Chern–Federer エネルギーに関して, さらにもう一つ考察を得た. まず, 2 次の Chern–Federer 多項式は次のようにあらわすことができる:

$$\begin{aligned}
\mathrm{CF}\big((\widetilde{\nabla} d\varphi)_x\big) &= \mathcal{Q}_2\big((\widetilde{\nabla} d\varphi)_x\big) - \mathcal{Q}_1\big((\widetilde{\nabla} d\varphi)_x\big)\\
&= \mathcal{Q}_2(H_x) - \mathcal{Q}_1(H_x)\\
&= \sum_\alpha \big(\sum_i h^\alpha_{ii}\big)^2 - \sum_\alpha \sum_{i,j} (h^\alpha_{ij})^2\\
&= \sum_\alpha \sum_{i,j} \det \begin{pmatrix} h^\alpha_{ii} & h^\alpha_{ij} \\ h^\alpha_{ij} & h^\alpha_{jj} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

この多項式の表示に関して次の定理を得た.

定理 4.6. なめらかな写像 $\varphi : (M^m, g_M) \to (N^n, g_N)$ が Chern–Federer 写像であることの必要十分条件は次が成り立つことである.

$$C(\mu + \nu) = 0,$$

ここで C は

$$C := \det \begin{pmatrix} C_{12} & C_{13} \\ C_{24} & C_{34} \end{pmatrix},$$

であり各 C_{ij} は縮約としている. また μ, ν はそれぞれ以下で定められる, $\varphi^{-1}TN$ に値を持つ $(0,4)$ 型のテンソル場である.

$$\begin{aligned}
\mu(X_1, X_2, X_3, X_4) &:= (\widetilde{\nabla}^3 d\varphi)(X_1, X_2, X_3, X_4),\\
\nu(X_1, X_2, X_3, X_4) &:= R^N\big((\widetilde{\nabla} d\varphi)(X_3, X_4), d\varphi(X_1)\big)d\varphi(X_2)
\end{aligned}$$

ただしここで $X_1, X_2, X_3, X_4 \in \Gamma(TM)$ としている.

定理 4.6 より, 2 次の Chern–Federer 多項式にあらわれる行列式の対称性が, Chern–Federer エネルギー汎関数の Euler–Lagrange 方程式にも引き継がれていることがわかる. また, 定理 4.6 で用いる縮約について説明をしておく. ここでは, 縮約をとる対象が $(0,4)$ 型のテンソルのため, Riemann 計量を用いて $(0,4)$ 型を $(1,3)$ 型にし, 例えば C_{12} であれば第 1, 第 2 成分で縮約をとるということをしている.

5　今後の課題

写像の変分問題をテーマとした研究で, エネルギー汎関数の族に対して統一的に変分問題を考えるといった研究は他に類をみない. また本研究を通して, 積分幾何のアイデアをもとに写像の変分問題に取り組むという, 新しい研究の方向性を提示することができた.

最後に, 今後の課題について述べる. 具体的に次のような問題を考えている.

1. 第二変分公式の導出.
2. 写像の積分不変量の幾何的性質を明らかにする.
3. 可積分系の観点から Chern–Federer 写像についての研究を進める.

1 について, 現在取り組んでいる最中である. 2 について, イントロダクションにある通り, 部分多様体の第二基本形式から定まる積分不変量で, 部分多様体の共形不変量になるものが存在する. これらの結果を参考にし, 写像の第二基本形式から定まる積分不変量の中で, 共形不変性などの幾何的性質を持つものを見出したい. 3 について, エネルギー汎関数の Euler–Lagrange 方程式が 2 階の偏微分方程式になることから, 調和写像は可積分系の分野と相性が良いことが知られている. 一方, 今回の研究で Chern–Federer エネルギー汎関数の Euler–Lagrange 方程式も 2 階の偏微分方程式となることが確認できた. 調和写像の先行研究の流れを参考にし, Chern–Federer 写像に対しても可積分系の観点から研究を進められることが期待される.

長期的な目標として, Chern–Federer 写像を足がかりにして Chen 予想へ何らかの形でアプローチできたら嬉しい. そのためにはまず, Chern–Federer 写像の顕著な例を見つけることから始めたいと考えている.

参考文献

[1] R. Akiyama, T. Sakai, Y. Sato: *Variational problems for integral invariants of the second fundamental form of a map between pseudo-Riemannian manifolds*, to appear in Osaka Journal of Mathematics.

[2] C. B. Allendoerfer and A. Weil: *The Gauss–Bonnet theorem for Riemannian polyhedra*, Trans. Amer. Math. Soc. **53** (1943), 101–129.

[3] V. Branding, S. Montaldo, C. Oniciuc, A. Ratto: *Higher order energy functionals*, Adv. Math. **370** (2020), 107236, 60 pp.

[4] B.-Y. Chen: *An invariant of conformal mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. **40** (1973), 563–564.

[5] B.-Y. Chen: *Some conformal invariants of submanifolds and their applications*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **10** (1974), 380–385.

[6] J. Eells and L. Lemaire: *Selected topics in harmonic maps*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, Amer. Math. Soc. **50**, 1983.

[7] R. Howard: *The kinematic formula in Riemannian homogeneous spaces*, Mem. Amer. Math. Soc. **106** (1993), no. 509, vi+69 pp.

[8] G. Jiang: 2-*harmonic maps and their first and second variational formulas*, Translated from the Chinese by Hajime Urakawa, Note Mat. **28** (2009), [2008 on verso], suppl. 1, 209–232.

[9] S. Maeta: *The second variational formula of the k-energy and k-harmonic curves*, Osaka J. Math. **49** (2012), no. 4, 1035–1063.

[10] S. B. Wang: *The first variation formula for K-harmonic mapping*, Journal of Jiangxi university **13** (1989).

[11] H. Weyl: *On the volume of tubes*, Amer. J. Math. **61** (1939), 461–472.