Higson 型コンパクト化の完全性

呉工業高等専門学校　赤池祐次
Yuji Akaike, National Institute of Technology, Kure College

都城工業高等専門学校　友安一夫
Kazuo Tomoyasu, National Institute of Technology, Miyakonojo College

1　はじめに

本稿では，特に断りがない限り，空間はコンパクトでないプロパーな距離空間とする．距離空間 (X,d) が**プロパー**であるとは，任意の有界閉集合がコンパクトであるときをいう．また，X の基点 $x_0 \in X$ を決め，任意の $x \in X$ に対して $|x| = d(x,x_0)$ と表し，中心が x, 半径が r の開球を $B_d(x,r)$ で表す．

大尺度幾何学において，Higson コンパクト化 $h_H X$ およびその剰余である Higson コロナ $\nu_H X = h_H X \setminus X$ は重要な役割を演じている ([6], [11], [16])．その後，これと類似したコンパクト化が導入され，位相次元論との関係から研究が進展した．まず，[7] で sublinear Higson コンパクト化 $h_L X$ が定義され，漸近次元と類似の概念である漸近 Assouad-Nagata 次元と sublinear Higson コロナ $\nu_L X = h_L X \setminus X$ の被覆次元との関係が論じられた．さらに，[13] では subpower Higson コンパクト化 $h_P X$ と subpower Higson コロナ $\nu_P X = h_P X \setminus X$ が定義され，研究の裾野が広がった．これら 3 つのコンパクト化を総称して **Higson 型コンパクト化**と呼ぶことにする（第 2 章参照）．この呼称は [9] で提起された．これら Higson 型コンパクト化の剰余 $\nu_H X$, $\nu_L X$, $\nu_P X$ は無限遠に付け加えられた点集合と見ることができ，X における 2 つの閉集合 A, B の " 離れ方 " によって，A, B が無限遠で交わるか否かがそれぞれのコンパクト化で異なる．

ところで，2 つのコンパクト化 αX, γX に対しては順序関係が定義される．すなわち，$\alpha X \geq \gamma X$ とは，連続写像 $f : \alpha X \to \gamma X$ で $f|_X = \mathrm{id}_X$ となるものが存在するときをいう．f が同相写像としてとれるとき $\alpha X \approx \gamma X$ とかき，$\alpha X \geq \gamma X$ かつ $\alpha X \not\approx \gamma X$ のとき $\alpha X > \gamma X$ とかく．f は一意かつ全射で，自然な射影と呼ばれる．また，Stone-Čech コンパクト化 βX は X の最大のコンパクト化である．

本稿では Higson 型コンパクト化の完全性について論じる．完全コンパクト化の概念は 1960 年代に E. G. Sklyarenko により導入され ([15])，点型コンパクト化の特徴付けに有効であることが知られている．ここで，完全正則空間 X のコンパクト化 αX が**完全**であるとは，Stone-Čech コンパクト化からの自然な射影 $f : \beta X \to \alpha X$ が単調，すなわち, 任意の $p \in \alpha X$ に対して，$f^{-1}(p)$ が連結であるときをいう．[17] において，Woods は通常距離の実数空間 $\mathbb{R}$ について Smirnov コンパクト化 $u_d\mathbb{R}$ は完全であることを証明し，$n \geq 2$ に対して $u_d\mathbb{R}^n$ は完全かどうか問うた．これは

[4] で肯定的に解決され，また，[1] において，局所連結でプロパーな距離空間の Smirnov コンパクト化および Higson コンパクト化が完全であるための必要十分条件が与えられた．

本研究では [1] の手法を応用することで，局所連結でプロパーな距離空間に対して sublinear Higson コンパクト化および subpower Higson コンパクト化の完全性を特徴付けることができた ([2])．これにより，通常距離の無限半開区間 $[0,\infty)$ に対して $\nu_L[0,\infty)$ が分解不可能連続体であることがわかり，[9] で提示された問題に対して肯定解を与えることができた．

本稿は [2] の結果を紹介し，Higson 型コンパクト化が異なる例を視覚的に理解しやすいような図によって解説することを目的としている．また，本稿で説明していない記号と用語は [8] に従う．

2 Higson 型コンパクト化の基本的性質

正の実数全体の集合 $\mathbb{R}_+$ に対して，（連続とは限らない）関数 $s:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ が**漸近的 sublinear** (resp. **漸近的 subpower**) であるとは，任意の $\alpha>0$ に対して，ある $t_0>0$ が存在し，すべての $t>t_0$ に対して $s(t)<\alpha t$ (resp. $s(t)<t^{\alpha}$) が成り立つときをいう (cf. [5], [13])．漸近的 sublinear (resp. subpower) 関数全体を $\mathscr{L}$ (resp. $\mathscr{P}$) で表し，正の定数関数全体を $\mathscr{H}$ で表すことにすると，定義から $\mathscr{H}\subsetneq\mathscr{P}\subsetneq\mathscr{L}$ が成り立つ．また，例えば $s(t)=\ln(1+t)$ は漸近的 subpower 関数，$s(t)=\sqrt{t}$ は漸近的 sublinear 関数で漸近的 subpower 関数ではないことがロピタルの定理からわかる．さらに，$\mathscr{L},\mathscr{P},\mathscr{H}$ はそれぞれ和，正の定数倍で閉じている．

(X,d), (Y,ρ) をプロパーな距離空間としたとき，$f:X\to Y$ が **Higson sublinear** (resp. **Higson subpower**, **Higson**) とは，任意の $s\in\mathscr{L}$ (resp. $s\in\mathscr{P}$，$s\in\mathscr{H}$) に対して以下の性質を満たすときをいう．

$$\lim_{|x|\to\infty}\operatorname{diam}_\rho f(B_d(x,s(|x|)))=0$$

ここで，$C^*(X)$ を X 上の実数値有界連続関数全体とし，次の部分集合を考える．

$$\begin{aligned}C_L(X)&=\{f\in C^*(X)\mid f\text{ は Higson sublinear}\}\\C_P(X)&=\{f\in C^*(X)\mid f\text{ は Higson subpower}\}\\C_H(X)&=\{f\in C^*(X)\mid f\text{ は Higson}\}\end{aligned}$$

このとき，$I_f=[\inf f(X),\sup f(X)]$ とおき，

$$\varphi\ :\ X\to\prod_{f\in C_T(X)}I_f\qquad(T=L,\ P,\ H)$$

を $\varphi(x)=(f(x))_{f\in C_T(X)}$ と定めることで X を直積空間 $K_T=\prod_{f\in C_T(X)}I_f$ に埋め込むことができて，X と $\varphi(X)$ を同一視することで X のコンパクト化 $\mathrm{Cl}_{K_T}\varphi(X)$ が得ら

れる．T が L, P, H それぞれに対応するコンパクト化を X の **sublinear Higson コンパクト化**，**subpower Higson コンパクト化**，**Higson コンパクト化** と呼び，$h_L X$, $h_P X$, $h_H X$ と表す．$\mathscr{H} \subset \mathscr{P} \subset \mathscr{L}$ より，$C_L(X) \subseteq C_P(X) \subseteq C_H(X)$ なので，コンパクト化の順序関係は $h_L X \leq h_P X \leq h_H X$ となる．また，これらは距離に依存するコンパクト化である．さらに，コンパクト化の剰余 $h_L X \setminus X$ (resp. $h_P X \setminus X$, $h_H X \setminus X$) をそれぞれ **sublinear Higson コロナ** (resp. **subpower Higson コロナ**, **Higson コロナ**) と呼び，記号で $\nu_L X$ (resp. $\nu_P X$, $\nu_H X$) と表す．

定義 2.1 ([6, Definition 2.1])**.** 距離空間 (X,d) の 2 つの閉集合 A, B が**発散する**とは，任意の $R > 0$ に対して $B_d(A,R) \cap B_d(B,R)$ が有界であるときをいう．

これは，上記の対偶を考えると次と同値である．

> 距離空間 (X,d) の 2 つの閉集合 A, B について，任意の $R > 0$ に対してある $S > 0$ が存在して，$d(A \setminus B_d(x_0,S), B \setminus B_d(x_0,S)) \geq R$ が成り立つ．

また，次の命題が成り立つ．

命題 2.2 ([6, Proposition 2.3])**.** プロパーな距離空間 (X,d) の 2 つの閉集合 A, B について，次は同値である．

(1) $\nu_H X \cap \mathrm{Cl}_{h_H X} A \cap \mathrm{Cl}_{h_H X} A = \emptyset$.

(2) A, B は発散する．

距離空間 (X,d) の 2 つの閉集合 A, B が**線形関数として発散する**（resp. **べき関数として発散する**）とは，ある $\alpha > 0$ と $r_0 > 0$ が存在し，$|x| > r_0$ となる $x \in X$ に対して $\max\{d(x,A), d(x,B)\} \geq \alpha|x|$ (resp. $\max\{d(x,A), d(x,B)\} \geq |x|^{\alpha}$) が成り立つときをいう (cf. [7], [14])．定義 2.1 と命題 2.2 のアナロジーとして，次の補題と命題が成り立つ．

補題 2.3 ([7, Lemma 2.4])**.** A, B を距離空間 (X,d) の部分集合とするとき，次は同値である．

(1) C, $r_0 > 0$ が存在し，$|x| \geq r_0$ のとき $\max\{d(x,A), d(x,B)\} \geq C|x|$.

(2) D, $r_1 > 0$ が存在し，$r \geq r_1$ のとき $d(A \setminus B_d(x_0,r), B \setminus B_d(x_0,r)) \geq Dr$.

補題 2.4 ([2, Lemma 2.6])**.** A, B を距離空間 (X,d) の部分集合とするとき，次は同値である．

(1) C, $r_0 > 0$ が存在し，$|x| \geq r_0$ のとき $\max\{d(x,A), d(x,B)\} \geq |x|^C$.

(2) D, $r_1 > 0$ が存在し，$r \geq r_1$ のとき $d(A \setminus B_d(x_0,r), B \setminus B_d(x_0,r)) \geq r^D$.

命題 2.5 ([7, Lemma 2.3])**.** プロパーな距離空間 (X,d) の 2 つの閉集合 A, B について，次は同値である．

(1) $\nu_L X \cap \mathrm{Cl}_{h_L X} A \cap \mathrm{Cl}_{h_L X} B = \emptyset$.

(2) A, B は線形関数として発散する．

命題 2.6 ([14, Lemma 3.1])**.** プロパーな距離空間 (X,d) の 2 つの閉集合 A, B について，次は同値である．

(1) $\nu_P X \cap \mathrm{Cl}_{h_P X} A \cap \mathrm{Cl}_{h_P X} B = \emptyset$.

(2) A, B はべき関数として発散する．

3 Higson 型コンパクト化の完全性

完全コンパクト化の基本的な特徴付けとして次が知られている．

命題 3.1 (cf. [15], [12])**.** コンパクトでない完全正則空間 X のコンパクト化 αX について，次は同値である．

(1) αX は完全である．

(2) 任意の X の開集合 U と $A \subset U$ について
$$\mathrm{Cl}_{\alpha X} A \cap \mathrm{Cl}_{\alpha X}(\mathrm{Fr}_X U) = \emptyset \Longleftrightarrow \mathrm{Cl}_{\alpha X} A \cap \mathrm{Cl}_{\alpha X}(X \setminus U) = \emptyset.$$

(3) 任意の X の開集合 U について　$\mathrm{Cl}_{\alpha X}(\mathrm{Fr}_X U) = \mathrm{Fr}_{\alpha X}(\mathrm{Ext}_{\alpha X} U)$.
ここで，$\mathrm{Ext}_{\alpha X} U = \alpha X \setminus \mathrm{Cl}_{\alpha X}(X \setminus U)$ は X に制限すると U になる αX の最大の開集合である．

[1] において，Higson コンパクト化の完全性を特徴付ける連結性に関する概念が定義された．距離空間 (X,d) が ∞ **で粗一様連結**であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ とコンパクト集合 $K_\varepsilon \subset X$ が存在し，$d(x,y) < \varepsilon$ である任意の x, $y \in X \setminus K_\varepsilon$ に対して，X のある連結集合 P で x, $y \in P$ かつ $\mathrm{diam}_d P < \delta$ となるものが存在するときをいう．ここで，sublinear Higson コンパクト化および subpower Higson コンパクト化の完全性を特徴付けるため類似の概念を定義する．

定義 3.2 ([2, Definition 3.2])**.** 距離空間 (X,d) が **sublinear** (resp. **subpower**) **として** ∞ **で粗一様連結**であるとは，任意の $s \in \mathscr{L}$ (resp. $s \in \mathscr{P}$) と任意の $\alpha > 0$ に対してある $r > 0$ が存在し，$|x| > r$, $d(x,y) < s(|x|)$ である任意の x, $y \in X$ に対して，X のある連結集合 P で x, $y \in P$ かつ $\mathrm{diam}_d P < \alpha|x|$ (resp. $\mathrm{diam}_d P < |x|^\alpha$) となるものが存在するときをいう．混乱がない場合は (X,d) のかわりに X とかく．

これらの定義により，以下の特徴付けを得ることができた．証明は命題 3.1 を示すことで得られ，必要性を示すときに局所連結であることが使われる．

定理 3.3 ([1, Theorem 2.6])**.** (X,d) をコンパクトでない局所連結なプロパーな距離空間とする．$h_H X$ が完全であるための必要十分条件は (X,d) が ∞ で粗一様連結であることである．

定理 3.4 ([2, Theorem 3.7, 3.5])**.** (X,d) をコンパクトでない局所連結なプロパーな距離空間とする．$h_L X$ (resp. $h_P X$) が完全であるための必要十分条件は (X,d) が sublinear (resp. subpower) として ∞ で粗一様連結であることである．

通常距離の n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ は，2 点を結ぶ線分が存在してその大きさは 2 点間の距離と等しいから，上の系として次がわかる．

系 3.5 ([1, Corollary 2.4], [2, Corollary 3.6, 3.8])**.** $h_L\mathbb{R}^n$, $h_P\mathbb{R}^n$, $h_H\mathbb{R}^n$ は完全である．

通常距離の無限半開区間 $X = [0,\infty)$ に対する応用について述べよう．[3] で $\beta X \setminus X$ が分解不可能連続体，すなわち 2 つの真部分連結閉集合の和集合で表せない連続体であることが示された．また，上の系 3.5 と同様に $h_L X$, $h_P X$, $h_H X$ は完全であることがわかる．これより，[17, Theorem 4.4] あるいは単調写像による分解不可能連続体の像は分解不可能連続体であることから，次の系が従う．

系 3.6. 通常距離の $X = [0,\infty)$ について次が成り立つ．

(1) $\nu_H X$ は距離化不可能な分解不可能連続体である．([10, Theorem 1.6])

(2) $\nu_P X$ は距離化不可能な分解不可能連続体である．([9, Theorem 3.3])

(3) $\nu_L X$ は距離化不可能な分解不可能連続体である．([2, Corollary 3.10])

距離化不可能性は $\nu_L X$, $\nu_P X$, $\nu_H X$ がそれぞれ自然数の Stone-Čech コンパクト化の剰余を含むという事実から従う ([11, Theorem 3], [13, Corollary 2.8, 2.10])．また，系 3.6 (3) は [9] で提示された問題 ([9, Question 1]) の肯定解である．

4 いくつかの例

$\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$ を自然数の集合とする．

例 4.1 ([2, Example 4.1])**.** (1) $\mathbb{N}$ に $\mathbb{R}$ 上の通常の部分距離を入れたものを N_1 とする．写像 $f : N_1 \to \mathbb{R}$ を

$$f(n) = \begin{cases} 0, & n \text{ は奇数のとき}, \\ 1, & n \text{ は偶数のとき} \end{cases}$$

と定めると $f \in C^*(N_1)$ であり，任意の $n \in N_1$ に対して $\mathrm{diam}_d f(B_d(n,2)) = 1$ より $f \notin C_H(N_1)$ である．よって $h_H N_1 < \beta N_1$ となり，βN_1 は $\mathbb{N}$ の最小の完全コンパクト化という事実から，$h_H N_1$ は完全でない．

(2) 数列 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $y_1 = 1,\ y_{n+1} = y_n + \ln(1 + y_{n+1})$ で定める．これは，任意の $t > 0$ に対して直線 $y = x - t$ と曲線 $y = \ln(1+x)$ $(x \geq 0)$ の交点の x 座標を $\eta(t)$ とすると $y_{n+1} = \eta(y_n)$ であり，$\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に $\mathbb{R}$ 上の通常の部分距離を入れたものを N_2 とする（図 4.1）．

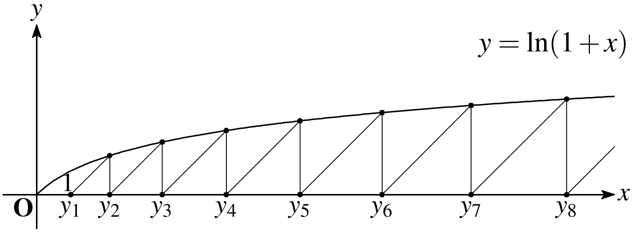

図 4.1

写像 $f : N_2 \to \mathbb{R}$ を

$$f(y_n) = \begin{cases} 0, & n \text{ は奇数のとき}, \\ 1, & n \text{ は偶数のとき} \end{cases}$$

と定めると $f \in C^*(N_2)$ で $f \notin C_P(N_2)$ となる．実際，$s(t) = \ln(2+t)$ とすると $s \in \mathscr{P}$ で $\mathrm{diam}_d f(B_d(y_n, s(|y_n|))) = 1$ となるからである．また，任意の $s \in \mathscr{H}$ に対して十分大きなすべての n について $B_d(y_n, s(|y_n|)) = \{y_n\}$ だから $C_H(N_2) = C^*(N_2)$ となる．よって $h_P N_2 < h_H N_2 \approx \beta N_2$ となり，βN_2 は $\mathbb{N}$ の最小の完全コンパクト化という事実から，$h_P N_2$ は完全ではない．

(3) 数列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $z_1 = 1,\ z_{n+1} = z_n + \sqrt{z_{n+1}}$ で定め，$\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に $\mathbb{R}$ 上の通常の部分距離を入れたものを N_3 とする（図 4.2）．

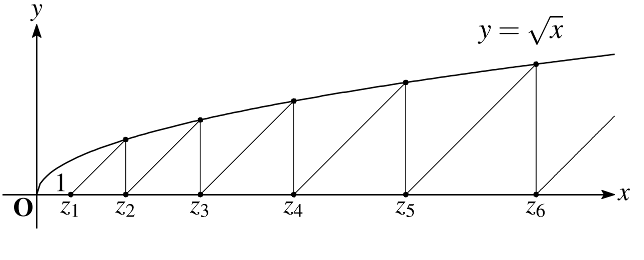

図 4.2

写像 $f : N_3 \to \mathbb{R}$ を

$$f(z_n) = \begin{cases} 0, & n \text{ は奇数のとき}, \\ 1, & n \text{ は偶数のとき} \end{cases}$$

と定めると $f \in C^*(N_3)$ で $f \notin C_L(N_3)$ となる．実際，$s(t) = \sqrt{t+1}$ とすると $s \in \mathscr{L}$ で $\operatorname{diam}_d f(B_d(z_n, s(|z_n|))) = 1$ となるからである．また，(2) と同様に，$C_P(N_3) = C_H(N_3) = C^*(N_3)$ より，$h_L N_3 < h_P N_3 \approx h_H N_3 \approx \beta N_3$ となり，$h_L N_3$ は完全ではない．

(4) $N_1' = \{(0,n) \mid n \in \mathbb{N}\}$, $N_2' = \{(y_n, 0) \mid n \in \mathbb{N}\}$, $N_3' = \{(0, -z_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ とし，$N_4 = N_1' \cup N_2' \cup N_3'$ に $\mathbb{R}^2$ 上の通常の部分距離を入れる．$T = L, P, H$, $i = 1, 2, 3$ について，$h_T N_i$ と $\mathrm{Cl}_{h_T N_4} N_i'$ は同相であるという事実と，上の (1)〜(3) から，$h_L N_4 < h_P N_4 < h_H N_4 < \beta N_4$ が成り立つ．

例 4.2 ([2, Example 4.2])**.** 通常距離の入った $\mathbb{R}^2$ において次の部分集合を考え，それぞれ部分距離を入れる．

$$\begin{aligned} X &= [0,\infty) \times \{0,1\} \cup \{0\} \times [0,1] \\ Y &= [0,\infty) \times \{0\} \cup \{(x, \ln(1+x)) \mid x \geq 0\} \\ Z &= [0,\infty) \times \{0\} \cup \{(x, \sqrt{x}) \mid x \geq 0\} \\ W &= [0,\infty) \times \{0\} \cup \{(x, x/2) \mid x \geq 0\} \end{aligned}$$

基点はそれぞれ $\mathrm{O} = (0,0)$ とする（図 4.3）．

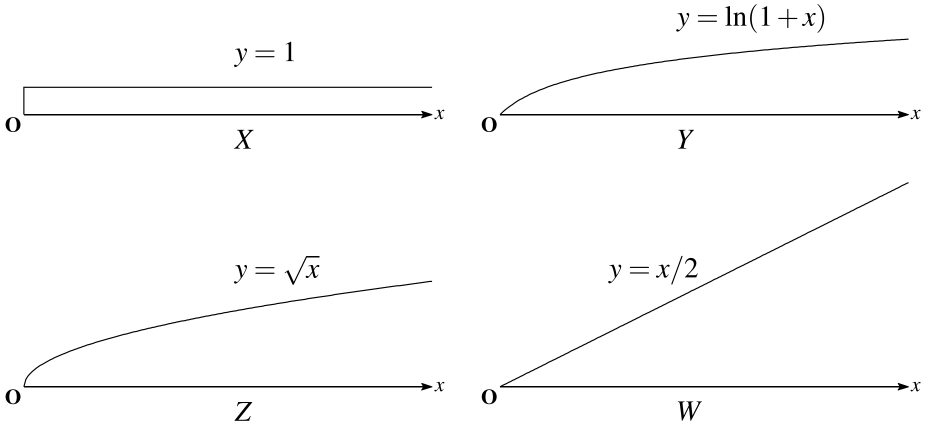

図 4.3

$K \in \{X, Y, Z, W\}$ とすると，定理 3.3, 3.4 によって，コンパクト化の完全性は以下の表のようになる．ただし，1 が完全，0 が完全でないことを表す．

表 4.4. Higson 型コンパクト化の完全性

K \ 型	$h_L K$	$h_P K$	$h_H K$
X	0	0	0
Y	0	0	1
Z	0	1	1
W	1	1	1

例えば Y を考えると，Y 上の 2 点 $a=(x,0)$ $b=(x,\ln(1+x))$ について $d(a,b)<\ln(2+|a|)$ で，$s(t)=\ln(2+t)$ は漸近的 subpower 関数であるが，a,b を含む連結集合は O を含み，その大きさは $|a|$ 以上である．よって，Y は subpower として ∞ で粗一様連結ではないため，$h_P Y$ は完全ではない．

例 4.3 ([2, Example 4.3])**.** $n\in\mathbb{N}$ に対して次の数列を考える．

$$x'_n=2(n-1),\ x_n=2n-1$$
$$z'_n=n(n-1),\ z_n=n^2\ \left(=(z'_n+z'_{n+1})/2\right)$$
$$w'_n=3^{n-1},\ w_n=2\cdot 3^{n-1}\ \left(=(w'_n+w'_{n+1})/2\right)$$

このとき，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して以下が成り立つ．

$$x_n-x'_n=x'_{n+1}-x_n=1,\quad z_n-z'_n=z'_{n+1}-z_n=\sqrt{z_n},\quad w_n-w'_n=w'_{n+1}-w_n=w_n/2$$

次に，任意の $t>0$ に対して直線 $y=x-t$ と曲線 $y=\ln(1+x)$ $(x\geq 0)$ の交点の x 座標を $\eta(t)$ とし，以下の漸化式により，数列 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を定める（図 4.5）．

$$y'_1=0,\quad y_1=1,\quad y'_n=y_{n-1}+\ln(1+y_{n-1}),\quad y_n=\eta(y'_n)\qquad (n\geq 2)$$

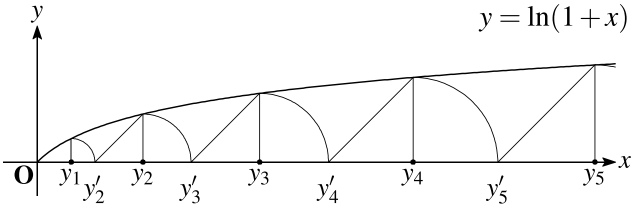

図 4.5

このとき，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $y_n-y'_n=y'_{n+1}-y_n=\ln(1+y_n)$ が成り立つ．

さらに，$x\geq 0$ に対して $f_X(x)=1$, $f_Y(x)=\ln(1+x)$, $f_Z(x)=\sqrt{x}$, $f_W(x)=x/2$ とし，$K\in\{X,Y,Z,W\}$ と $k\in\{x,\ y,\ z,\ w\}$ について，max-metric の入った $\mathbb{R}^2$ の部分集合を

$$K_k=K\cup\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{k'_n\}\times[0,f_K(k'_n)]$$

と定め，それぞれ部分距離を入れる．基点は $\mathrm{O}=(0,0)$ とする（図 4.6〜4.9）.

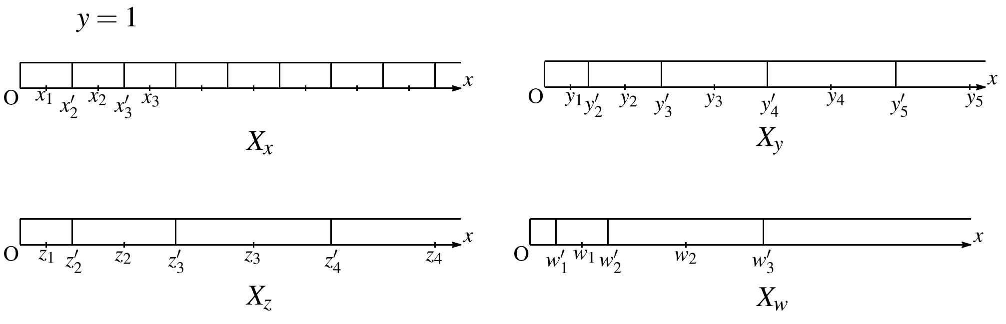

図 4.6

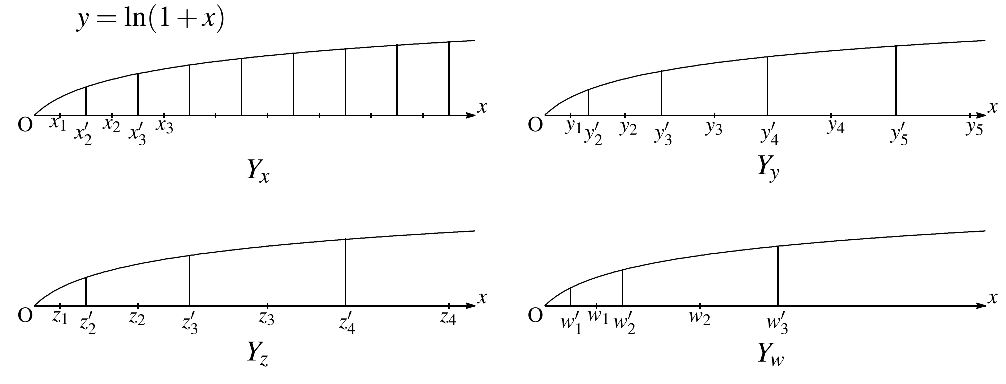

図 4.7

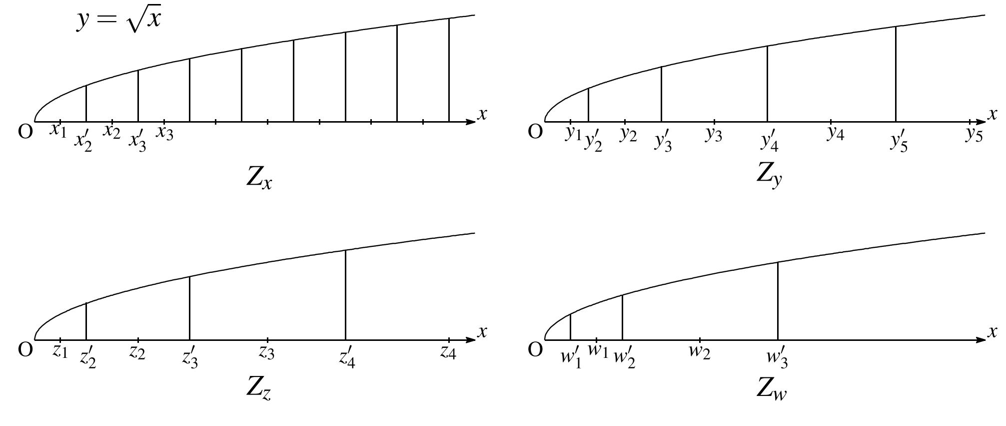

図 4.8

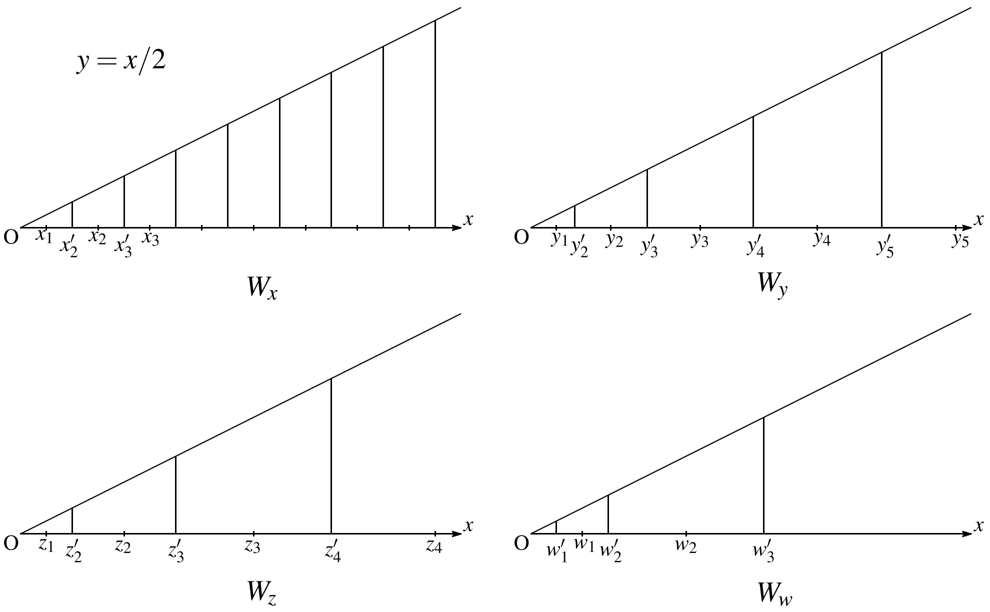

図 4.9

定理 3.3, 3.4 によって，コンパクト化の完全性は以下の表のようになる．

表 4.10. Higson 型コンパクト化の完全性

$h_L K_k$	x	y	z	w
X	1	1	1	0
Y	1	1	1	0
Z	1	1	1	0
W	0	0	0	1

$h_P K_k$	x	y	z	w
X	1	1	0	0
Y	1	1	0	0
Z	0	0	1	1
W	0	0	1	1

$h_H K_k$	x	y	z	w
X	1	0	0	0
Y	0	1	1	1
Z	0	1	1	1
W	0	1	1	1

例えば Y_z を考えると，2 点 $a_n=(z_n,0)$, $b_n=(z_n,\ln(1+z_n))$ について $d(a_n,b_n)<\ln(2+|a_n|)$ で $s(t)=\ln(2+t)$ は漸近的 subpower 関数であるが，a, b を含む連結集合の大きさは $z_n-z'_n=z'_{n+1}-z_n=\sqrt{z_n}=|a_n|^{1/2}$ 以上であり，Y_z は subpower として ∞ で粗一様連結ではないから，$h_P Y_z$ は完全ではない．

一方，$h_L Y_z$ は完全である．実際，任意の $s\in\mathscr{L}$ に対して Y_z の 2 点 $a=(a_1,a_2)$, $b=(b_1,b_2)$ が $d(a,b)<s(|a|)(=s(a_1))$ を満たすとする．もし，$z'_n=n(n-1)\le a_1<z'_{n+1}=n(n+1)$ ならば $n\le(1+\sqrt{4a_1+1})/2$ だから $z'_{n+1}-z'_n=2n\le 1+\sqrt{4a_1+1}$ であり，また，$\ln(1+z'_{n+1})\le\sqrt{z'_{n+1}}=\sqrt{n(n+1)}<2n\le 1+\sqrt{4a_1+1}$ だから，大きさが $1+\sqrt{4a_1+1}$ のループが存在する．よって，a と b を結ぶ大きさが $s(a_1)+1+\sqrt{4a_1+1}$ の連結集合が存在し，$s(t)+1+\sqrt{4t+1}$ は漸近的 sublinear 関数であるから，Y_z は sublinear として ∞ で粗一様連結となり，$h_L Y_z$ は完全である．

参考文献

[1] Y. Akaike, N. Chinen, K. Tomoyasu, *Perfectness of the Higson and Smirnov compactifications*, Colloq. Math. 107 (2007), no.1, 89-98.

[2] Y. Akaike, K. Tomoyasu, *Perfectness of Higson type compactificaitons*, Tsukuba J. Math. 45 (2021), 189-207.

[3] D.P. Bellamy, *A non-metric indecomposable continuum*, Duke Math. J. 38 (1971), 15-20.

[4] M. G. Charalambous, *A remark on R.G. Woods' paper "The minimum uniform compactification of a metric space"*, Fund. Math. 149 (1996), 287-288.

[5] M. Cencelj, J. Dydak, J. Smrekar, A. Vavpetič, *Sublinear Higson corona and Lipschitz extensions*, Houston J. Math., 37 (2011), no.4, 1307-1322.

[6] A.N. Dranishnikov, J. Keesling and V.V. Uspenskij, *On the Higson corona of uniformly contractible spaces*, Topology 37 (1998), 791-803.

[7] A. N. Dranishnikov, J. Smith, *On asymptotic Assouad-Nagata dimension*, Topology Appl., 154 (2007), 934-952.

[8] R. Engelking, *General topology*, Heldermann Verlag, Berlin, Revised and completed ed., 1989.

[9] Y. Iwamoto, *An indecomposable continuum as subpower Higson corona*, Tsukuba J. Math. 42 (2018), no.2, 173-190.

[10] Y. Iwamoto and K. Tomoyasu, *Higson compactifications obtained by expanding and contracting the half-open interval*, Tsukuba J. Math. 25 (2001), 179-186.

[11] J. Keesling, *The one-dimensional Čech cohomology of the Higson compactification and its corona*, Topology Proceedings 19 (1994), 129-148.

[12] Y. Kodama, K. Nagami, *General Topology*, Iwanami, Tokyo, 1974 (in Japanese).

[13] J. Kucab, M. Zarichnyi, *Subpower Higson corona of a metric space*, Algebra and Discrete Mathematics 17 (2014), no.2, 280-287.

[14] J. Kucab, M. Zarichnyi, *On convergence in the subpower Higson corona of metric spaces*, Topology Appl., 272 (2020) 107068, 6 pp.

[15] E. G. Sklyarenko, *On perfect bicompact extensions*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 137 (1961), 39-41 (in Russian); English transl. Soviet Math. Dokl. 2 (1961), 238-240.

[16] J. Roe, *Lectures in Coarse Geometry*, University Lecture Series, Vol. 31, AMS, 2003.

[17] R. G. Woods, *The minimum uniform compactification of metric space*, Fund. Math. 147 (1995), 39-59.