2つの可換な非線形写像に関する共通不動点への弱収束定理
(A WEAK CONVERGENCE THEOREM FOR COMMON FIXED POINTS OF TWO NONLINEAR MAPPINGS IN HILBERT SPACES)

茨木貴徳 (TAKANORI IBARAKI)
横浜国立大学 教育学部
(COLLEGE OF EDUCATION, YOKOHAMA NATIONAL UNIVERSITY)

梶葉駿介 (SHUNSUKE KAJIBA)
横浜国立大学 大学院環境情報学府
(GRADUATE SCHOOL OF ENVIRONMENT AND INFORMATION SCIENCES, YOKOHAMA NATIONAL UNIVERSITY)

竹内幸雄 (YUKIO TAKEUCHI)
高橋非線形解析研究所
(TAKAHASHI INSTITUTE FOR NONLINEAR ANALYSIS)

1. はじめに

1963 年, DeMarr [9] は, バナッハ空間で, 可換な非拡大写像族についての共通不動点定理を示した. これ以降, 写像族の共通不動点について, その存在や近似に関する研究が広く行われている ([6–8, 16, 23] 等を参照).

一方, 1975 年, Baillon [5] は最初の非線形エルゴート定理として知られる平均収束定理を示した. この結果は, 多くの研究者により, 様々な形で発展した. 1997 年, 清水-高橋 [21] は, ヒルベルト空間で, Halpern [12] と Baillon [5] の 2 つの近似法を組み合わせた新たな近似法を考案した. さらに, この近似法を用いて非拡大写像族の共通不動点への強収束定理を示した. 1998 年に厚芝-高橋 [3] は Mann [20] と Baillon [5] の 2 つの近似法を組み合わせた新たな近似法を提案し, 一様凸バナッハ空間で, 2 つの非拡大写像の共通不動点への弱収束定理を示した. さらに, 2002 年に鈴木 [22] は, 一般のバナッハ空間のコンパクトな凸部分集合上の 2 つの可換な非拡大写像について, 厚芝-高橋 [3] の近似法を利用した共通不動点への強収束定理を示した. 鈴木 [22] の結果を動機として, 竹内 [27] は 2016 年に新たな近似法を提案し次の強収束定理を得た.

定理 1.1 ([27]). *E をバナッハ空間, C を E のコンパクトな凸部分集合とし, S と T を $ST = TS$ を満たす C から C への非拡大写像とする. $\{a_n\}$ を $0 < \liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n < 1$ を満たす $[0, 1]$ の数列とする. $x_1 \in C$ とし, 点列 $\{x_n\}$ を, 任意の $n \in \mathbb{N}$ について*

$$x_{n+1} = \frac{a_n}{2n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{i+1} S^i T^j x_n + (1 - a_n)x_n$$

で生成する. このとき, $\{x_n\}$ は S と T の共通不動点に強収束する.

このほかにも, Baillon [5] に関連する研究は広く行われている ([10, 18, 24] 等を参照). また, 2011 年, 高橋-竹内 [26] は吸引点 (attractive point) の概念を提案した (詳細は第 2 節を参照). 吸引点は, 不動点と深い関係を持つことが知られている ([2, 4, 14, 15] 等を参照). さらに, 高橋-竹内 [26] は generalized hybrid 写像 [17] について, Baillon [5] の結果を次のように発展させた.

2020 *Mathematics Subject Classification.* 47H10, 47H25, 47J26.
Key words and phrases. 共通不動点, 共通吸引点, 擬非拡大写像, 近似法.

定理 1.2 ([26]). *H をヒルベルト空間, C を H の空ではない部分集合とし, T を C から C への generalized hybrid 写像とする. 点列 $\{v_n\}$, $\{b_n\}$ を, 任意の $n \in \mathbb{N}$ について*

$$v_1 \in C, \quad v_{n+1} = Tv_n, \quad b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_k$$

で生成する. このとき, $\{v_n\}$ が有界ならば, 次が成立する:

(1) *$A(T)$ は非空閉凸集合である;*
(2) *$\{b_n\}$ は T の吸引点に弱収束する.*

ここまでに述べたことを踏まえて, 本稿では, 茨木-梶葉-竹内 [13] で得られた研究成果を解説する. 具体的には, ヒルベルト空間で, 竹内 [27] が提案した近似法を吸引点の性質を用いて考察し, 2 つの可換な非線形写像の共通不動点への弱収束定理を提示する.

2. 準備

本節では, 本稿で用いる定義, 記号, 補題等を確認する. $\mathbb{R}$ を実数全体の集合, $\mathbb{N}_0$ を非負の整数全体の集合, $\mathbb{N}$ を正の整数全体の集合とする. $i \in \mathbb{N}_0$ に対して, $\mathbb{N}_i = \{k \in \mathbb{N}_0 : i \le k\}$ とし, $i \le j$ となる $i, j \in \mathbb{N}_0$ に対して, $\mathbb{N}(i,j) = \{k \in \mathbb{N}_0 : i \le k \le j\}$ とする. H を実ヒルベルト空間とし, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を H の内積, $\|\cdot\|$ を H のノルムとする. H の点列 $\{x_n\}$ が, $x \in H$ に強収束することを $x_n \to x$ と表し, $x \in H$ に弱収束することを $x_n \rightharpoonup x$ と表す. また, ヒルベルト空間において, 次が成立することはよく知られている:

(i) H の非空閉凸部分集合は弱閉集合である;
(ii) H の有界な点列は, 弱収束する部分列をもつ;
(iii) H の点列 $\{x_n\}$ の全ての弱収積点 (weak cluster point) がある $z \in H$ に等しいとき, $x_n \rightharpoonup z \in H$ が成立する.

また, H はオピアル条件 (Opial property) を満たすことも知られている. H がオピアル条件を満たすとは, H の点列 $\{u_n\}$ が $u \in H$ に弱収束するとき, $u \ne v$ を満たす任意の $v \in H$ について,

$$\liminf_{n\to\infty} \|u_n - u\| < \liminf_{n\to\infty} \|u_n - v\|$$

が成り立つことである.

C を H の空ではない部分集合, T を C から H への写像とし, C 上の恒等写像 I を T^0 と表記する. T の不動点集合, 吸引点集合をそれぞれ次の様に定義する:

$$F(T) = \{x \in C : x = Tx\},$$
$$A(T) = \{y \in H : \|Tx - y\| \le \|x - y\| \quad \forall x \in C\}.$$

T が非拡大写像 (nonexpansive mapping) であるとは, 任意の $x, y \in C$ について, $\|Tx - Ty\| \le \|x - y\|$ が成り立つことをいう. $I - T$ が原点において閉 (demiclosed at 0) であるとは, C の点列 $\{x_n\}$ が $x_n \rightharpoonup z \in C$ かつ $x_n - Tx_n \to 0$ を満たすとき, $z \in F(T)$ となることをいう. T が非拡大写像であるとき, $I - T$ は原点において閉であることが知られている. T が擬非拡大写像 (quasi-nonexpansive mapping) であるとは $\emptyset \ne F(T) \subset A(T)$ が成り立つことをいう. T が非拡大写像で $F(T) \ne \emptyset$ ならば, T は擬非拡大写像である. 青山-家本-高阪-高橋 [1] は $\lambda \in \mathbb{R}$ について λ–hybrid 写像を提案した. T が λ–hybrid 写像であるとは, 任意の $x, y \in C$ について

$$\|Tx - Ty\|^2 \le \|x - y\|^2 + 2(1-\lambda)\langle x - Tx, y - Ty\rangle$$

が成り立つことをいう. 彼らの提案した写像のクラスは重要な非線形写像のクラスを含んでいる. 例えば, 0–hybrid は非伸張写像 (nonspreading mapping) [19] , $\frac{1}{2}$–hybrid は hybrid 写像 [25], 1–hybrid は非拡大写像である. T が λ–hybrid 写像であれば, $F(T) \subset A(T)$ が成り立ち, $F(T) \ne \emptyset$

であれば, 擬非拡大写像である. また, Falset-Fuster-Suzuki [11] は条件 (E)(condition (E)) を満たす写像のクラスを提案した. 写像 T が条件 (E) を満たすとは, 任意の $x, y \in C$ について

$$\|x - Ty\| \leq \|x - y\| + s\|x - Tx\|$$

を満たす $s \in [0, \infty)$ が存在することをいう. T が条件 (E) を満たすならば $F(T) \subset A(T)$ であり, $F(T) \neq \emptyset$ ならば擬非拡大写像である.

C を H の空ではない部分集合, T_1, T_2 を C から C への写像とし, $F = F(T_1) \cap F(T_2)$, $A = A(T_1) \cap A(T_2)$ とする. 茨木-竹内 [14] は, 2018 年に T_1, T_2 の共通不動点への弱収束定理を示す際に, 次の 2 つの条件を仮定した.

- $j \in \{1, 2\}$ に対して, $I - T_j$ は原点において閉;
- $F \subset A$.

前者の条件は, 不動点近似を考える上で必要な条件と思われ, 非拡大写像は当然この条件を満たしている. そこで, 後者の条件 $F \subset A$ を考察する.

(a) $F \subset A$ であっても, $F(T_1) \subset A(T_1)$ や $F(T_2) \subset A(T_2)$ が成り立つとは限らない;
(b) $F \subset A$ でなければ, $F \neq \emptyset$ から $A \neq \emptyset$ は導かれない;
(c) C が閉凸集合のとき, $A \neq \emptyset$ ならば $F \neq \emptyset$ となる.
ただし, $A \neq \emptyset$ であっても, $F \subset A$ が成り立つとは限らない;
(d) T_1 と T_2 が擬非拡大写像ならば, $F \subset A$ が成立する;
(e) $\emptyset \neq F \subset A$ であっても, T_1 と T_2 は擬非拡大写像とは限らない.

この条件を考察するため, 茨木-竹内 [14] は次の例を提示した.

例 2.1 ([14]). $D = \{x = (s, t) \in \mathbb{R}^2 : s \in [0, 1],\ t \in [s/2, 2s]\}$ とする. このとき, D はコンパクトな凸集合である. D から D への写像 T_1, T_2 を次の様に定義する: $x = (s, t) \in D$ について,

$$T_1 x = T_1(s, t) = \frac{1}{2}\left((s, t) + \left(\frac{1}{2}t, t\right)\right) = \left(\frac{1}{2}s + \frac{1}{4}t, t\right),$$
$$T_2 x = T_2(s, t) = \frac{1}{2}\left((s, t) + \left(s, \frac{1}{2}s\right)\right) = \left(s, \frac{1}{4}s + \frac{1}{2}t\right).$$

この例では

$$F(T_1) = \{(x_1, x_2) \in D : x_2 = 2x_1\}, \qquad F(T_2) = \{(x_1, x_2) \in D : x_2 = x_1/2\},$$
$$A(T_1) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq 0\}, \qquad A(T_2) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leq 0\},$$
$$F = \{(0, 0)\}, \qquad A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq 0,\ x_2 \leq 0\}$$

が成立するので, 次のことが確認できる:

- $F(T_1) \cap F(T_2) = F \subset A = A(T_1) \cap A(T_2)$ が成立する;
- $F(T_1) \subset A(T_1)$, $F(T_2) \subset A(T_2)$ はどちらも成立しない;
- T_1, T_2 のどちらも擬非拡大写像ではない.

吸引点に関する詳細は [2, 4, 14, 15, 26] 等を参照のこと.

次に, 第 3 節で用いる記号と補助定理を紹介する (証明はそれぞれの引用先を参照). C を H の空ではない部分集合とし, T_1, T_2 を C から C への写像とする. $n \in \mathbb{N}$ ごとに, 写像 $M(n)$ を次の様に定義する: 任意の $x \in C$ について,

$$M(n)x = \frac{1}{2n} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i}^{i+1} T_1^i T_2^j x = \frac{1}{2n} \sum_{i=0}^{n-1} T_1^i T_2^i x + \frac{1}{2n} \sum_{i=0}^{n-1} T_1^i T_2^{i+1} x.$$

また, $T_1 T_2 = T_2 T_1$ を仮定すれば, 任意の $i \in \mathbb{N}_0$ と $x \in C$ について

$$T_1^i T_2^i x = (T_1 T_2)^i x, \quad T_1^i T_2^{i+1} x = (T_1 T_2)^i (T_2 x) = T_2((T_1 T_2)^i x)$$

が成立する．この性質は補助定理 2.5 で重要な役割を果たす．

次の補助定理は H がオピアル条件を満たすことから容易に導かれる結果である (例えば厚芝-家本-窪田-高橋 [2] などを参照).

補助定理 2.2. C を H の空ではない部分集合とし，$\{u_n\}$ を H の点列とする．任意の $w \in C$ について $\{\|u_n - w\|\}$ が収束し，$\{u_n\}$ の部分列 $\{u_{n_i}\}$ と $\{u_{n_j}\}$ がそれぞれ $u, v \in C$ に弱収束するならば，$u = v$ である．

茨木-竹内 [14] は次の補助定理を示した．

補助定理 2.3 ([14])**.** C を H の空ではない部分集合とし，T を C から H への写像とする．$a \in [0,1]$，$x \in C$，$w = ax + (1-a)Tx$，$v \in A(T)$ とする．このとき，次が成立する：

$$a(1-a)\|Tx - x\|^2 \leq \|x - v\|^2 - \|w - v\|^2. \tag{2.1}$$

更に，C を有界とし，$r > \sup_{x \in C} \|x - v\|$ とすれば，

$$\frac{a(1-a)}{2r}\|Tx - x\|^2 \leq \|x - v\| - \|w - v\|. \tag{2.2}$$

茨木-梶葉-竹内 [13] は次の補助定理を示した．

補助定理 2.4 ([13])**.** $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ を $[0, \infty)$ の数列とする．このとき，任意の $n \in \mathbb{N}_2$ について，$\min_{i \in \mathbb{N}(0,n-2)}(a_i + a_{i+1}) = a_{i_n} + a_{i_n+1}$ を満たす $i_n \in \mathbb{N}(0, n-2)$ が存在し，

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i \geq \frac{n-1}{2}(a_{i_n} + a_{i_n+1})$$

が成立する．

補助定理 2.5 ([13])**.** C を H の空ではない部分集合，T_1, T_2 を C から C への写像とし，$\emptyset \neq A = A(T_1) \cap A(T_2)$ とする．$a, b \in (0,1)$ は $a \leq b$ を満たすとし，$\{a_n\}$ を $[a, b]$ の数列とする．C の有界な点列 $\{x_n\}$ と点列 $\{y_n\}$ は次の関係を満たすとする：任意の $n \in \mathbb{N}$ について，

$$y_n = a_n M(n) x_n + (1 - a_n) x_n.$$

このとき，$\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$ を仮定すれば，任意の $n \in \mathbb{N}_2$ について $i_n \in \mathbb{N}_0$ であり，

$$\lim_{n\to\infty} \|T_1^{i_n} T_2^{i_n} x_n - x_n\| = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \|T_1^{i_n} T_2^{i_n+1} x_n - x_n\| = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} \|T_1^{i_n+1} T_2^{i_n+1} x_n - x_n\| = 0$$

となる数列 $\{i_n\}_{n \in \mathbb{N}_2}$ が存在する．

λ–hybrid 写像と条件 (E) を満たす写像について，次の補助定理が知られている (例えば茨木-竹内 [14] などを参照).

補助定理 2.6. C を H の空ではない部分集合とし，T を C から H への λ*–hybrid* 写像とする．$\{x_n\}$ を $u \in C$ に弱収束するような C の点列とし，$\lim_{n\to\infty} \|Tx_n - x_n\| = 0$ を満たすとする．このとき，$u \in F(T)$ である．

補助定理 2.7. C を H の空ではない部分集合とし，T を C から H への条件 (E) を満たす写像とする，$\{x_n\}$ を $u \in C$ に弱収束するような C の点列とし，$\lim_{n\to\infty} \|Tx_n - x_n\| = 0$ を満たすとする．このとき，$u \in F(T)$ である．

3. 弱収束定理

本節では, ヒルベルト空間で, 茨木-梶葉-竹内 [13] が示した2つの可換な非線形写像に関する共通不動点への弱収束定理を議論する.

定理 3.1 ([13]). C を H の空ではない閉凸部分集合とし, T_1, T_2 を $T_1T_2 = T_2T_1$ を満たす C から C への写像とする. $a, b \in (0,1)$ は $a \leq b$ を満たすとし, $\{a_n\}$ を $[a,b]$ の数列とする. $x_1 \in C$ とし, C の点列 $\{x_n\}$ を, 任意の $n \in \mathbb{N}$ について,

$$x_{n+1} = \frac{a_n}{2n} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i}^{i+1} T_1^i T_2^j x_n + (1-a_n)x_n = a_n M(n) x_n + (1-a_n)x_n$$

で生成する. $F = F(T_1) \cap F(T_2)$ とし, $A = A(T_1) \cap A(T_2) \neq \emptyset$, $j \in \{1,2\}$ に対して $I - T_j$ が原点において閉であることを仮定する. このとき, 次が成立する:

(1) $\{x_n\}$ は弱収束する部分列を持つ. 更に, $\{x_{n_l}\}$ を $\{x_n\}$ の弱収束する部分列とすれば, $\{x_{n_l}\}$ は F の要素に弱収束する.
(2) $F \subset A$ を仮定すれば, $\{x_n\}$ がある $z \in F$ に弱収束する.

証明. 任意の $v \in A$ を固定する. 任意の $n \in \mathbb{N}$ について $A \subset A(M(n))$ は明らかである. また, 補助定理 2.3 の (2.1) より, 任意の $n \in \mathbb{N}$ について,

$$0 \leq a_n(1-a_n)\|M(n)x_n - x_n\|^2 \leq \|x_n - v\|^2 - \|x_{n+1} - v\|^2 \tag{3.1}$$

が成り立つ. このことから, $\{\|x_n - v\|\}$ が収束することがわかる. また, 任意の $n \in \mathbb{N}$ について, $0 < a(1-b) \leq a_n(1-a_n)$ より,

$$\lim_{n\to\infty} \|M(n)x_n - x_n\|^2 = 0 \tag{3.2}$$

を得る. さらに,

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|a_n M(n)x_n + (1-a_n)x_n - x_n\| = a_n\|M(n)x_n - x_n\| \tag{3.3}$$

が成り立つため, (3.2), (3.3) より, $\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0$ がいえる. 任意の $n \in \mathbb{N}$ について, x_{n+1} を補助定理 2.5 における y_n とみなす. このとき, $\{x_n\}$ が有界であることから, 任意の $n \in \mathbb{N}_2$ について $i_n \in \mathbb{N}_0$ であり,

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \|T_1^{i_n} T_2^{i_n} x_n - x_n\| = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \|T_1^{i_n} T_2^{i_n+1} x_n - x_n\| = 0, \\ &\lim_{n\to\infty} \|T_1^{i_n+1} T_2^{i_n+1} x_n - x_n\| = 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

となる数列 $\{i_n\}_{n\in\mathbb{N}_2}$ が存在する.

はじめに (1) を示す. $\{x_n\}$ は有界なので弱収束する部分列を持つ. ここで, $\{x_{n_l}\}$ を $z \in H$ に弱収束する $\{x_n\}$ の部分列とする. $\{x_{n_l}\}$ が弱閉集合 C の点列であることから, $z \in C$ がいえる.

$z \in F = F(T_1) \cap F(T_2)$ を示すために, まず $z \in F(T_2)$ を示す. $T_1T_2 = T_2T_1$ と (3.4) より,

$$\lim_{l\to\infty} \|T_1^{i_{n_l}} T_2^{i_{n_l}} x_{n_l} - x_{n_l}\| = 0, \quad \lim_{l\to\infty} \|T_2(T_1^{i_{n_l}} T_2^{i_{n_l}} x_{n_l}) - T_1^{i_{n_l}} T_2^{i_{n_l}} x_{n_l}\| = 0$$

を得る. $\{x_{n_l}\}$ は $z \in C$ に弱収束し, $\lim_{l\to\infty} \|T_1^{i_{n_l}} T_2^{i_{n_l}} x_{n_l} - x_{n_l}\| = 0$ が成り立つため, $\{T_1^{i_{n_l}} T_2^{i_{n_l}} x_{n_l}\}$ も $z \in C$ に弱収束する. また, $\lim_{l\to\infty} \|T_2(T_1^{i_{n_l}} T_2^{i_{n_l}} x_{n_l}) - T_1^{i_{n_l}} T_2^{i_{n_l}} x_{n_l}\| = 0$ であり, $I - T_2$ が原点において閉であるため $z \in F(T_2)$ がいえる. 次に, $z \in F(T_1)$ を示す. 同様に,

$$\lim_{l\to\infty} \|T_1^{i_{n_l}} T_2^{i_{n_l}+1} x_{n_l} - x_{n_l}\| = 0, \quad \lim_{l\to\infty} \|T_1(T_1^{i_{n_l}} T_2^{i_{n_l}+1} x_{n_l}) - T_1^{i_{n_l}} T_2^{i_{n_l}+1} x_{n_l}\| = 0.$$

すなわち, $\{T_1^{i n_l} T_2^{i n_l+1} x_{n_l}\}$ は $z \in C$ に弱収束し, $\lim_{l\to\infty} \|T_1(T_1^{i n_l} T_2^{i n_l+1} x_{n_l}) - T_1^{i n_l} T_2^{i n_l+1} x_{n_l}\| = 0$ である. $I - T_1$ が原点において閉であるため $z \in F(T_1)$ がいえる. これより, $z \in F = F(T_1) \cap F(T_2)$ を得る. 以上より, (1) が示せた.

次に (2) を示す. (3.1) より, 任意の $v \in A$ について $\{\|x_n - v\|\}$ は収束する. $F \subset A$ なので, (1) と補助定理 2.2 より, $\{x_n\}$ の全ての弱収積点は等しくなる. このことから, $\{x_n\}$ は $z \in F$ に弱収束する. □

定理 3.1 より以下の結果を導くことができる.

定理 3.2 ([13]). C を H の空ではない閉凸部分集合とし, T_1, T_2 を $T_1T_2 = T_2T_1$ を満たす C から C への擬非拡大写像とする. $F = F(T_1) \cap F(T_2) \neq \emptyset$ とし, $j \in \{1, 2\}$ に対して $I - T_j$ が原点において閉とする. $a, b \in (0, 1)$ は $a \le b$ を満たすとし, $\{a_n\}$ を $[a, b]$ の数列とする. $x_1 \in C$ とし, C の点列 $\{x_n\}$ を, 任意の $n \in \mathbb{N}$ について,

$$x_{n+1} = a_n M(n) x_n + (1 - a_n) x_n$$

で生成する. このとき, $\{x_n\}$ はある $z \in F$ に弱収束する.

定理 3.3 ([13]). C を H の空ではない閉凸部分集合, T_1, T_2 を $T_1T_2 = T_2T_1$ を満たす C から C への非拡大写像とし, $F = F(T_1) \cap F(T_2) \neq \emptyset$ とする. $a, b \in (0, 1)$ は $a \le b$ を満たすとし, $\{a_n\}$ を $[a, b]$ の数列とする. $x_1 \in C$ とし, C の点列 $\{x_n\}$ を, 任意の $n \in \mathbb{N}$ について,

$$x_{n+1} = a_n M(n) x_n + (1 - a_n) x_n$$

で生成する. このとき, $\{x_n\}$ はある $z \in F$ に弱収束する.

以下は定理 3.1 および補助定理 2.6, 2.7 から導かれる結果である.

定理 3.4 ([13]). C を H の空ではない閉凸部分集合とし, T_1, T_2 を $T_1T_2 = T_2T_1$ を満たす C から C への写像とする. T_1 を λ–*hybrid* 写像, T_2 を μ–*hybrid* 写像とし, $F = F(T_1) \cap F(T_2) \neq \emptyset$ とする. $a, b \in (0, 1)$ は $a \le b$ を満たすとし, $\{a_n\}$ を $[a, b]$ の数列とする. $x_1 \in C$ とし, C の点列 $\{x_n\}$ を, 任意の $n \in \mathbb{N}$ について,

$$x_{n+1} = a_n M(n) x_n + (1 - a_n) x_n$$

で生成する. このとき, $\{x_n\}$ はある $z \in F$ に弱収束する.

定理 3.5 ([13]). C を H の空ではない閉凸部分集合とし, T_1, T_2 を $T_1T_2 = T_2T_1$ を満たす C から C への写像とする. T_1, T_2 は条件 (E) を満たす写像とし, $F = F(T_1) \cap F(T_2) \neq \emptyset$ とする. $a, b \in (0, 1)$ は $a \le b$ を満たすとし, $\{a_n\}$ を $[a, b]$ の数列とする. $x_1 \in C$ とし, C の点列 $\{x_n\}$ を, 任意の $n \in \mathbb{N}$ について

$$x_{n+1} = a_n M(n) x_n + (1 - a_n) x_n$$

で生成する. このとき, $\{x_n\}$ はある $z \in F$ に弱収束する.

4. 考察

本節では, ユークリッド空間で, 主結果の理解を深めるための例を提示し考察する. なお, ユークリッド空間では, 点列の強収束と弱収束の概念が一致するため, 単に収束と表現する.

定理 3.1 では, 写像 T_1 と T_2 が擬非拡大写像であることは必要ではなかった. しかし, 定理 3.2 から定理 3.5 は, 擬非拡大写像 T_1, T_2 についての結果である. そこで, 定理 3.1 の条件を満たし, T_1 が擬非拡大写像ではない例をはじめに紹介する.

例 4.1 ([13]). $D = \{x = (s, t) \in \mathbb{R}^2 : s \in [0, 1],\ t \in [-s, s]\}$ とし, D から D への連続な写像 T_1, T_2 を次の様に定義する: $x = (s, t) \in D$ について

$$T_1 x = T_1(s, t) = \left(\frac{1}{2}\left(s + |t|\right), t\right), \quad T_2 x = T_2(s, t) = (s, -t).$$

この例では, $F = F(T_1) \cap F(T_2), A = A(T_1) \cap A(T_2)$ としたとき,

$$\begin{aligned} &F(T_1) = \{(x_1, x_2) \in D : x_1 = |x_2|\}, && F(T_2) = \{(x_1, x_2) \in D : x_2 = 0\}, \\ &A(T_1) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq 0\}, && A(T_2) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}, \\ &F = \{(0, 0)\}, && A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq 0,\ x_2 = 0\} \end{aligned}$$

が成立する. このことから, 次のことが確認できる:

- D は $\mathbb{R}^2$ の空ではないコンパクトな凸部分集合である;
- $F(T_1) \not\subset A(T_1)$ であるから, T_1 は擬非拡大写像ではない;
- T_2 は非拡大写像であり, $F(T_2) \neq \emptyset$ であるから, T_2 は擬非拡大写像である;
- T_1, T_2 は連続なので, $I - T_1$ と $I - T_2$ は原点において閉である;
- $T_1T_2 = T_2T_1$, $\emptyset \neq F \subset A$ が成立する.

すなわち, T_1 は擬非拡大写像ではなく, 定理 3.1 の条件はすべて満たされている. したがって, 定理 3.1 の手順で点列 $\{y_n\}$ を生成すると, この点列は F の点に収束する. この $\{y_n\}$ が $(0, 0) \in F \subset A$ に収束することも明らかである.

定理 3.1 の (1) を示すときに, 条件 $F \subset A$ は不要であった. これは, $F \subset A$ の条件がなくても, 定理 3.1 の点列 $\{x_n\}$ はある $z \in F$ に弱収束する部分列を持つことを意味する. 本稿の内容をより深く理解するために, 定理 3.1 から $F \subset A$ の条件を除いた場合について考察する.

例 4.2 ([13]). $D = [0, 1]$ とする. D から D への連続な写像 T_1, T_2 を次の様に定義する:

$$s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ のとき}, T_1 s = 2s^2, \quad s \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \text{ のとき}, T_1 s = 2\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2},$$
$$s \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ のとき}, T_2 s = 4s^3, \quad s \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \text{ のとき}, T_2 s = 4\left(s - \frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{2}.$$

このとき, 次のことが容易に分かる:

$$\begin{aligned} &F(T_1) = F(T_2) = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}, && A(T_1) = A(T_2) = (-\infty, 0], \\ &F = F(T_1) \cap F(T_2) = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}, && A = A(T_1) \cap A(T_2) = (-\infty, 0]. \end{aligned}$$

$s \in [0, 1/2]$ のとき

$$(T_1T_2)s = 2(4s^3)^2 = 32s^6 = 4(2s^2)^3 = (T_2T_1)s.$$

$s \in (1/2, 1]$ のとき

$$(T_1T_2)s = 2\left(4\left(s - \frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = 32\left(s - \frac{1}{2}\right)^6 + \frac{1}{2},$$
$$(T_2T_1)s = 4\left(2\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{2} = 32\left(s - \frac{1}{2}\right)^6 + \frac{1}{2}.$$

ここまでの議論から, 次のことを確認できる:

- D は $\mathbb{R}$ の空ではないコンパクトな凸部分集合である;
- T_1 と T_2 はどちらも擬非拡大写像ではない;
- T_1, T_2 は連続なので, $I - T_1$ と $I - T_2$ は原点において閉である;
- $T_1T_2 = T_2T_1$, $\emptyset \neq A$ が成立する.

したがって, $F \subset A$ を除いた, 定理 3.1 のすべての条件が満たされている. 定理 3.1 の手順で点列 $\{x_n\}$ を生成すると, 定理 3.1 (1) の主張は点列 $\{x_n\}$ が F の要素に収束する部分列をもつことである. 本例の T_1, T_2 について, 次のことを注意する:

- ○ T_1, T_2 を $[0, 1/2]$ 上の自己写像とみなせる. このとき, $F = \{0, 1/2\}, A = (-\infty, 0]$;
- ○ T_1, T_2 を $[1/2, 1]$ 上の自己写像とみなせる. このとき, $F = \{1/2, 1\}, A = (-\infty, 1/2]$.

このことから, 次のことを容易に確認できる:

- ○ $x_1 \in [0, 1/2)$ であるとき, $\{x_n\}$ は $0 \in F \cap A$ に収束する;
- ○ $x_1 \in [1/2, 1)$ であるとき, $\{x_n\}$ は $1/2 \in F$ に収束する;
- ○ $x_1 = 1$ のとき, $\{x_n\}$ は $1 \in F$ に収束する.

すなわち, 点列 $\{x_n\}$ 自身が F の要素に収束する. そして, 本例は, 定理 3.1 から $F \subset A$ を除いた場合, $\{x_n\}$ がある $z \in F$ に収束しても $z \in A$ とは限らないことを示す具体例になっている.

謝辞. 本研究は JSPS 科研費 19K03632, 19H01479 の助成を受けたものです.

参考文献

[1] K. Aoyama, S. Iemoto, F. Kohsaka and W. Takahashi, *Fixed point and ergodic theorems for λ-hybrid mappings in Hilbert spaces*, J. Nonlonear Convex Anal. **11** (2010), 335–343.

[2] S. Atsushiba, S. Iemoto, R. Kubota and Y. Takeuchi, *Convergence theorems for some classes of nonlinear mappings in Hilbert space*, Linear Nonlinear Anal. **2** (2016), 125–153.

[3] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Approximating common fixed points of two nonexpansive mappings in Banach spaces*, Austral. Math. Soc. **57** (1998), 117–127.

[4] S. Atsushiba and W. Takahashi, *Nonlinear ergodic theorems without convexity for nonex- pansive semigroups in Hilbert spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **14** (2013), 209–219.

[5] J. B. Baillon, *Un theoreme de type ergodique pour les contractions non lineaires dans unespace de Hilbert*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B **280** (1975), 1511–1514.

[6] L. P. Belluce and W. A. Kirk, *Fixed-point theorems for families of contraction mappings*, Pacific J. Math. **18** (1966), 213–217.

[7] F. E. Browder, *Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **54** (1965), 1041–1044.

[8] R. E. Bruck, *A common fixed point theorem for commuting family of nonexpansive mappings*, Pacific J. Math. **53** (1974), 59–71.

[9] R. DeMarr, *Common fixed points for commuting contraction mappings*, Pacific J Math. **13** (1963), 1139–1141.

[10] K. Eshita and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for commutative semigroups ofcontinuous linear operators on Banach spaces*, Taiwanese J. Math. **9** (2005), 531–550.

[11] J. G. Falset, E. L. Fuster and T. Suzuki, *Fixed point theory for a class of generalized nonexpansive mappings*, J.Math. Anal. Appl. **375** (2011), 185–195.

[12] B. Halpern, *Fixed points of nonexpanding maps*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1976), 959–961.

[13] T. Ibaraki, S.Kajiba and Y. Takeuchi, *A weak convergence theorem for common fixed points of two nonlinear mappings in Hilbert spaces*, Abstr. Appl. Anal. **2022** (2022), Article ID 9568060**,** 9 pages.

[14] T. Ibaraki and Y. Takeuchi, *New convergence theorems for common fixed points of a wide range of nonlinear mappings*, J. Nonlinear Anal. and Optim. **9** (2018), 95–114.

[15] T. Ibaraki and Y. Takeuchi, *A mean convergence theorem finding a common attractive point of two nonlinear mappings*, Yokohama Math. J. **66** (2020), 61–77.

[16] S. Ishikawa, *Common fixed points and iteration of commuting nonexpansive mappings*, Pacific J. Math. **80** (1979), 493–501.

[17] P. Kocourek, W. Takahashi and J.-C. Yao, *Fixed point theorems and weak convergence theorems for genelalized hybrid mappings in Hilbert spaces*, Taiwanese J. Math. **14** (2010), 2497–2511.

[18] F. Kohsaka *Existence and approximation of common fixed points of two hybrid mappings in Hilbert spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **16** (2015), 2193–2205.

[19] F. Kohsaka and W. Takahashi *Fixed point theorems for class of nonlinear mappings related to maximal monotone operator in Banach spaces*, Arch. Math. (Besel) **91** (2008), 166–177.

[20] W. R. Mann, *Mean value methods in iteration*, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 506–510.

[21] T. Shimizu and W. Takahashi, *Strong convergence to common fixed points of families of nonexpansive mappings*, J. Math. Anal. Appl. **211** (1997), 71–83.
[22] T. Suzuki, *Strong convergence theorem to common fixed points of two nonexpansive mappings in general Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **3** (2002), 381–391.
[23] T. Suzuki, *Convergence theorems to common fixed points for infinite families of n onexpansive mappings in strictly convex Banach spaces*, Nihonkai Math. J. **14** (2003), 43–54.
[24] W. Takahashi, *Iterative methods for approximation of fixed points and applications*, J. Oper. Res. Soc. Japan **43** (2000), 87–108.
[25] W. Takahashi, *Fixed point theorems for new nonlinear mappings in a Hilbert space*, J. Nonlinear Convex Anal. **11** (2010), 79–88.
[26] W. Takahashi and Y. Takeuchi, *Nonlinear ergodic theorem without convexity for generalized hybrid mappings in a Hilbert space*, J. Nonlinear Convex Anal. **12** (2011), 399–406.
[27] Y. Takeuchi, *An iteration scheme finding a common fixed point of commuting two nonexpansive mappings in general Banach spaces*, Linear and Nonlinear Anal. **2** (2016), 317–327.