z-neighborhood-sublinear 空間における C^*-および P-埋め込み

神奈川大学・工学部　平田　康史[*1]
Yasushi Hirata
Faculty of Engineering, Kanagawa University

大分大学教育マネジメント機構　家本　宣幸[*2]
Nobuyuki Kemoto
Institute for Educational Management, Oita University

静岡大学　大田　春外
Haruto Ohta
Shizuoka University

概要

neighborhood-linear 空間, neighborhood-sublinear 空間, z-neighborhood-sublinear 空間の概念を定義し, z-neighborhood-sublinear 空間における C^*-埋め込みと P-埋め込みの関係について論じる.

1　neighborhood-linear 空間

空間はハウスドルフ位相空間とする。空間 X の点 p における近傍フィルターを $\mathrm{Nbd}_X(p)$ で表す, つまり,

$$\mathrm{Nbd}_X(p) = \{V \subset X : p \in \mathrm{Int}_X V\}.$$

$\mathcal{D}$ が集合族 $\mathcal{V}$ の部分族で, 任意の $V \in \mathcal{V}$ に対して, $D \subset V$ となる $D \in \mathcal{D}$ が存在するとき, $\mathcal{D}$ は $\mathcal{V}$ の**生成系**であるという. $\mathrm{Nbd}_X(p)$ の生成系が空間 X の点 p における**近傍基**

本研究は科研費 (C) (課題番号: ([*1]) 19K03606, ([*2]) 21K03339) の助成を受けたものである.

である。

定義 1.1. 集合族 $\mathcal{D}$ の各元 D, D' に対して, $D \subset D'$ か $D' \subset D$ のいずれかが成り立っているとき, $\mathcal{D}$ は **linear** であるという. 空間 X の点 p において linear な近傍基があるとき, その空間は点 p において **neighborhood-linear** であるという [3]. 空間 X がそのすべての点において neighborhood-linear であるとき, 空間 X は neighborhood-linear であるという.

これと同じ性質は 1978 年に Sheldon Davis によって定義されており、そこではこの性質をもつ空間は **lob-space** とよばれている [1].

次の implication が成り立つことはよく知られている.

順序数の空間 $\Rightarrow$ 全順序位相空間 $\Rightarrow$ 一般順序空間 $\Rightarrow$ 単調正規空間

neighborhood-linear 空間は次のような性質をもつ.

事実 1.2. (1) 第一可算な空間や順序数の空間は neighborhood-linear である.
(2) 全順序位相空間で, neighborhood-linear ではないものが存在する.
(3) neighborhood-linear な空間の部分空間は neighborhood-linear である.
(4) neighborhood-linear 空間 X_0, X_1 で, その積空間 $X_0 \times X_1$ が neighborhood-linear ではないものが存在する.

2 neighborhood-sublinear 空間

$\mathcal{V}$ は空間 X の部分集合族とする. $\mathcal{D}$ が $\mathcal{V}$ の部分族で, 任意の $V \in \mathcal{V}$ に対して, $\bigcap \mathcal{D}' \subset V$ となる $\mathcal{D}$ の有限部分族 $\mathcal{D}'$ が存在するとき, $\mathcal{D}$ は $\mathcal{V}$ の**準生成系**であるという. $\mathrm{Nbd}_X(p)$ の準生成系が空間 X の点 p における**近傍準基**である.

定義 2.1. 集合族 $\mathcal{D}$ が, linear な部分族 $\mathcal{D}_s$ からなる有限和で $\mathcal{D} = \bigcup_{s \in S} \mathcal{D}_s$ のように表せるとき, $\mathcal{D}$ は **sublinear** であるという. 空間 X の点 p において sublinear な近傍準基があるとき, その空間は点 p において **neighborhood-sublinear** であるという [3]. 空間 X がそのすべての点において neighborhood-sublinear であるとき, 空間 X は neighborhood-sublinear であるという.

これに関連がある性質で, Brian Scott は文献 [5] の中で **globular space** という概念を定義しているが, その定義は neighborhood-sublinear 空間のものよりも複雑である.

neighborhood-linear 空間では事実 1.2 の (2) や (4) のような融通の利かないところがあるのに対して, neighborhood-sublinear 空間では次のことがいえる.

事実 2.2. (1) 一般順序空間は neighborhood-sublinear である.

(2) neighborhood-sublinear な空間の部分空間は neighborhood-sublinear である.

(3) neighborhood-sublinear 空間からなる有限積空間は neighborhood-sublinear である.

(4) 単調正規空間で, neighborhood-sublinear ではないものが存在する.

3 z-neighborhood-sublinear 空間

$\mathbb{R}$ は実数直線として, その部分空間として閉区間 $\mathbb{I} = [0, 1]$ をとる. 空間 X から $\mathbb{I}$ への連続関数 $f : X \to \mathbb{I}$ があって, $D = \{x \in X : f(x) = 0\}$ と表せるとき, D は空間 X における**零集合**であるという.

事実 3.1 (folklore)**.** 集合族 $\mathcal{V}$ が linear な生成系をもてば, $\mathcal{V}$ の任意の生成系 $\mathcal{Z}$ (これは linear でなくてもよい) に対して, $\mathcal{V}$ の linear な生成系を $\mathcal{Z}$ の部分族としてとることができる.

この事実を $\mathcal{V} = \mathrm{Nbd}_X(p)$ と $\mathcal{Z} = \{D \in \mathrm{Nbd}_X(p) : D$ は X における零集合 $\}$ に適用すれば, 次のことがわかる.

事実 3.2 (folklore)**.** Tychonoff 空間 X がその点 p において neighborhood-linear であるためには, 点 p において零集合からなる linear な近傍基をもつことが必要十分である.

neighborhood-sublinear 空間でもこれと同様のことが成り立つかどうかはそれほど簡単ではないように思える. そこで, 次の概念を導入することにする.

定義 3.3. 空間 X の点 p において, 零集合からなる sublinear な近傍準基があるとき, その空間は点 p において **z-neighborhood-sublinear** であるという [3]. 空間 X がそのすべての点において z-neighborhood-sublinear であるとき, 空間 X は z-neighborhood-sublinear であるという.

問題 3.4 ([3])**.** neighborhood-sublinear な Tychonoff 空間で, z-neighborhood-sublinear ではないものが存在するか?

neighborhood-sublinear 空間と同様に, z-neighborhood-sublinear 空間も次の性質をもつ.

事実 3.5. (1) z-neighborhood-sublinear な空間の部分空間は z-neighborhood-sublinear である.

(2) z-neighborhood-sublinear 空間からなる有限積空間は z-neighborhood-sublinear である.

単調正規空間について既知の事実 (Stares [6, Lemma 2.1]) を使えば, 次のことがわかる.

事実 3.6 ([3])**.** neighborhood-sublinear な単調正規空間は, z-neighborhood-sublinear である.

以上のことから, 次の系が得られる.

系 3.7 ([3])**.** 一般順序空間からなる有限積空間の部分空間は z-neighborhood-sublinear である.

4 C^*-埋め込みと P-埋め込み

空間 X の部分集合 E が X における C^***-埋め込み** (P**-埋め込み**) であるとは, E から $\mathbb{I} = [0, 1]$ (任意のバナッハ空間 M) への連続関数が, X 上の連続関数に拡張できることである. 一般に, P-埋め込みは C^*-埋め込みであるので, その逆が成り立つかどうかが問題となる. よく知られているように, 空間 X が正規であるためには X の任意の閉集合が C^*-埋め込みであることが必要十分である (Tietze-Urysohn の定理). また, 空間 X が族正規であるためには X の任意の閉集合が P-埋め込みであることが必要十分であることも知られている (Dowker [2]).

平田と矢島は 2017 年に次のことを証明した.

定理 4.1 ([4])**.** 順序数の部分空間 A, B の積空間 $A \times B$ の任意の閉集合 F について,
F が $A \times B$ において C^*-埋め込みならば, F は $A \times B$ において P-埋め込みである.

この定理において, F が閉集合という仮定を除去したいと思ったことがきっかけで, z-neighborhood-sublinear 空間を定義し, 次の結果を得るに至った.

定理 4.2 ([3])**.** 任意の z-neighborhood-sublinear 空間 F は次の性質をもつ.

(C^*=P: dense): F の任意の稠密な部分集合 E について,

E が F において C^*-埋め込みならば, E は F において P-埋め込みである.

補題 4.3 (folklore)**.** $\mathcal{C}$ は空間からなるクラスで, 次の条件 (i) と (ii) を満たすものとする.

(i) $X \in \mathcal{C}$ ならば, X の任意の閉集合 F について $F \in \mathcal{C}$.

(ii) 任意の $F \in \mathcal{C}$ は次の性質をもつ.

(C^*=P: dense): F の任意の稠密な部分集合 E について,

E が F において C^*-埋め込みならば, E は F において P-埋め込みである.

このとき, 任意の $X \in \mathcal{C}$ に対して, 次の 2 つの条件は互いに同値である.

(C^*=P: closed): X の任意の閉集合 F について,

F が X において C^*-埋め込みならば, F は X において P-埋め込みである.

(C^*=P: subset): X の任意の部分集合 E について,

E が X において C^*-埋め込みならば, E は X において P-埋め込みである.

z-neighborhood-sublinear 空間全体のクラスを $\mathcal{C}$ とすると, 補題 4.3 の仮定 (i) と (ii) の条件を満たすので, 次の系が得られる.

系 4.4 ([3])**.** 任意の z-neighborhood-subliner 空間 X に対して, 次の 2 つの条件は互いに同値である.

(C^*=P: closed): X の任意の閉集合 F について,

F が X において C^*-埋め込みならば, F は X において P-埋め込みである.

(C^*=P: subset): X の任意の部分集合 E について,

E が X において C^*-埋め込みならば, E は X において P-埋め込みである.

一般順序空間からなる有限積空間の部分空間は z-neighborhood-sublinear であるから, 次の系が得られる.

系 4.5 ([3])**.** X は一般順序空間からなる有限積空間の部分空間とする. このとき,

(1) X は次の性質をもつ.

(C^*=P: dense): X の任意の稠密な部分集合 D について,

D が X において C^*-埋め込みならば, D は X において P-埋め込みである.

(2) 次の 2 つの条件は互いに同値である.

($C^*{=}P$: closed): X の任意の閉集合 F について,

F が X において C^*-埋め込みならば, F は X において P-埋め込みである.

($C^*{=}P$: subset): X の任意の部分集合 E について,

E が X において C^*-埋め込みならば, E は X において P-埋め込みである.

これを $X = A \times B$ として適用すれば, 定理 4.1 から閉集合の仮定を除去して, 次のように一般化できる.

系 4.6 ([3])**.** 順序数の部分空間 A, B の積空間 $A \times B$ の任意の部分集合 E について,
E が $A \times B$ において C^*-埋め込みならば, E は $A \times B$ において P-埋め込みである.

謝辞. 論文 [3] のレフェリーには, neighborhood-linear 空間, neighborhood-sublinear 空間に類似した性質についての先行研究 [1], [5] についてお知らせいただきました. ここに感謝の意を表します

参考文献

[1] S. W. Davis, *Spaces with linearly ordered local bases*, Topology Proc. **3** (1978), 37–51.

[2] C. H. Dowker, *On a theorem of Hanner*, Ark. Mat. **2** (1952), 307–313.

[3] Y. Hirata, N. Kemoto and H. Ohta, *C^*-embedded dense subsets of z-neighborhood-sublinear spaces are P-embedded*, Topology Proc., to appear.

[4] Y. Hirata and Y. Yajima, *C^*-embedding implies P-embedding in products of ordinals*, Topology and Appl., **231** (2017), 251–265.

[5] B. M. Scott, *Local bases and product partial orders*, in: Topology and order structures, Part 1, Math. Centre Tracts **142**, Math. Centrum, Amsterdam (1981), 155–172.

[6] I. S. Stares, *Monotone normality and extension of functions*, Comment. Math. Univ. Carolinae **36** (1995), 563–578.