

# 単調上半連続集合値写像による逆極限に関するいくつかの定理

島根大学大学院・自然科学研究科 大島 慶之

Yoshiyuki OSHIMA

Graduate School of Natural Science and Technology,

Shimane University

## 1 単調な結合写像による逆極限

コンパクト連結距離空間のことを連続体という。連続体は、2点以上含むとき、非退化であるという。 $Y$  が  $X$  の部分連続体のとき、 $Y \triangleleft X$  と表す。連続体は、それが2つの真に小さい部分連続体の和として表せるとき、分解可能であるという。距離空間  $(X, d)$  の部分集合  $A \subset X$  に対して、 $X$  における  $A$  の内部を  $\text{Int}_X A$  で表し、 $A$  の直径を  $\text{diam}_d A = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$  とする。また、 $X$  の部分集合からなる族  $\mathcal{B}$  に対して、 $\mathcal{B}$  の粗さを  $\text{mesh}_d \mathcal{B} = \sup\{\text{diam}_d B \mid B \in \mathcal{B}\}$  とする。

**定義 1.1.**  $n \geq 1$  とする。連続体  $X$  が  $n$ -アポシンデティックであるとは、任意の  $x \in X$  と、任意の  $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X \setminus \{x\}$  に対して、ある  $K \triangleleft X$  が存在して、 $x \in \text{Int}_X K$ ,  $K \subset X \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$  をみたすときにいう..

**定義 1.2.** 連続体  $X$  が半アポシンデティックであるとは、相異なる任意の  $x, y \in X$  に対して、ある  $K \triangleleft X$  が存在して、 $x \in \text{Int}_X K$ ,  $y \notin K$  あるいは  $x \notin K, y \in \text{Int}_X K$  をみたすときにいう。

**定義 1.3.** 連続体  $X$  が余局所連結であるとは、任意の  $x \in X$  と、 $x$  の任意の近傍  $N \subset X$  に対して、 $N$  に含まれる  $x$  の開近傍  $O \subset X$  が存在して、 $X \setminus O$  が連結になるときにいう。

局所連結あるいは余局所連結ならば、アポシンデティックである。

**定義 1.4.** 連続体  $X$  が連続体鎖状連結であるとは、任意の  $\varepsilon > 0$  と、任意の  $x, y \in X$  に対して、 $C_1, \dots, C_n \triangleleft X$  が存在して、 $x \in C_1, y \in C_n, \text{mesh}\{C_1, \dots, C_n\} < \varepsilon$ , および  $C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset$  ( $i \leq n-1$ ) をみたすときにいう。

弧状連結ならば連続体鎖状連結である。1968年、Wilder は  $C$ -連続体という名称で次のものを導入した ([9])。

**定義 1.5.** 連続体  $X$  が Wilder 連続体であるとは、互いに相異なる任意の  $x, y, z \in X$  に対して、ある  $K \triangleleft X$  が存在して  $x \in K$  をみたし、 $y \in K$  あるいは  $z \in K$  の一方のみ成り立つときにいう。

弧状連結連続体は Wilder である。2004年、Lončar は弧状連結性の別の一般化として、次のものを導入した ([7])。

**定義 1.6.** 連続体  $X$  が  $D$ -連続体であるとは、交わりを持たない非退化な任意の  $A, B \triangleleft X$  に対して、 $A$  と  $B$  とも交わりを持つような  $C \triangleleft X$  が存在して、 $C$  が  $A$  または  $B$  を覆わないときにいう。

2019年、Espinoza および松橋は  $D$ -連続体に関連して次を導入した ([2])。

**定義 1.7.** 連続体  $X$  が  $D^*$ -連続体であるとは、交わりを持たない非退化な任意の  $A, B \triangleleft X$  に対して、 $A$  と  $B$  とも交わりを持つような  $C \triangleleft X$  が存在して、 $C$  が  $A$  も  $B$  も覆わないときにいう。

Wilder 連続体および  $D^*$ -連続体は  $D$ -連続体である。また、 $D$ -連続体は分解可能である。

一方、1954年、Capel が局所連結性と逆極限に関して定理 1.10を示している。ここで、逆極限は複雑な空間を構成する際にしばしば用いられる道具である。

**定義 1.8.** 位相空間  $X_i$  と、連続写像  $f_i : X_{i+1} \rightarrow X_i$  からなる列  $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$  に対して、

$$\varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty} = \left\{ (x_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i \mid \text{任意の } i \geq 1 \text{ に対して, } x_i = f_i(x_{i+1}) \right\}$$

を  $\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$  の逆極限という。また、 $X_i$  を因子空間、 $f_i$  を結合写像という。

**定義 1.9.** 連続写像  $f: X \rightarrow Y$  が単調であるとは、任意の  $y \in Y$  に対して、 $f^{-1}(y)$  が連結であるときにいう。

**定理 1.10** ([1, Theorem 4.3]).  $\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$  を局所連結連続体  $X_i$  と全射単調結合写像  $f_i: X_{i+1} \rightarrow X_i$  からなる列とする。このとき、 $\varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$  もまた局所連結連続体となる。

また、2020 年、Espinoza および松橋は次を示している。

**定理 1.11** ([3, Theorem 4.3]).  $\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$  を  $n$ -アポシンデティック (resp. 半アポシンデティック, 連続体鎖状連結, Wilder,  $D, D^*$ , あるいは余局所連結) 連続体  $X_i$  と全射単調結合写像  $f_i: X_{i+1} \rightarrow X_i$  からなる列とする。このとき、 $\varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$  もまた  $n$ -アポシンデティック (resp. 半アポシンデティック, 連続体鎖状連結, Wilder,  $D, D^*$ , あるいは余局所連結) 連続体となる。

一方、2006 年、Ingram および Mahavier は定義 1.13 のように集合値写像による逆極限を導入した ([4])。

**定義 1.12.** コンパクト距離空間  $X$  に対して、 $2^X = \{Y \mid Y \text{ は } X \text{ の空でない閉集合}\}$  とする。  $f: X \rightarrow 2^Y$  を集合値写像とする。このとき、 $f$  が上半連続であるとは、任意の  $x \in X$  と、 $f(x)$  の任意の開近傍  $V \subset Y$  に対して、 $x$  のある近傍  $U \subset X$  が存在して、任意の  $z \in U$  に対して  $f(z) \subset V$  をみたすときにいう。また  $f$  が全射であるとは、任意の  $y \in Y$  に対して、ある  $x \in X$  が存在して  $y \in f(x)$  をみたすときにいう。

**定義 1.13.** コンパクト距離空間  $X_i$  と、上半連続な集合値写像  $f_i: X_{i+1} \rightarrow 2^{X_i}$  からなる列  $\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$  に対して、

$$\varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty = \left\{ (x_i)_{i=1}^\infty \in \prod_{i=1}^\infty X_i \mid \text{任意の } i \geq 1 \text{ に対して, } x_i \in f_i(x_{i+1}) \right\}$$

を  $\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$  の逆極限という。また、 $X_i$  を因子空間、 $f_i$  を集合値結合写像という。

そして、2017 年、Kelly は定理 1.15 のように定理 1.10 を部分的に一般化した。

**定義 1.14.**  $f : X \rightarrow 2^Y$  を上半連続な集合値写像とし,  $G(f) = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in f(x)\}$  とする. このとき,  $f$  が単調であるとは, 射影  $p_X : G(f) \rightarrow X$  および  $p_Y : G(f) \rightarrow Y$  がいずれも連続写像の意味で単調であるときにいう.

**定理 1.15** ([6, Theorem 4.9]).  $\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$  を単位閉区間  $X_i = [0, 1]$  と全射単調上半連続集合値結合写像  $f_i : X_{i+1} \rightarrow 2^{X_i}$  からなる列とする. このとき,  $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$  は局所連結連続体となる.

このとき, 自然な流れとして, 我々は次の問題を考えた.

**問題 1.16** ([8, Question 1.6]).  $\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$  を連続体  $X_i$  と全射単調上半連続集合値結合写像  $f_i : X_{i+1} \rightarrow 2^{X_i}$  からなる列とする. このとき,

- (1)  $n \geq 1$  とする. もし任意の  $X_i$  が  $n$ -アポシンデティック (resp. 半アポシンデティック) であれば,  $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$  は  $n$ -アポシンデティック (resp. 半アポシンデティック) になるか.
- (2) もし任意の  $X_i$  が連続体鎖状連結であれば,  $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$  は連続体鎖状連結になるか.
- (3) もし任意の  $X_i$  が Wilder であれば,  $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$  は Wilder になるか.
- (4) もし任意の  $X_i$  が  $D$  であれば,  $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$  は  $D$  になるか.
- (5) もし任意の  $X_i$  が  $D^*$  であれば,  $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$  は  $D^*$  になるか.
- (6) もし任意の  $X_i$  が余局所連結であれば,  $\varprojlim\{X_i, f_i\}_{i=1}^\infty$  は余局所連結になるか.

## 2 単調条件

問題 1.16 を考えるために, 我々は次の概念を導入する ([8]).

**定義 2.1.**  $\mathcal{P}$  を連続体の位相的性質とする. このとき, 性質  $\mathcal{P}$  が単調条件 I をみたすとは, 性質  $\mathcal{P}$  をみたす任意の連続体  $X, Y$  と, 任意の全射単調上半連続集合値写像  $f : X \rightarrow 2^Y$  に対して,  $G(f)$  も再び性質  $\mathcal{P}$  をみたす連続体になるときにいう.

**定義 2.2.**  $\mathcal{P}$  を連続体の位相的性質とする. このとき, 性質  $\mathcal{P}$  が単調条件 II をみたすと

は、列  $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$  が性質  $\mathcal{P}$  をみたす連続体  $X_i$  と全射単調結合写像  $f_i : X_{i+1} \rightarrow X_i$  からなるならば、 $\varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$  も再び性質  $\mathcal{P}$  をみたす連続体になるときにいう。

定理 1.10 および定理 1.11 の主張にある性質はすべて単調条件 II をみたすことがわかる。

次が主結果である。

定理 2.3 ([8, Theorem 3.6]).  $\mathcal{P}$  を連続体の位相的性質とする。このとき、次の 2 条件は同値である。

- (1) 性質  $\mathcal{P}$  は単調条件 I および II をみたす。
- (2) 列  $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$  が性質  $\mathcal{P}$  をみたす連続体  $X_i$  と全射単調上半連続集合値結合写像  $f_i : X_{i+1} \rightarrow 2^{X_i}$  からなるならば、 $\varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$  も再び性質  $\mathcal{P}$  をみたす連続体になる。

この定理を用いることにより、我々は次のように問題 1.16 に対する解答を与えることができた ([8, 第 4 節および第 5 節])。ただし、問題 1.16(1) において、 $n \geq 2$  の場合については未解決である。

定理 2.4. 列  $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$  を連続体  $X_i$  と全射単調上半連続集合値結合写像  $f_i : X_{i+1} \rightarrow 2^{X_i}$  からなる列とする。このとき、

- (1) もし任意の  $X_i$  がアポシンデティック (resp. 半アポシンデティック) ならば、 $\varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$  は再びアポシンデティック (resp. 半アポシンデティック) となる。
- (2) もし任意の  $X_i$  が連続体鎖状連結であっても、 $\varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$  は必ずしも連続体鎖状連結とはならない。
- (3) もし任意の  $X_i$  が Wilder ならば、 $\varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$  は再び Wilder となる。
- (4) もし任意の  $X_i$  が  $D$  であっても、 $\varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$  は必ずしも  $D$  とはならない。
- (5) もし任意の  $X_i$  が  $D^*$  であっても、 $\varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$  は必ずしも  $D^*$  とはならない。
- (6) もし任意の  $X_i$  が余局所連結であっても、 $\varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$  は必ずしも余局所連結とはならない。

## 参考文献

- [1] C. E. Capel, *Inverse limit spaces*, Duke Math. J. **125** (1954), 233-245.
- [2] B. Espinoza and E. Matsushashi, *Weakly Whitney preserving maps*, Topology Appl., **262** (2019), 90-108.
- [3] B. Espinoza and E. Matsushashi, *D-continua, D\*-continua and Wilder continua*, Topology Appl., **285** (2020), 25pp.
- [4] W. T. Ingram and W. S. Mahavier, *Inverse limits of upper semi-continuous set valued functions*, Houston J. Math. **32** (2006), no.1, 119-130.
- [5] F. B. Jones, *Aposyndetic continua and certain boundary problems*, Amer. J. Math., **63** (1941), 545-553.
- [6] J. P. Kelly, *Monotone and weakly confluent set-valued functions and their inverse limits*, Topology Appl. **228**, 486-500, 2017.
- [7] I. Lončar, *Whitney map for hyperspaces of continua with the property of Kelley*, JP Jour. Geometry and Topology, **4** (2004), no. 2, 147-156.
- [8] Y. Oshima, *Some theorems on inverse limits with monotone upper semi-continuous bonding functions*, Topol. Proc. **60** (2022) 275-290.
- [9] B. E. Wilder, *Concerning point sets with a special connectedness property*, Colloq. Math., **19** (1968), 221-224.