ある球完備性をもつボール空間における不動点定理

Fixed point theorem in a spherically complete ball space

豊田 昌史

Masashi Toyoda

東邦大学理学部, 274-8510 千葉県船橋市三山 2-2-1
Faculty of Science, Toho University Miyama 2-2-1, Funabashi, Chiba 274-8510, Japan

1 序

次は Caristi の不動点定理として知られる ([1]).

定理 1. (X, d) を完備距離空間とする．$\varphi: X \to [0, \infty)$ を下半連続とする．$T: X \to X$ を

$$\forall x \in X,\ d(x, Tx) \le \varphi(x) - \varphi(Tx) \tag{1}$$

をみたす写像とする．このとき, T は不動点をもつ．

T が係数 $r \in [0, 1)$ の縮小写像

$$d(Tx, Ty) \le rd(x, y) \quad (x, y \in X)$$

であるとき, φ を各 $x \in X$ に対して

$$\varphi(x) = \frac{1}{1-r} d(x, Tx)$$

で定める写像とすれば, T は (1) をみたす．したがって, 定理 1 から縮小写像の不動点の存在性を導ける．また, 定理 1 からは自己写像とは限らない縮小写像, すなわち, 全空間 X の部分集合から X への縮小写像の不動点の存在性も導ける．

定理 1 の証明は, Zorn の補題を用いるものがよく知られている ([8, 3]). 近年は, 従属選択公理を用いた証明も紹介されている ([4, 9]).

さらに, 定理 1 の証明で, 選択公理を用いない証明もある ([6]). 証明では, 次の不動点定理を用いる.

定理 2. 順序集合 X の任意の空でない鎖 C に対して上界が存在し, しかも上界をひとつ選び出せる. すなわち, X の任意の空でない鎖 C ごとに C の上界 $p(C)$ を選び出せるとする. f を X から X の中への写像とし, すべての $x \in X$ に対して $x \leq f(x)$ となるものとする. このとき f は不動点をもつ.

これを用いると, 定理 1 は次のように証明できる: X の要素 x, y に対して, 順序を

$$x \leq y \Longleftrightarrow d(x,y) \leq \varphi(x) - \varphi(y)$$

で定める. C を X の空でない鎖とする. $C = \{x_\alpha\}$ とおくと, C のある上界 z が存在する (補助定理 6 [11]). $p(C) = z$ とおけば C から X への写像 p を定義できる. T の仮定から, 任意の $x \in X$ に対して $x \leq Tx$ である. したがって, 定理 2 より T の不動点が存在する.

このアイデアに触発されて, 論文 [7] を上梓した. 2 節で, その動機を説明する. また, 3 節では, 論文 [7] の定理の証明の概略を示す. その際, 距離の対称性をどこで用いるかに特に注意する.

2　ボール空間における不動点定理

X を空でない集合とする. $\mathcal{B} = \{B_x \mid x \in X\}$ とする. ここで B_x は X の空でない部分集合である. 集合族 $\mathcal{B}$ に $B_1 \leq B_2 \Longleftrightarrow B_1 \supset B_2$ で順序を定める. このとき $(X, \mathcal{B})$ をボール空間 (ball space) とよぶ. $\mathcal{B}$ の各要素 B_x を単に球 (ball) と呼ぶ. 定理 1 を, ボール空間 (ball space) における不動点定理から導出する試みもなされている ([10]). 実際, [10] では, 次の不動点定理を用いて定理 1 を証明している.

定理 3. *Every self-contractive mapping on a spherically complete ball space has a fixed point.*

定理 3 の証明で, どのように Zorn の補題が用いられているかをみる: ボール空間 $(X, \mathcal{B})$ は, $\mathcal{B}$ の任意の鎖が共通部分をもつとき, spherically complete という. また, X から X への写像 T が self-contractive であるとは, $B_{Tx} \subset B_x$ であり, また

$$x \neq Tx \Longrightarrow B_{Tx} \subsetneq B_x$$

が成り立ち, さらに, $\mathcal{C} = \{B_x \mid x \in S\}$ を $T(S) \subset S$ をみたす $\mathcal{B}$ の鎖とするとき

$$z \in \bigcap \mathcal{C} \Longrightarrow B_z \subset \bigcap \mathcal{C}$$

が成り立つときをいう. そこで

$$\mathcal{F} = \{\mathcal{C} \mid \mathcal{C} \text{ は鎖}, \mathcal{C} = \{B_x \mid x \in S\}, T(S) \subset S\}$$

とおく. $\{\mathcal{C}_\alpha\}$ を $\mathcal{F}$ の鎖とする. 順序は集合の包含関係である. このとき $\bigcup_\alpha \mathcal{C}_\alpha$ は $\{\mathcal{C}_\alpha\}$ の上界である. 実際, $\bigcup_\alpha \mathcal{C}_\alpha = \{B_x \mid x \in S_0\}$ とする. $S_0 = \bigcup_\alpha S_\alpha$ である. このとき $T(S_0) \subset S_0$ である. 確かに $x \in S_0$ とすると $B_x \in \bigcup_\alpha \mathcal{C}_\alpha$ より, ある α_0 が存在して $B_x \in \mathcal{C}_{\alpha_0}$ である. $x \in S_{\alpha_0}$ より $Tx \in S_{\alpha_0} \subset S_0$ である.

Zorn の補題より, ある $\mathcal{F}$ の極大 $\mathcal{C}_0$ が存在する. spherically complete 性より $\bigcap \mathcal{C}_0 \neq \emptyset$ である. そこで $z \in \bigcap \mathcal{C}_0$ とすると

$$B_z \subset \bigcap \mathcal{C}_0$$

である. $z \neq Tz$ とすると $B_{Tz} \subsetneq B_z$ である. したがって

$$\mathcal{C}_0 \subsetneq \mathcal{C}_0 \cup \{B_{T^n z} \mid n = 1, 2, \ldots\}$$

であるが, これは極大性に矛盾する.

以上のように, 定理 3 は Zorn の補題を用いて証明される. また, 定理 3 を用いて定理 1 を導ける ([10]). 次の問が導かれる.

「選択公理を用いない 定理 1 の証明が知られている. そこで, ボール空間における不動点定理を用いた証明も, 選択公理を必要としないものでありたい. そのためには, ボール空間における不動点定理自身, その証明に選択公理を要しないものを構成する必要があるのではないか.」

この問題意識から得た不動点定理が次である. 定理 2 の写像 p のアイデアを参考にした. 証明には選択公理を用いない. また, 定理 1 も導出できる ([7]).

定理 4. $(X, \mathcal{B})$ をボール空間とし, 任意の $x \in X$ に対して $x \in B_x$ が成り立つとする. X から X への写像 T を, $x \neq Tx$ をみたす任意の $x \in X$ に対して $B_{Tx} \subsetneq B_x$ をみたす写像とする. $\mathit{\Gamma} = \{\mathcal{C} \mid \mathcal{C} \subset \mathcal{B},\ \mathcal{C} \text{ は鎖 }\}$ とする. Γ から X への写像 p を, 任意の $\mathcal{C} \in \mathit{\Gamma}$ に対して

$$B_{p(\mathcal{C})} \subset \bigcap \mathcal{C}$$

をみたす写像とする. このとき T は不動点をもつ.

3　距離の対称性

X を集合とし, d を X から $[0, \infty)$ への関数とする. (X, d) が距離空間であるというとき, 距離の公理は通常, 対称性

$$d(x, y) = d(y, x)$$

を仮定する. 距離の対称性は, 例えばコーシー列のような基本概念の計算でも用いる.

命題 5. 距離空間 (X, d) の点列 $\{x_n\}$ に対して, 次は同値である.

(A) $\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0,\ n_0 \leq m, n \Longrightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon$
(B) $\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0,\ n_0 \leq m \leq n \Longrightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon$

証明. (A) $\Longrightarrow$ (B) が成り立つのは自明である. (B) $\Longrightarrow$ (A) を示す. $\epsilon > 0$ とする. (B) より, ある n_0 が存在して $n_0 \leq i \leq j \Longrightarrow d(x_i, x_j) < \epsilon$ が成り立つ. $n_0 \leq m, n$ とする. $m \leq n$ の場合, $d(x_m, x_n) < \epsilon$ である. $n < m$ の場合, $d(x_n, x_m) < \epsilon$ である. このとき, 距離の対称性より

$$d(x_n, x_m) = d(x_m, x_n)$$

であるから $d(x_m, x_n) < \epsilon$ である. すなわち (A) が成り立つ. □

命題 5 でわかるように, 対称性の成り立つ距離空間ではコーシー列の定義を (A) と (B) のどちらで定義してもよい. 一方, 対称性の成り立たない距離の入った空間では, 両者は同値となるわけではない.

近年, 対称性を仮定しない距離空間での不動点定理も紹介されている (例えば, [5] の 7.4.4). 本節では, 距離空間における不動点定理である定理 1 を, 定理 4 から導く際に, どこで距離の対称性を用いるかをみる: 各 $x \in X$ に対して

$$B_x = \{y \in X \mid d(x, y) \leq \varphi(x) - \varphi(y)\}$$

とおく. $\mathcal{B} = \{B_x \mid x \in X\}$ とおくと $(X, \mathcal{B})$ はボール空間となる. 実際 $B_x \in \mathcal{B}$ とすると $x \in B_x$ より B_x は空でない. また, 任意の $x \in X$ に対して $B_{Tx} \subset B_x$ が成り立つ. 実際 $y \in B_{Tx}$ とすると $d(Tx, y) \leq \varphi(Tx) - \varphi(y)$ である. これと (1) より

$$d(x, y) \leq d(x, Tx) + d(Tx, y) \leq (\varphi(x) - \varphi(Tx)) + (\varphi(Tx) - \varphi(y)) = \varphi(x) - \varphi(y)$$

である．すなわち $y \in B_x$ である．また $x \neq Tx$ とすると $x \in B_x \setminus B_{Tx}$ が成り立つ．実際 $x \in B_{Tx}$ とすると

$$d(Tx, x) \leq \varphi(Tx) - \varphi(x)$$

である．距離の対称性から

$$d(Tx, x) = d(x, Tx)$$

であるから

$$d(x, Tx) \leq \varphi(Tx) - \varphi(x)$$

である．これと (1) より $d(x, Tx) = 0$ を得る．すなわち $x = Tx$ である．これは矛盾である．以上より $B_{Tx} \subsetneq B_x$ が成り立つ．

$\mathcal{C} = \{B_x \mid x \in C\}$ を $\mathcal{B}$ の鎖とする．ここで C は全順序集合で

$$x \leq y \Longleftrightarrow B_x \supset B_y \quad (x, y \in C)$$

である．$C = \{x_\alpha \in X \mid \alpha \in D\}$ とおく．ここで D は全順序集合である．X の鎖 C は C の上界に収束する (補助定理 6 [11])．すなわち, 極限を $z = \lim_{\alpha \in D} x_\alpha$ とかくと, これは上界なので $x_\alpha \leq z$, すなわち $B_z \subset B_{x_\alpha}$ が任意の $\alpha \in D$ に対して成り立つ．ここで $\mathit{\Gamma} = \{\mathcal{C} \mid \mathcal{C} \subset \mathcal{B}, \mathcal{C}$ は鎖 $\}$ とおく．また写像 $p\colon \mathit{\Gamma} \to X$ を

$$p(\mathcal{C}) = z \quad (\mathcal{C} \in \mathit{\Gamma})$$

で定義する．このとき

$$B_{p(\mathcal{C})} \subset \bigcap_{\alpha \in D} B_{x_\alpha} = \bigcap \mathcal{C}$$

が成り立つ．定理 4 より T は不動点をもつ．

参考文献

[1] J. Caristi, *Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions*, Transactions of the American Mathematical Society, 215 (1976), 241–251.

[2] H. Ćmiel, F.-V. Kuhlmann and K. Kuhlmann, *A basic framework for fixed point theorems: ball spaces and spherical completeness*, 2020; avalilable at: https://arxiv.org/pdf/1905.09930.pdf].

[3] D. Downing and W. A. Kirk, *A generalization of Caristi's theorem with applications to nonlinear mapping theory*. Pacific Journal of Mathematics, 69 (1977), 339-–346.

[4] W.-S. Du, *A simple proof of Caristi's fixed point theorem without using Zorn's lemma and transfinite induction*, Thai Journal of Mathematics, 14 (2016), 259-–264.

[5] J. Goubault-Larrecq, Non-Hausdorff Topology and Domain Theory, Cambridge University Press, 2013.

[6] J. Jachymski, Order-Theoretic Aspects of Metric Fixed Point Theory. In: W. A. Kirk, B. Sims (eds) Handbook of Metric Fixed Point Theory. Springer, Dordrecht, 2001.

[7] Y. Kimura and M. Toyoda, *Fixed point theorem in ball spaces and Caristi's fixed point theorem*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis. An International Journal, 23 (2022), 185–189.

[8] W. A. Kirk, *Caristi's fixed point theorem and metric convexity*, Colloquium Mathematicae, 36 (1976), 81–86.

[9] W. M. Kozlowski, *A purely metric proof of the Caristi fixed point theorem*, Bulletin of the Australian Mathematical Society, 95 (2017), 333–337. Forum Math. 27 (2015), 303–327.

[10] F.-V. Kuhlmann, K. Kuhlmann and M. Paulsen, *The Caristi-Kirk fixed point theorem from the point of view of ball spaces*, Journal of Fixed Point Theory and Applications, 20 (2018), Art. 107.

[11] 豊田昌史, Caristi の不動点定理と Bourbaki-Kneser の不動点定理, 京都大学数理解析研究所講究録, 2194 (2021), 97–107.