Subgroups of Richard Thompson's group F

早稲田大学 理工学術院総合研究所　佐藤 尚倫

Takamichi Sato

Waseda Research Institute for Science and Engineering

1　序

Richard Thompson の群 F, T, V は 1965 年に発見され, 群の語の問題に否定的な解答を与える有限表示群の構成のために利用された. それ以降, これらの群はいくつかの珍しい性質を持つことが明らかにされてきており, 現在も活発に研究されている. 群 F は有限表示をもつ無限群であり, いくつかの幾何学的な実現の仕方が発見されて以降, 群論の問題を幾何学的な設定に置き換えて解析する手法が多用されている. 代表的なものとして, 単位閉区間 $[0,1]$ 上の区分線形同相写像群のある部分群としての実現がある ([2]). 群 F の部分群に関する研究として, F の有限指数部分群の構造が一定程度知られている ([1]). 一方で, 群 F の $[0,1]$ への自然な作用のもとでの固定部分群の特性を解明する研究が D. Savchuk [6] により開始された. U を開区間 $(0,1)$ の実数から成る有限部分集合とし, H_U を U に属す各実数を固定する固定部分群とする. Savchuk は, H_U は F の無限指数部分群であり, 特に, U が一点集合であるとき H_U が F の極大部分群になることを示した. その後, G. Golan と M. Sapir [3, 4] は H_U の代数的構造や性質を解明している. さらに, [4, 5] においてこれらの固定部分群の分類がなされた. 本稿では, 固定部分群 H_U を群 F の部分群として代数的に特徴付けた結果を解説する.

2　Richard Thompson の群 F と固定部分群

Richard Thompson の群 F は, $[0,1]$ 上の区分線型な同相写像であり, 有限個の二進有理数を除き微分可能で, 微分可能な区間上の微分係数は 2 の整数べき乗であるもの全体から成る群として定められる. このとき, $f \in F$ に対して, $\mathrm{supp}(f) = \{x \in$

$[0,1] \mid f(x) \neq x\}$ とする．J を区間とするとき, $F_J = \{f \in F \mid \mathrm{Cl}_{[0,1]}(\mathrm{supp}(f)) \subset J\}$ は F の部分群となる．また, $F_{(0,1)} = [F,F]$ が成り立つことが知られている ([2])．ここで, $[F,F]$ は F の交換子部分群を表すとする．

開区間 $(0,1)$ の有限部分集合 X に対して, H_X を F における X の固定部分群とする．すなわち, $H_X = \{f \in F \mid f(x) = x \text{ for each } x \in X\}$ とする．

二進有理数全体からなる集合を $\mathbb{Z}[1/2]$ で表す．任意の有限部分集合 $Y \subset [0,1]$ は次の三つの集合に分割できることに注意する: $Y_1 = Y \cap \mathbb{Z}[1/2]$, $Y_2 = Y \cap (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}[1/2])$, $Y_3 = Y \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

$Y = \{r_1, \ldots, r_n\} \subset [0,1]$, $r_j < r_{j+1}$ $r_1, r_n \notin Y_2$ に対して,

$$B_Y = F_{[r_1, r_n]} \cap H_{Y \setminus \{r_1, r_n\}}$$

とする．

U を $(0,1)$ の有限部分集合とする．$U_1 \cup U_3 = \{r_1, \ldots, r_n\}$ と書く．ここで, $r_j < r_{j+1}$. $r_0 = 0$, $r_{n+1} = 1$, $U_{2,k} = \{q \in U_2 \mid r_k < q < r_{k+1}\}$ とする．このとき, $U_2 = \bigsqcup_{k=0}^{n} U_{2,k}$ であり, また,

$$H_U = B_{\{r_0, r_1\} \cup U_{2,0}} \times \cdots \times B_{\{r_n, r_{n+1}\} \cup U_{2,n}}$$

が成り立つ ([4, subsection4.2]).

3　固定部分群の特徴付け

群 G とおのおのの非負整数 n に対して, G の部分群から成る族 $\mathcal{M}_n(G)$ を以下のように帰納的に定める．$\mathcal{M}_0(G) = \{G\}$,

$$\mathcal{M}_n(G) = \{H \mid K \in \mathcal{M}_{n-1}(G) \text{ が存在して } H \text{ は } K \text{ の極大部分群}\}.$$

群 G の中心が自明 $(Z(G) = \{1\})$ であるとする．G が二つの直既約分解 $G = \prod_{i=1}^{n} H_i = \prod_{j=1}^{m} K_j$ をもつとき, $n = m$ であり, 置換 $\sigma \in S_n$ が存在して, おのおのの i について $H_i = K_{\sigma(i)}$ が成り立つことが示される．以下では, $\epsilon(G)$ で, G のある直既約分解の因子群の個数を表すとする．

直既約群 G が $Z(G) = \{1\}$ を満たすとする．おのおのの非負整数 n に対して,

$$\mathcal{I}_n(G) = \{H < G \mid \text{正規部分群 } L < H \text{ が存在して } Z(L) = \{1\},\ \epsilon(L) = n+1\},$$

$$\mathcal{J}_n(G) = \{H < G \mid Z(H) = \{1\},\ \epsilon(H) = n+1\} (\subset \mathcal{I}_n(G))$$

とする. また, おのおのの非負整数 n に対して, $\mathcal{K}_n(G)$, $\mathcal{A}_n(G)$, $\mathcal{C}_n(G)$ をそれぞれ以下のように帰納的に定める. $\mathcal{K}_0(G) = \mathcal{A}_0(G) = \mathcal{C}_0(G) = \{G\}$,

$$\mathcal{K}_n(G) = \{H \in \mathcal{M}_n(G) \cap \mathcal{J}_n(G) \mid K \in \mathcal{K}_{n-1}(G) \text{ が存在して } H \text{ は } K \text{ の極大部分群}\},$$

$$\mathcal{A}_n(G) = \{H \in \mathcal{K}_n(G) \mid H \cong G^{n+1},\ K \in \mathcal{A}_{n-1}(G) \text{ が存在して } H \text{ は } K \text{ の極大部分群}\},$$

$$\mathcal{C}_n(G) = \{H \in \mathcal{M}_n(G) \cap \mathcal{I}_n(G) \cap \mathcal{J}_0(G) \mid [H,H] \cong [G,G]^{n+1},\ K \in \mathcal{C}_{n-1}(G) \text{ が存在して } H \text{ は } K \text{ の極大部分群}\}.$$

また, $\mathcal{K}(G) = \bigcup_n \mathcal{K}_n(G)$ とする.

まず, 固定点集合が二進有理数と無理数から成る固定部分群について以下が成立する.

命題 3.1. n を非負整数とするとき, 次は同値である.

(1) $H \in \mathcal{K}_n(F)$.

(2) $U \subset \mathbb{Z}[1/2] \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ で $|U| = n$ を満たすものが存在して $H = H_U$.

以下では, 固定点集合の要素として, 二進有理数でない有理数が属す場合も含めて考える. まず, 以下が成り立つ.

補題 3.2. n を非負整数とする. このとき, 以下が同値である.

(1) $\mathcal{K}(F) = \bigcup_l \mathcal{K}_l(F)$ に属すある群のある直既約分解の因子群 G が存在して $H \in \mathcal{C}_n(G)$ が成り立つ.

(2) $a, b \in \mathbb{Z}[1/2] \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ と $U \subset (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}[1/2]) \cap (a, b)$ で $|U| = n$ を満たすものが存在して, $G = F_{[a,b]}$, $H = F_{[a,b]} \cap H_U (= B_{\{a,b\} \cup U})$ が成り立つ.

注意 3.3. 補題3.2 により, $\mathcal{K}(F)$ に属す群を直既約分解したときの因子群 G は, $G = F_{[a,b]}$, $a, b \in \mathbb{Z}[1/2] \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ となることが分かる. このことより, G は F, $[F, F]$, $F_{[0,1)}$ のいずれかと同型になることが示せる.

以下では, まず, $F_{[0,1)}$ あるいは, $F_{(0,1]}$ を特徴付けることから考える.

定義 3.4. $f \in F$ に対して, $K_f < F$ を以下で定める. $f = 1$ のとき, $K_f = F$, $f \neq 1$ のとき, K_f は次を満たす F の部分群とする.

(i) $f \in K_f$,

(ii) $Z(K_f) = \{1\}$,

(iii) K_f が直既約分解 $\prod_{i=1}^{\epsilon(K_f)} K_i$ をもつとき, おのおのの $i \in \{1, \ldots, \epsilon(K_f)\}$ に対して非負整数 m_i が存在して, K_i は $\mathcal{A}_{m_i}(F)$ のある元のある直既約分解のある因子群である,

(iv) $C_{K_f}(f) \cong \mathbb{Z}^{\epsilon(K_f)}$. ここで, $C_{K_f}(f)$ は K_f における $\{f\}$ の中心化群とする.

定義 3.5. $H < F$, $h \in H$ とする. $K_h = \prod_{i=1}^{\epsilon(K_h)} K_i$ とするとき, $\pi_i : K_h \to K_i$ を射影とする. $H < F$ が閉部分群であるとは, $\bigcup_{h \in H} \{\pi_i(H) \,|\, i \in \{1, \ldots, \epsilon(K_h)\}\} \subset H$ を満たすときをいう.

$\mathcal{L}(F)$ を F の正規かつ閉部分群で, アーベル化が $\mathbb{Z}$ と同型であるようなもの全体からなる族とする. L は $\mathcal{L}(F)$ の極大元であるとする. このとき, $L = F_{[0,1)}$ あるいは $L = F_{(0,1]}$ のいずれかであることが示される (逆もまた成り立つ).

この段落では, 非負整数 n と下記の二つの写像 m, k に対して, ある直積を定める. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $m : \{1, \ldots, n+1\} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ は写像とする. おのおのの $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ に対して, X_i を以下で定める.

$$X_i = \begin{cases} L \times [F,F]^{m(i)-1} \times L & \text{if } m(i) \neq 0 \\ F & \text{if } m(i) = 0. \end{cases}$$

このとき,

$$\prod_{i=1}^{n+1} X_i \cong \prod_{i \in P} (L \times [F,F]^{m(i)-1} \times L) \times F^{n+1-|P|} (\cong L^{2|P|} \times [F,F]^{\sum_{i \in P}(m(i)-1)} \times F^{n+1-|P|}).$$

ここで, $P = \{i \in \{1, \ldots, n+1\} \,|\, m(i) \neq 0\}$. いま, $l = n + \sum_{i=1}^{n+1} m(i)$ とおくと, $2|P| + \sum_{i \in P}(m(i)-1) + n + 1 - |P| = l + 1$ だから,

$$\prod_{i=1}^{n+1} X_i \cong \prod_{i=1}^{l+1} R_i, \quad R_i \in \{L, [F,F], F\}$$

と書ける. $Y \in \{L, [F,F], F\}$ に対して, $Q_Y = \{j \in \{1, \ldots, l+1\} \,|\, R_j = Y\}$ とする. $k : \{1, \ldots, l+1\} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を写像とする. $Y \in \{L, [F,F], F\}$ と $i \in Q_Y$ に対して,

$Z_{k(i),Y}$ を $\mathcal{C}_{k(i)}(G_Y)$ のある元とする．ここで, G_Y は, $\mathcal{K}(F)$ に属すある群のある直既約分解のある因子群であり, Y と同型であるものとする．各 $c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して,

$$Q_{Y,c} = \{j \in Q_Y \mid k(j) = c\}$$

とする．このとき, $Q_Y = \bigsqcup_{c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} Q_{Y,c}$. いま,

$$\prod_{i \in Q_{Y,c}} Z_{k(i),Y} \cong Z_{c,Y}^{|Q_{Y,c}|}, \qquad \prod_{i \in Q_Y} Z_{k(i),Y} \cong \prod_{c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \Big(\prod_{i \in Q_{Y,c}} Z_{k(i),Y} \Big)$$

に注意すれば,

$$\prod_{Y \in \{L,[F,F],F\}} \prod_{i \in Q_Y} Z_{k(i),Y} \cong \prod_{Y \in \{L,[F,F],F\}} \prod_{c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} Z_{c,Y}^{|Q_{Y,c}|}$$

と書ける．

おのおのの非負整数 r に対して, $\mathcal{E}_r(F) \subset \mathcal{M}_r(F) \cap \mathcal{I}_r(F)$ を次で定める．$\mathcal{E}_0(F) = \{F\}$, $\mathcal{E}_r(F) = \{H \in \mathcal{M}_r(F) \cap \mathcal{I}_r(F) \mid$ 以下の条件 $(i), (ii)$ を満たす.$\}$

(i) $K \in \mathcal{E}_{r-1}(F)$ が存在して H は K の極大部分群,

(ii) $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $m : \{1, \ldots, n+1\} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $k : \{1, \ldots, l+1\} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して, $r = l + \sum_{j=1}^{l+1} k(j)$,

$$H \cong \prod_{Y \in \{L,[F,F],F\}} \prod_{i \in Q_Y} Z_{k(i),Y}$$

が成り立つ．ここで, $l = n + \sum_{i=1}^{n+1} m(i)$ とする．

このとき, 次が成り立つ．

定理 3.6. r を非負整数とするとき, 次は同値である．

(1) $H \in \mathcal{E}_r(F)$.

(2) $U \subset (0,1)$ で $|U| = r$ を満たすものが存在して $H = H_U$.

参考文献

[1] Bleak, C.; Wassink, B., *Finite index subgroups of R. Thompson's group F*, arXiv:0711.1014

[2] Cannon, J. W.; Floyd, W. J.; Parry, W. R., *Introductory notes on Richard Thompson's groups*, Enseign. Math. (2) **42** (1996), no. 3-4, 215–256.

[3] Golan, G.; Sapir, M., *On subgroups of R. Thompson's group F*, Trans. Amer. Math. Soc. **369** (2017), no. 12, 8857-8878.

[4] Golan, G.; Sapir, M., *On the stabilizers of finite sets of numbers in the R. Thompson group F*, St. Petersburg Math. J. **29** (2018), no. 1, 51–79.

[5] Sato, T., *Direct decompositions of groups of piecewise linear homeomorphisms of the unit interval*, Int. J. Algebra Comput. **32** (2022), no. 2, 289-305.

[6] Savchuk, D., *Schreier graphs of actions of Thompson's group F on the unit interval and on the Cantor set*, Geom. Dedicata **175** (2015), 355–372.