合流型推移をもつ決定過程
— ある種の最大加法型評価について —

九州工業大学・大学院工学研究院　藤田 敏治
Toshiharu Fujita
Graduate School of Engineering, Kyushu Institute of Technology

1　はじめに

合流型推移 (Converging Branch Systems) とは，ノンシリアル動的計画 ([1, 7]) におけるノンシリアルな（非直列型の）状態推移の一つである．他に，非決定推移 ([2]) や相互依存型決定過程 ([3, 4, 5]) に代表される分岐型推移 (Diverging Branch Systems)，そして分岐・再合流型推移が 2 種 (Feedforward Loop Systems, Feedback Loop Systems) ある．本報告では，合流型の確定的推移をもつ有限段決定過程 ([6]) 上で，最大加法型評価の最小化問題を考える．ただし，ここで扱う評価は，最小化に際してある種の優先順位を持つ場合に限り，より一般の場合については今後の課題としたい．

2　定式化

合流型推移とは，複数の初期状態から開始し，状態が推移していく途中に 2 つ以上の状態から 1 つの状態へと合流する推移が存在するものである．一般には，終端状態も複数存在して構わないが，その場合，各終端状態ごとに推移の流れが独立しており，各々が個別の合流型推移と解釈できる．よって，最後は 1 つの終端状態に達し推移が終了する場合についてのみ以下では考えるものとする．

ここで，X を有限状態空間，状態変数を $x_1, x_2, \ldots, x_N \in X$ であらわし，$x_1, x_2, \ldots, x_L$ $(2 \leq L < N)$ は初期状態，x_N は終端状態とする．状態 x_i から状態 x_j へ推移するとき $e_{ij} = 1$，そうでないときは $e_{ij} = 0$ とおき，行列 $E = (e_{ij})$ を定める．さらに，x_j へ推移する状態のインデックス集合を $I_j = \{i \,|\, e_{ij} = 1\}$ とおく．

このとき，初期状態 $x_1, x_2, \ldots, x_L$ に対する次の決定過程問題を考える．

$$
\begin{aligned}
\text{(P)} \qquad \text{minimize} \quad & \bigvee_{l=1,\cdots,L} [r_l(x_l, u_l) + \cdots + k(x_N)] \\
\text{subject to} \quad & x_n = f_n(x_m, u_m \,|\, m \in I_n) \quad n = L+1, L+2, \ldots, N \\
& u_n \in U_n(x_n) \quad n = 1, 2, \ldots, N-1
\end{aligned}
$$

ただし，U は有限決定空間で $U(x_n) \subset U$ は状態 $x_n \in X$ に対し選択可能な決定全体を表し，$r_n : \mathrm{Gr}(U) \to \mathbf{R}$, $k : X \to \mathbf{R}$ はぞれぞれ利得関数，終端利得関数とする．なお，$\mathrm{Gr}(U)$ は U のグラフを表す：

$$\mathrm{Gr}(U) = \{(x, u) \in X \times U \,|\, u \in U(x)\}.$$

また，状態 x_n への推移法則は，$I_n = \{m_1, m_2, \ldots, m_{M_n}\}$ $(m_1 < m_2 < \cdots < m_{M_n})$ に対し

$$x_n = f_n(x_{m_1}, u_{m_1}, x_{m_2}, u_{m_2}, \ldots, x_{m_M}, u_{m_{M_n}})$$

で与えられ，これを $x_n = f_n(x_m, u_m \,|\, m \in I_n)$ と表している．以後，本稿においては，一般に添え字集合 $I = \{m_1, m_2, \ldots, m_M\}$ $(m_1 < m_2 < \cdots < m_M)$ が与えられた際，簡略化のため，状態・決定の交互列：

$$x_{m_1},\, u_{m_1},\, x_{m_2},\, u_{m_2}, \ldots,\, x_{m_M},\, u_{m_M}$$

を $(x_m, u_m \,|\, m \in I)$ と表すこととする．なお，一般に $1 \le m \le N-1$ に対し

$$r_m(x_m, u_m) + \cdots + k(x_N)$$

と記した場合，状態 x_m から終端状態 x_N へ推移していく経路上でとった利得の和を意味するものとする（合流型推移ではこの経路は一意に定まる）．以後，この利得和を状態 x_m からのパス利得と呼び，特に初期状態から終端状態までのものは初期状態からのパス利得と呼ぶこととする．そして，ここでの最大加法型評価最小化：

$$\text{minimize} \quad \bigvee_{l=1,\cdots,L} [r_l(x_l, u_l) + \cdots + k(x_N)]$$

は，すべての初期状態からのパス利得に関する優先順位付き最小化をあらわすものとする．これは，各パス利得に優先順位が与えられており，優先順位の高いパス利得は，それより優先順位が低いパス利得全体の最大値より，優先して最小化されることを意味する．たとえば，初期状態の添え字の値が小さいほど優先順位が高いとした場合には，各 $n < L$ に対し

$$\bigvee_{l=1,\cdots,n} [r_l(x_l, u_l) + \cdots + k(x_N)]$$

の最小化が

$$\bigvee_{l=n+1,\cdots,L} [r_l(x_l, u_l) + \cdots + k(x_N)]$$

の最小化より優先されることとなる．

例 2.1 $N = 8,\ L = 4$ とし $e_{16} = e_{25} = e_{35} = e_{48} = e_{57} = e_{68} = e_{78} = 1$ (それ以外の (i, j) に対しては $e_{ij} = 0$) とする．初期状態 x_1, x_2, x_3, x_4 が与えられたとき，x_5, x_6, x_7, x_8 は次の推移により定まる：

$$\begin{aligned}
x_5 &= f_5(x_2, u_2, x_3, u_3), \quad x_2 \in X,\ x_3 \in X,\ u_2 \in U(x_2),\ u_3 \in U(x_3) \\
x_6 &= f_6(x_1, u_1), \quad x_1 \in X,\ u_1 \in U(x_1) \\
x_7 &= f_7(x_5, u_5), \quad x_5 \in X,\ u_5 \in U(x_5) \\
x_8 &= f_8(x_4, u_4, x_6, u_6, x_7, u_7), \\
&\qquad\qquad x_4 \in X,\ x_6 \in X,\ x_7 \in X,\ u_4 \in U(x_4),\ u_6 \in U(x_6),\ u_7 \in U(x_7).
\end{aligned}$$

図 1 は，この合流型推移をもつ決定過程の状態推移図を示したものである．また，ここでの初期状態からのパス利得は

$$\begin{aligned}
& r_1(x_1, u_1) + r_6(x_6, u_6) + k(x_8) \\
& r_2(x_2, u_2) + r_5(x_5, u_5) + r_7(x_7, u_7) + k(x_8) \\
& r_3(x_3, u_3) + r_5(x_5, u_5) + r_7(x_7, u_7) + k(x_8) \\
& r_4(x_4, u_4) + k(x_8)
\end{aligned}$$

となる．

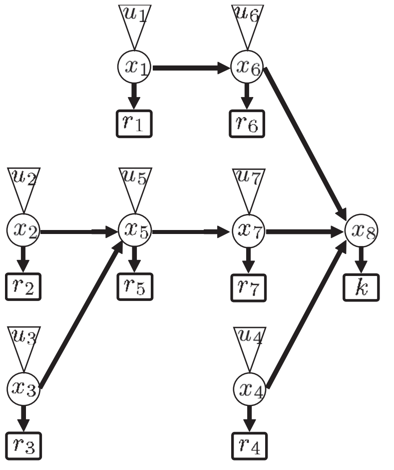

図 1: 状態推移図

3　部分問題の構成

終端状態を根とみなした状態ツリー（例えば図 1 において，状態部分をノード，x_8 のノードを根とみなしたツリー）において，深さ優先探索を行う際にたどる順で，状態変数を 1 つずつ付加して部分問題群を構成する．なお，深さ優先探索を行う際，複数の選択肢（枝）がある場合に選ぶ枝の順序はパス利得の優先順位が高いほうから選ぶものとする．このとき，必要に応じて添え字を付け替えることにより，x_N から付加する順に並べた状態変数の添え字を

$$N \ \rightarrow\ N-1 \ \rightarrow\ N-2 \ \rightarrow\ \cdots \ \rightarrow\ 2 \ \rightarrow\ 1$$

とする（この付け替えは一般性を失わせるものではない）．また，初期状態の添え字が「1 以上 L 以下」とあらわせなくなるため，初期状態に対応する添え字の集合 I_{Init} を導入する．

このとき，$x_n, x_{n+1}, \ldots, x_N$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$ に対応して，パラメータ λ を埋め込んだ次の部分問題群を考え，対応する最適値関数 v^n $(n = 1, 2, \ldots, N)$ を定義する．

(S-1) $n = N$ のとき

終端状態 x_N に対しては

$$v^N(x_N, \lambda) \ = \ \lambda + k(x_N), \quad x_N \in X.$$

以後，

$$J_n \ = \ \bigcup_{l=n+1}^{N} \{j \in I_l \,|\, j < n\}$$

$$(\dagger) : \begin{cases} u_l \in U(x_l), \quad l = n, n+1, \ldots, N-1 \\ x_{l+1} = f_{l+1}(x_m, u_m \,|\, m \in I_{l+1}), \quad l = n, n+1, \ldots, N-1 \end{cases}$$

とする．$x_n, x_{n+1}, \ldots, x_N$ に対応する部分問題群を考える際，状態変数 x_l $(l > n)$ が状態 $x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{l-1}$ および決定 $u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{l-1}$ のみでは定まらない場合，値関数には，必要な情報（状

態と決定）をパラメータとして与えなければならない．その際に必要となるパラメータの添え字集合が J_n である．

さて，最適値関数の定義に戻ると

(S-2) 一般に $l_1 \le n \le N-1$ のとき

ここで，l_1 は $N, N-1, N-2, \ldots$ とたどった際，最初に現れる初期状態の添え字である．すなわち，

$$l_1 \;=\; \max\left(\{1, 2, \ldots, N\} \cap I_{\mathrm{Init}}\right).$$

このとき，状態列 $x_n, x_{n+1}, \ldots, x_N$ に対しては

$$v^n(x_n, \lambda; (x_m, u_m \,|\, m \in J_n)) \;=\; \min_{u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{N-1}; (\dagger)} \Big[\lambda + r_n(x_n, u_n) + \cdots + k(x_N)\Big] \qquad x_n \in X.$$

(S-3) $l_2 \le n \le l_1 - 1$ のとき

ここで，l_2 は $N, N-1, N-2, \ldots$ とたどった際，2 番目に現れる初期状態の添え字である．すなわち，

$$l_2 \;=\; \max\left(\{1, 2, \ldots, l_1 - 1\} \cap I_{\mathrm{Init}}\right).$$

このとき，状態列 $x_n, x_{n+1}, \ldots, x_N$ に対しては

$$\begin{aligned} v^n(x_n, \lambda; (x_m, u_m \,|\, m \in J_n)) \;=\; \min_{u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{N-1}; (\dagger)} \Big[& \{\lambda + r_n(x_n, u_n) + \cdots + k(x_N)\} \\ & \vee \{r_{l_1}(x_{l_1}, u_{l_1}) + \cdots + k(x_N)\}\Big] \\ & \qquad x_n \in X. \end{aligned}$$

(S-4) より一般に $n < N$ のとき

状態列 $x_n, x_{n+1}, \ldots, x_N$ に対し

$$\begin{aligned} v^n(x_n, \lambda; (x_m, u_m \,|\, m \in J_n)) \;=\; \min_{u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{N-1}; (\dagger)} \Big[& \{\lambda + r_n(x_n, u_n) + \cdots + k(x_N)\} \\ & \vee \{r_{l_t}(x_{l_t}, u_{l_t}) + \cdots + k(x_N)\} \\ & \qquad \vdots \\ & \vee \{r_{l_1}(x_{l_1}, u_{l_1}) + \cdots + k(x_N)\}\Big] \\ & \qquad x_n \in X. \end{aligned}$$

ただし，$N, N-1, N-2, \ldots, n-1$ とたどった際に現れる初期状態の添え字を，順に $l_1, l_2, \ldots, l_t$ とおいた．すなわち，

$$l_\tau \;=\; \max\left(\{1, 2, \ldots, l_{\tau-1} - 1\} \cap I_{\mathrm{Init}}\right), \quad \tau = 1, 2, \ldots, L, \; l_0 = N$$

$$t \;=\; \min\{\tau \,|\, l_\tau > n\}$$

4 再帰式の導出

ここでは，再帰的に解を求める方法について考える．次の命題 ([6] の命題 3.1) は，添え字集合 J_n に関する再帰的関係を与える．

命題 4.1 $J_N = \phi$ とおく．このとき，J_n $(n = 1, 2, \ldots, N-1)$ に対し
(i) $n+1 \notin I_{\mathrm{Init}}$ のとき

$$J_n \;=\; J_{n+1} \cup \{j \in I_{n+1} \,|\, j < n\}$$

が成り立つ．
(ii) $n+1 \in I_{\mathrm{Init}}$ のとき

$$J_n \;=\; J_{n+1} \setminus \{n\}.$$

が成り立つ．

(i) は，終端状態を根とみなした状態推移ツリーにおいて新たに枝分かれする際，必要なパラメータの添え字を追加する処理である．x_{n+1} を定める際に必要となる状態の添え字を追加している．枝分かれがなくパラメータの追加が不要な場合，すなわち，x_n のみから x_{n+1} へ推移している場合，さらに言い換えると $I_{n+1} = \{n\}$ の場合は，条件 $j < n$ により，添え字の追加はなされない．また，(ii) は，x_{n+1} が初期状態なので，状態推移ツリーにおいて葉（初期状態）まで達した後の処理となる．この場合，深さ優先探索では未処理の枝分かれ部分に戻るので，これまでパラメータ扱いだった自分自身の添え字を除外している．

なお，一般に

$$I_i \cap I_j \;=\; \phi \quad (i \neq j)$$

が成り立つので

$$J_n \cap I_n \;=\; \phi \qquad (n = 1, 2, \ldots, N-1)$$

である．

さて，値関数 v^n に対する再帰関係式を与える準備として，$n \in I_{\mathrm{Init}}$ に対する補助関数 w^n を以下のように定義する．

$$w^n(x_n; (x_m, u_m \,|\, m \in J_n)) \;=\; \min_{C_n} [r_l(x_l, u_l) + \cdots + k(x_N)].$$

ここで，l はその時点までに対応済みの状態の中で最も x_n に近い未処理の合流ポイントに位置する状態の添え字を表す．すなわち，

$$l \;=\; \min\{m \,|\, m > n,\ I_m \cap \{1, 2, \ldots, n-1\} \neq \phi\}$$

である．また，ここでの最小化条件 C_n は，x_n および $(x_m, u_m \,|\, m \in J_n)$ が与えられた際，x_n から開始し，その時点までに得られている最適決定関数（この後に与える定理の再帰式の計算に付随して定まるもの）$\pi_h^*(x_h, \lambda; (x_m, u_m \,|\, m \in J_h))$ $(h = n, n+1, \ldots, N-1)$ に従って得られるすべての状態決定列に関して取られるものとする．すなわち，

$$\begin{aligned}
C_n \;:\; (x_l, u_l, \ldots, x_N)\;;\; & \lambda_n = 0, \\
& u_h \in \pi_h^*(x_h, \lambda_h; (x_m, u_m \,|\, m \in J_h)) \quad (h = n, n+1, \ldots, N-1), \\
& \lambda_{h+1} = \lambda_h + r_h(x_h, u_h) \quad (h = n, n+1, \ldots, N-1), \\
& x_{h+1} = f_{h+1}(x_m, u_m \,|\, m \in J_{h+1}) \quad (h = n, n+1, \ldots, N-1).
\end{aligned}$$

なお，生成される状態決定列は

$$(x_n,\, u_n,\, x_{n+1},\, u_{n+1},\, x_{n+2},\, u_{n+2}, \ldots,\, x_{N-1},\, u_{N-1},\, x_N)$$

であるが，パス利得 $r_l(x_l,\, u_l) + \cdots + k(x_N)$ は，x_l から x_N への経路上の和であったことから，

$$l \in I_{l_1},\quad l_1 \in I_{l_2},\quad l_2 \in I_{l_3}, \ldots,\quad l_p \in I_N$$

を満たす添え字列上の状態決定列：

$$(x_l,\, u_l,\, x_{l_1},\, u_{l_1},\, x_{l_2},\, u_{l_2}, \ldots, x_{l_p},\, u_{l_p},\, x_N)$$

のみが，パス利得：

$$r_l(x_l,\, u_l) + r_{l_1}(x_{l_1},\, u_{l_1}) + \cdots + r_{l_p}(x_{l_p},\, u_{l_p}) + k(x_N)$$

を求める際に利用される．

定理 4.1 値関数 v^n に対し，次の再帰式が成り立つ：
$n = N$ に対する

$$v^N(x_N,\, \lambda;\, (x_m,\, u_m \,|\, m \in J_N)) \;=\; \lambda + k(x_N), \quad x_N \in X.$$

から開始し，$n < N$ に対しては，
(I) $n+1 \notin I_{\mathrm{Init}}$ のとき

$$\begin{aligned} & v^n(x_n,\, \lambda;\, (x_m,\, u_m \,|\, m \in J_n)) \\ = \; & \min_{u_n \in U(x_n)} v^{n+1}(f_{n+1}(x_m,\, u_m \,|\, m \in I_{n+1}), \lambda + r_n(x_n,\, u_n); (x_m,\, u_m \,|\, m \in J_{n+1})) \\ & \pi_n^*(x_n,\, \lambda;\, (x_m,\, u_m \,|\, m \in J_n)) \\ = \; & \operatorname*{argmin}_{u_n \in U(x_n)} v^{n+1}(f_{n+1}(x_m,\, u_m \,|\, m \in I_{n+1}), \lambda + r_n(x_n,\, u_n); (x_m,\, u_m \,|\, m \in J_{n+1})) \end{aligned}$$

(II) $n+1 \in I_{\mathrm{Init}}$ のとき

$$\begin{aligned} & v^n(x_n,\, \lambda;\, (x_m,\, u_m \,|\, m \in J_n)) \\ = \; & \min_{u_n \in U(x_n)} \Big(\{\lambda + r_n(x_n,\, u_n) + w^{n+1}(x_{n+1};\, (x_m,\, u_m \,|\, m \in J_{n+1}))\} \\ & \qquad \vee v^{n+1}(x_{n+1},\, 0;\, (x_m,\, u_m \,|\, m \in J_{n+1})) \Big) \\ & \pi_n^*(x_n,\, \lambda;\, (x_m,\, u_m \,|\, m \in J_n)) \\ = \; & \operatorname*{argmin}_{u_n \in U(x_n)} \Big(\{\lambda + r_n(x_n,\, u_n) + w^{n+1}(x_{n+1};\, (x_m,\, u_m \,|\, m \in J_{n+1}))\} \\ & \qquad \vee v^{n+1}(x_{n+1},\, 0;\, (x_m,\, u_m \,|\, m \in J_{n+1})) \Big) \end{aligned}$$

注 定理内の $v^N(x_N,\, \lambda;\, (x_m,\, u_m \,|\, m \in J_N))$ は他と形式を統一するための表現であり，$J_N = \phi$ であるため，実際は $v^N(x_N,\, \lambda;\, (x_m, u_m \,|\, m \in J_N)) = v^N(x_N,\, \lambda)$ である．

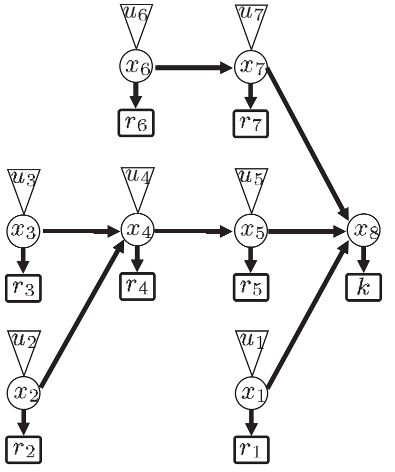

図 2: 添え字付け替え後の推移図

この定理の適用にあたっては，再帰式により v^n を求める際，$n \in I_{\mathrm{Init}}$ のときには，直後に w^n を求めるものとする．そして，求めた時点で，w^n の計算においてその最小値を与える最適状態決定列：

$$(x_n^*,\, u_n^*,\, x_{n+1}^*,\, u_{n+1}^*,\, x_{n+2}^*,\, u_{n+2}^*, \ldots,\, x_{N-1}^*,\, u_{N-1}^*,\, x_N^*)$$

のみが生成されるように最適政策 π_m^* $(m = n,\, n+1, \ldots,\, N-1)$ を置き換えるものとする．

注：ここで紹介する再帰的解法は，目的関数を最小化するすべての解を生成するわけではない．実際は，部分最適化が一部働いた形での最適解となる．

例 4.1 例 2.1 の状態推移を持つ決定過程に対し，初期状態からのパス利得に関する優先順は，添え字が小さい順とする．したがって，x_8, x_6, x_1, x_7, x_5, x_2, x_3, x_4 の順で，x_n から開始する部分問題群を考えたい．構成順に状態の添え字をつけかえたものが図 2 であり，図 2 において部分問題群を構成する際にたどる状態の添え字の順番は

$$8 \;\to\; 7 \;\to\; 6 \;\to\; 5 \;\to\; 4 \;\to\; 3 \;\to\; 2 \;\to\; 1$$

となる．また

$$N \;=\; 8, \quad I_{\mathrm{Init}} \;=\; \{1, 2, 3, 6\}$$

である．まず，命題 4.1 を用いて，集合列 J_j $(j = 8, 7, \ldots, 1)$ を構成する．$j = 8$ のとき

$$J_8 \;=\; \phi.$$

$j = 7 \in I_8 = \{1, 5, 7\}$ で $8 \notin I_{\mathrm{Init}}$ より

$$J_7 \;=\; J_8 \cup \{j \in I_8 \,|\, j < 7\} \;=\; \phi \cup \{1, 5\} \;=\; \{1, 5\}$$

$j = 6 \in I_7 = \{6\}$ で $7 \notin I_{\mathrm{Init}}$ より

$$J_6 \;=\; J_7 \cup \{j \in I_7 \,|\, j < 6\} \;=\; \{1, 5\} \cup \phi \;=\; \{1, 5\}$$

$j=5\in I_8=\{1,5,7\}$ で $6\in I_{\mathrm{Init}}$ より

$$J_5 \;=\; J_6\setminus\{5\} \;=\; \{1,5\}\setminus\{5\} \;=\; \{1\}$$

$j=4\in I_5=\{4\}$ で $5\notin I_{\mathrm{Init}}$ より

$$J_4 \;=\; J_5\cup\{j\in I_5\,|\,j<4\} \;=\; \{1\}\cup\phi \;=\; \{1\}$$

$j=3\in I_4=\{2,3\}$ で $4\notin I_{\mathrm{Init}}$ より

$$J_3 \;=\; J_4\cup\{j\in I_4\,|\,j<3\} \;=\; \{1\}\cup\{2\} \;=\; \{1,2\}$$

$j=2\in I_4=\{2,3\}$ で $3\in I_{\mathrm{Init}}$ より

$$J_2 \;=\; J_3\setminus\{2\} \;=\; \{1,2\}\setminus\{2\} \;=\; \{1\}$$

$j=1\in I_8=\{1,5,7\}$ で $2\in I_{\mathrm{Init}}$ より

$$J_1 \;=\; J_2\setminus\{1\} \;=\; \{1\}\setminus\{1\} \;=\; \phi.$$

これより，v^n（部分問題群）は次のように構成される：

$$\begin{aligned}
v^8(x_8,\lambda) &= \lambda+k(x_8)\\
v^7(x_7,\lambda;x_1,u_1,x_5,u_5) &= \min_{u_7}[\lambda+r_7(x_7,u_7)+k(x_8)]\\
v^6(x_6,\lambda;x_1,u_1,x_5,u_5) &= \min_{u_6,u_7}[\lambda+r_6(x_6,u_6)+r_7(x_7,u_7)+k(x_8)]\\
v^5(x_5,\lambda;x_1,u_1) &= \min_{u_5,u_6,u_7}[\{\lambda+r_5(x_5,u_5)+k(x_8)\}\\
&\qquad\vee\{r_6(x_6,u_6)+r_7(x_7,u_7)+k(x_8)\}]\\
v^4(x_4,\lambda;x_1,u_1) &= \min_{u_4,u_5,u_6,u_7}[\{\lambda+r_4(x_4,u_4)+r_5(x_5,u_5)+k(x_8)\}\\
&\qquad\vee\{r_6(x_6,u_6)+r_7(x_7,u_7)+k(x_8)\}]\\
v^3(x_3,\lambda;x_1,u_1,x_2,u_2) &= \min_{u_3,u_4,u_5,u_6,u_7}[\{\lambda+r_3(x_3,u_3)+r_4(x_4,u_4)+r_5(x_5,u_5)+k(x_8)\}\\
&\qquad\vee\{r_6(x_6,u_6)+r_7(x_7,u_7)+k(x_8)\}]\\
v^2(x_2,\lambda;x_1,u_1) &= \min_{u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7}[\{\lambda+r_2(x_2,u_2)+r_4(x_4,u_4)+r_5(x_5,u_5)+k(x_8)\}\\
&\qquad\vee\{r_3(x_3,u_3)+r_4(x_4,u_4)+r_5(x_5,u_5)+k(x_8)\}\\
&\qquad\vee\{r_6(x_6,u_6)+r_7(x_7,u_7)+k(x_8)\}]\\
v^1(x_1,\lambda) &= \min_{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6,u_7}[\{\lambda+r_1(x_1,u_1)+k(x_8)\}\\
&\qquad\vee\{r_2(x_2,u_2)+r_4(x_4,u_4)+r_5(x_5,u_5)+k(x_8)\}\\
&\qquad\vee\{r_3(x_3,u_3)+r_4(x_4,u_4)+r_5(x_5,u_5)+k(x_8)\}\\
&\qquad\vee\{r_6(x_6,u_6)+r_7(x_7,u_7)+k(x_8)\}]
\end{aligned}$$

なお，各部分問題においても，パス利得の優先順を考慮した最小化である．

このとき，$v^1(x_1, 0)$ が与問題に一致することは明らかである．また，$\mathcal{N}(I_n) \geq 2$ を満たすものは I_8, I_4 なので，該当する補助関数は $I_8 = \{1, 5, 7\}$ より w_2, w_6，$I_4 = \{2, 3\}$ より w_3 である：

$$\begin{aligned}
w^6(x_6; x_1, u_1, x_5, u_5) &= \min_{C_6} k(x_8) \\
w^3(x_3; x_1, u_1, x_2, u_2) &= \min_{C_3}[r_4(x_4, u_4) + r_5(x_5, u_5) + k(x_8)] \\
w^2(x_2; x_1, u_1) &= \min_{C_2} k(x_8)
\end{aligned}$$

定理 4.1 によって対応する再帰式を求めると

$$\begin{aligned}
v^8(x_8, \lambda) &= \lambda + k(x_8) \\
v^7(x_7, \lambda; x_1, u_1, x_5, u_5) &= \min_{u_7 \in U(x_7)} v^8(f_8(x_1, u_1, x_5, u_5, x_7, u_7), \lambda + r_7(x_7, u_7)) \\
v^6(x_6, \lambda; x_1, u_1, x_5, u_5) &= \min_{u_6 \in U(x_6)} v^7(f_7(x_6, u_6), \lambda + r_6(x_6, u_6); x_1, u_1, x_5, u_5) \\
v^5(x_5, \lambda; x_1, u_1) &= \min_{u_5 \in U(x_5)} \Big(\{\lambda + r_5(x_5, u_5) + w^6(x_6; x_1, u_1, x_5, u_5)\} \\
&\qquad \vee v^6(x_6, 0; x_1, u_1, x_5, u_5)\Big) \\
v^4(x_4, \lambda; x_1, u_1) &= \min_{u_4 \in U(x_4)} v^5(f_5(x_4, u_4), \lambda + r_4(x_4, u_4); x_1, u_1) \\
v^3(x_3, \lambda; x_1, u_1, x_2, u_2) &= \min_{u_3 \in U(x_3)} v^4(f_4(x_2, u_2, x_3, u_3), \lambda + r_3(x_3, u_3); x_1, u_1) \\
v^2(x_2, \lambda; x_1, u_1) &= \min_{u_2 \in U(x_2)} \Big(\{\lambda + r_2(x_2, u_2) + w^3(x_3; x_1, u_1, x_2, u_2)\} \\
&\qquad \vee v^3(x_3, 0; x_1, u_1, x_2, u_2)\Big) \\
v^1(x_1, \lambda) &= \min_{u_1 \in U(x_1)} \Big(\{\lambda + r_1(x_1, u_1) + w^2(x_2; x_1, u_1)\} \vee v^2(x_2, 0; x_1, u_1)\Big)
\end{aligned}$$

参考文献

[1] U. Bertelé and F. Brioschi: *Nonserial Dynamic Programming* (Academic Press, New York, 1972).

[2] T. Fujita: On nondeterministic dynamic programming, *Mathematical Analysis in Economics (Kyoto, 2005) RIMS Kokyuroku*, **1488** (2006), 15–24.

[3] T. Fujita: Associative criteria in mutually dependent markov decision processes, *Proceedings of IIAI International Conference on Advanced Applied Informatics* (2014), 147-150.

[4] T. Fujita: Mutually dependent decision processes models, *Bulletin of the Kyushu Institute of Technology*, **63** (2016), 15–26.

[5] T. Fujita and A. Kira : Mutually dependent Markov decision processes, *Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics*, **18** (2014), 992-998.

[6] T. Fujita: Converging Decision Processes with Multiplicative Reward System, *Bulletin of the Kyushu Institute of Technology*, **68** (2021), 9–26.

[7] G.L. Nemhauser: *Introduction to Dynamic Programming* (Wiley, NY, 1966).