グロモフ・ハウスドルフ空間への位相的埋め込みについて

理化学研究所光量子工学研究センター光量子工学制御技術開発チーム
伊敷 喜斗
Yoshito Ishiki
Photonics Control Technology Team
RIKEN Center for Advanced Photonics

1 はじめに

記号 $\mathcal{M}$ ですべてのコンパクト距離空間の等長類全体の集合を表すとする．そして記号 $\mathcal{GH}$ でグロモフ・ハウスドルフ距離とする．詳しい定義はセクション 2 を参照されたい．組 $(\mathcal{M}, \mathcal{GH})$ を**グロモフ・ハウスドルフ距離**と呼ぶグロモフ・ハウスドルフ空間はコンパクト距離空間全体のモジュライ空間でありその幾何学的，あるいは位相的性質は興味を持って調べられている．特に埋め込みの問題に関しては，論文 [1] において、グロモフ・ハウスドルフ空間に任意の有限距離空間を等長に埋め込めることが示されている．しかしながら一般の可分距離空間，あるいは一般のコンパクト距離空間でさえも等長に埋め込めるかどうかは未解決である．この文章では，等長埋め込みではなく位相的埋め込みについての筆者の定理を紹介する．すなわちコンパクト距離化可能空間をグロモフ・ハウスドルフ空間の連結空間のなす部分集合へ位相的に埋め込めるという論文 [3], [4], そして [5] で得られた筆者の結果について紹介する．詳細な証明については各論文を参照されたい．

2 準備

(Z, h) を距離空間とし，S をその空ではない部分集合とし $x \in Z$ とする．このとき S と x の間の距離 $d(x, S)$ を $\inf_{s \in S} d(x, s)$ と定義する．

定義 2.1. (Z, h) を距離空間とし, A, と B を Z の部分集合とする．このとき (Z, h) におけ

る A と B のハウスドルフ距離 $\mathcal{HD}(A, B, Z, h)$ を $\max\{\sup_{a\in A} d(a, B), \sup_{b\in B} d(b, A)\}$ と定義する.

定義 2.2. 距離空間 (X, d) と (Y, e) のグロモフ・ハウスドルフ距離 $\mathcal{GH}((X, d), (Y, e))$ は距離空間 (Z, h) と等長写像 $i\colon (X, d) \to (Z, h)$ と $j\colon (Y, e) \to (Z, h)$ を動かした時の $\mathcal{HD}(i(X), j(Y); Z, h)$ の下限で定義する.

このとき次の定理が基本的である.

定理 2.1. グロモフ・ハウスドルフ距離 $\mathcal{GH}$ は $\mathcal{M}$ 上で距離関数になっている. 特に二つのコンパクト距離空間のグロモフ・ハウスドルフ距離が 0 ならばそれらは互いに等長的である. さらに距離空間 $(\mathcal{M}, \mathcal{GH})$ は測地距離空間である. つまり二点間を結ぶ測地線が存在する.

次の定理は論文 [2] で証明されている.

定理 2.2. グロモフ・ハウスドルフ空間 $(\mathcal{M}, \mathcal{GH})$ の異なる任意の二点を結ぶ測地線は連続体濃度存在する.

この定理 2.2 の証明手法を用いて以下の定理も証明された. 単位閉区間 $[0, 1]$ の可算直積空間を**ヒルベルト立方体**と呼ぶ. この空間を $\mathbf{Q}$ と表すことにする.

定理 2.3. グロモフ・ハウスドルフ空間 $(\mathcal{M}, \mathcal{GH})$ の任意の二点を与えたときにヒルベルト立方体 $\mathbf{Q}$ から $\mathcal{M}$ への位相的埋め込みが存在してその像は先に与えた二点を含む.

論文 [3], [4], そして [5] ではこの埋め込み定理を発展させたものを証明した.

3 主定理

3.1 フラクタル次元に関する埋め込み定理

論文 [3] では主に位相次元 $\dim_{\mathrm{T}} X$, Hausdorff 次元 $\dim_{\mathrm{H}}(X, d)$, パッキング次元 $\dim_{\mathrm{P}}(X, d)$, 上箱次元 $\overline{\dim}_{\mathrm{B}}(X, d)$, Assouad 次元 $\dim_{\mathrm{A}}(X, d)$ を取り扱った. これらの次元の正確な定義については論文 [3] を参照されたい. 私がこれらの次元を選んだのは, これらが有限安定性をもつからである. つまり距離空間 (X, d) とその部分集合 A と B について $\dim(A \cup B) = \dim(A) + \dim(B)$ が成り立つということである. ただし位相次元については直和でなければ成り立たない. 任意の有界距離空間 (X, d) について以下の基

本的な不等式が成り立つことに注意しよう.

$$\dim_{\mathrm{T}} X \leq \dim_{\mathrm{H}}(X,d) \leq \dim_{\mathrm{P}}(X,d) \leq \overline{\dim}_{\mathrm{B}}(X,d) \leq \dim_{\mathrm{A}}(X,d).$$

位相空間が **Cantor 空間**であるとはそれが Cantor 集合に同相であるときにいう.集合 X 上の距離関数 $d : X \times X \to [0,\infty)$ が**超距離関数**であるとは強三角不等式 $d(x,y) \leq d(x,z) \vee d(z,y)$ を満たすときにいう.ここで $\vee$ は $\mathbb{R}$ 上の最大値関数を表す.

記号 $\mathcal{L}$ で $(a_1,a_2,a_3,a_4) \in [0,\infty]^4$ であって $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$ を満たすもの全体を表すことにする.また $\mathcal{R}$ で $(l,a_1,a_2,a_3,a_4) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}) \times [0,\infty]^4$ であって $l \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$ を満たすもの全体を表すとする.

まず論文 [3] では以下の指定次元問題を解いた.

定理 3.1. 任意の $(a_1,a_2,a_3,a_4) \in \mathcal{L}$ について *Cantor* 超距離空間 (X,d) が存在して次を満たす.$\dim_{\mathrm{H}}(X,d) = a_1, \dim_{\mathrm{P}}(X,d) = a_2, \overline{\dim}_{\mathrm{B}}(X,d) = a_3, \dim_{\mathrm{A}}(X,d) = a_4$.

定理 3.2. 任意の $(l,a_1,a_2,a_3,a_4) \in \mathcal{R}$ について距離空間 (X,d) が存在して以下を満たす.

$$\begin{aligned}&\dim_{\mathrm{T}} X = l, \dim_{\mathrm{H}}(X,d) = a_1, \dim_{\mathrm{P}}(X,d) = a_2, \overline{\dim}_{\mathrm{B}}(X,d) = a_3,\\ &\dim_{\mathrm{A}}(X,d) = a_4.\end{aligned}$$

さて次に任意の $(l,a_1,a_2,a_3,a_4) \in \mathcal{R}$ に対して $\mathcal{D}(l,a_1,a_2,a_3,a_4)$ を $(X,d) \in \mathcal{M}$ であって

$$\begin{aligned}&\dim_{\mathrm{T}} X = l, \dim_{\mathrm{H}}(X,d) = a_1, \dim_{\mathrm{P}}(X,d) = a_2, \overline{\dim}_{\mathrm{B}}(X,d) = a_3,\\ &\dim_{\mathrm{A}}(X,d) = a_4.\end{aligned}$$

を満たすもの全体とする.定理 3.2 から $\mathcal{D}(l,a_1,a_2,a_3,a_4) \neq \emptyset$ であることがわかる.また,$\mathcal{U}$ で $\mathcal{M}$ のなかの超距離空間全体を表すとする.

定理 3.3. 集合 $\mathcal{S}$ はある $(l,a_1,a_2,a_3,a_4) \in \mathcal{R}$ について $\mathcal{S} = \mathcal{D}(l,a_1,a_2,a_3,a_4)$ であるかもしくは $\mathcal{S} = \mathcal{U}$ であるとする.そして $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ で $\{(X_i,d_i)\}_{i=1}^{n+1}$ を $\mathcal{S}$ 内の列で異なる i,j について $\mathcal{GH}((X_i,d_i),(X_j,d_j)) > 0$ を満たすものとする.ヒルベルト立方体 $\mathbf{Q}$ 内の $n+1$ 個の点 $\{v_i\}_{i=1}^{n+1}$ を任意にとる.このとき位相的埋め込み $\Phi : \mathbf{Q} \to \mathcal{S}$ であって任意の $i \in \{1,\ldots,n+1\}$ について $\Phi(v_i) = (X_i,d_i)$ であるものが存在する.

3.2 連続体に関する位相的埋め込み

次に論文 [4] で得られた定理を紹介する．この論文では上で述べた論文 [2] と [3] に関連する研究として，グロモフ・ハウスドルフ空間の中の連結な距離空間全体，弧状連結な空間全体，測地空間全体，そして CAT(0) 空間全体の集合が弧状連結で無限大の位相次元を持つことを証明した．また，固有な CAT(0) 空間全体の集合が点付きグロモフ・ハウスドルフ距離に関して無限大の位相次元を持つことも示した．詳細な証明は論文 [4] を参照されたい．ここでは定理の主張を紹介するのみにとどめる．

まず，CAT(0) 空間を定義しよう．測地空間 (X, d) が CAT(0) であるとは任意の X 内の測地三角形 $\triangle$ と $x, y \in \triangle$ について $d(x, y) \leq d_{\mathbb{R}^2}(\overline{x}, \overline{y})$ が成り立つときにいう．ここで $d_{\mathbb{R}^2}$ は二次元のユークリッド距離であり，$\overline{x}$ と $\overline{y}$ は，$\triangle$ に対応する $\mathbb{R}^2$ 内の比較三角形 $\overline{\triangle}$ 内の x と y に対応する点である．空間が CAT(0) であるということは，空間が局所的には曲率が非負であるとみなせるということである．

記号 $\mathcal{C}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{G}$, そして $\mathcal{Z}$ でそれぞれ連結，弧状連結，測地的，そして CAT(0) であるような $\mathcal{M}$ の部分集合とする．

まず最初に $\mathbf{Q}$ 内の $n+1$ 個の点と上で定義した $\mathcal{M}$ の部分集合の $n+1$ 個の点を与えた時に，この最初に与えた $n+1$ 個の点の対応の拡張になっているような位相的埋め込みの存在を証明した．

定理 3.4. 整数 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ をとる．そして $\{v_i\}_{i=1}^{n+1}$ を $\mathbf{Q}$ のなかの $n+1$ 個の異なる点とする．集合 $\mathcal{S}$ は $\mathcal{C}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{G}$, そして $\mathcal{Z}$ のうちのどれかひとつとする．集合 $\mathcal{S}$ の中の点 $\{(X_i, d_i)\}_{i=1}^{n+1}$ は異なる i, j について $\mathcal{GH}((X_i, d_i), (X_j, d_j)) > 0$ を満たすものとする．このとき位相的埋め込み $\Phi : \mathbf{Q} \to \mathcal{S}$ が存在して $\Phi(v_i) = (X_i, d_i)$ を満たす．

系 3.1. 集合 $\mathcal{C}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{G}$, そして $\mathcal{Z}$ は $\mathcal{M}$ のなかで弧状連結であり，これらの空集合ではない開集合は全て無限次元である．

以上の定理 3.4 を点付きグロモフ・ハウスドルフ空間に拡張したものも証明したが詳細は論文 [4] を参照されたい．

3.3 距離木に関する位相的埋め込み

論文 [5] において，筆者は，グロモフ・ハウスドルフ空間の中の距離木のなす部分集合が無限次元であることと，弧状連結であることを証明した．以下で詳細な定理を述べる．

今から距離木を定義する．この距離木についてはいろいろ同値な特徴付けが知られているが，ここでは測地線 (測地線の像) を用いた定義を紹介する．距離空間 (X, d) が**距離木**，もしくは $\mathbb{R}$-**木**であるとは，任意の $x, y, z \in X$ と x, y を結ぶ測地線 (正確には測地線の像)G_1 と y, z を結ぶ測地線 (正確には測地線の像)G_2 について，もしも $G_1 \cap G_2 = \{y\}$ であるならば $G_1 \cup G_2$ が x と z を結ぶ測地線 (正確には測地線の像) になるときにいう．

記号 $\mathcal{T}$ で $\mathcal{M}$ の中の距離木全体の集合を表すことにする．

定理 3.5. 整数 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ をとる．そして $\{v_i\}_{i=1}^{n+1}$ を $\mathbf{Q}$ のなかの $n+1$ 個の異なる点とする．集合 $\mathcal{T}$ の中の点 $\{(X_i, d_i)\}_{i=1}^{n+1}$ は異なる i, j について $\mathcal{GH}((X_i, d_i), (X_j, d_j)) > 0$ を満たすものとする．このとき位相的埋め込み $\Phi : \mathbf{Q} \to \mathcal{T}$ が存在して $\Phi(v_i) = (X_i, d_i)$ を満たす．

系 3.2. 集合 $\mathcal{T}$ は $\mathcal{M}$ のなかで弧状連結であり，これらの空集合ではない開集合は全て無限次元である．

以上の定理 3.5 も定理 3.4 と同様に点付きグロモフ・ハウスドルフ空間へ拡張したが，論文 [5] を参照されたい．

注意 3.1. 三つの定理 *3.3, 3.4,* と *3.5* の証明手法について説明する．これらの定理は全く同様の主張の形態をしているが，証明手法はやや異なる．まず定理 *3.3* については，次元を保存しつつ位相的埋め込みを構成するために距離空間の直和構成を用いている．定理 *3.4* では連結性や CAT(0) であるという性質を保存するために距離空間の ℓ^2 型の直積を用いて位相的埋め込みを構成した．定理 *3.5* では距離木であるということを保存するために距離空間のウェッジ和を用いた．つまり複数の距離空間の点を一つずつとり，それらを同一視する構成法である．定理 *3.4* のように直積を用いてしまうと，木同士の直積は木ではないので困ったことになる．

3.4　問い

ここではグロモフ・ハウスドルフ空間にまつわる問いをここで上げておく．

冒頭の問いを改めて述べる．

問 3.1. (X, d) を任意のコンパクト距離空間とする．このとき (X, d) から $(\mathcal{M}, \mathcal{GH})$ への等長埋め込みは存在するか？

問 3.2. (X,d) を任意の可分距離空間とする．このとき (X,d) から $(\mathcal{M},\mathcal{GH})$ への等長埋め込みは存在するか？

以下の問いは全て筆者の問いである．
上で述べた問いよりも弱くなるが以下も興味深い．ただしこれでもまだ難しい．

問 3.3. (X,d) を任意のコンパクト距離空間，もしくは可分距離空間とする．このとき (X,d) から $(\mathcal{M},\mathcal{GH})$ への双リプシッツ埋め込みは存在するか？また，双ヘルダー埋め込みは存在するか？

次の問いは無限次元トポロジー的にも興味深いと思われる．

問 3.4. グロモフ・ハウスドルフ空間 $(\mathcal{M},\mathcal{GH})$ の位相型は何か？つまりどのような *(* 典型的な *)* 無限次元空間と同相か？

筆者は $(\mathcal{M},\mathcal{GH})$ は ℓ^2, つまり無限次元可分ヒルベルト空間と同相ではないかと考えているが，証明する術は今の所何もないし，これを支持する論理的な証拠もあるわけではない．
また，埋め込みの拡張に関して次の問いもグロモフ・ハウスドルフ空間の位相に関連するだろう．

問 3.5. X を距離化可能空間とし，A をその閉集合とする．この条件のもと次の拡張問題を考える．

(1) 任意の位相的埋め込み $f\colon A \to \mathcal{M}$ は X から $\mathcal{M}$ への位相的埋め込みに拡張できる．

このとき (1) が成り立つような (X,A) は何であるか*?* また (1) が成り立たないような (X,A) は何であるか？

三つの定理 3.3, 3.4, もしくは 3.5 の証明手法を用いると，X がヒルベルト立方体で A が有限集合のとき，問 3.5 の拡張問題 (1) が肯定的に解けることがわかる．

参考文献

[1] S. Iliadis, A.O. Ivanov, and A.A. Tuzhilin. *Local structure of Gromov-Hausdorff space, and isometric embeddings of finite metric spaces into this space*, Topology Appli, 221 (2017), 393–398.

[2] Y. Ishiki, *Branching geodesics of the Gromov–Hausdorff distance*, Anal. Geom. Metr. Spaces, 10 (2022), 109–128.

[3] Y. Ishiki, *Fractal dimensions and topological embeddings of simplexes into the Gromov–Hausdorff space*, 2021, arXiv:2110.01881.

[4] Y. Ishiki, *Continua in the Gromov–Hausdorff space*, Topology Appl. 312, (2022), 108058.

[5] Y. Ishiki, *Metric trees in the Gromov–Hausdorff space*, to appear in Comment. Math. Univ. Carol.