（ 続紙 1 ）

京都大学	博 士（ 理 学 ）	氏名	片田 舞
論文題目	ACTIONS OF AUTOMORPHISM GROUPS OF FREE GROUPS ON SPACES OF JACOBI DIAGRAMS. II （ヤコビ図の空間への自由群の自己同型群の作用II）		

（論文内容の要旨）

本論文は，ヤコビ図のなすベクトル空間への有限生成自由群の自己同型群による作用の構造に関するものである．ヤコビ図とは，各3価頂点の周りで巡回順序が与えられた1,3価グラフのことである．ヤコビ図の次数とは頂点の個数の半分である．

申請者は以前の論文において，n本の向き付けられた弧からなる1次元多様体X_nの上の次数dのヤコビ図の空間$A_d(n)$に対し，n個の元で生成される自由群F_nの自己同型群$Aut(F_n)$の作用を考察し,特にd=2の場合において,$A_2(n)$の$Aut(F_n)$加群構造を決定している．

本論文においては，一般の次数dに対して$A_d(n)$のAut（F_n）構造を詳細に検討し，さらに，自由群F_nの自己準同型モノイド$End(F_n)$の作用についても検討している．

ベクトル空間$A_d(n)$には，ヤコビ図の３価頂点の個数による長さ有限のフィルトレーション $A_d(n)=A_{d,0}(n)\supset A_{d,1}(n)\supset\cdots\supset A_{d,2d-1}(n)=0$が入る．これに付随する次数付きベクトル空間は自然に開ヤコビ図の張る次数付きベクトル空間$B_d(n)$と同一視される．ここで，開ヤコビ図とはヤコビ図の1価頂点が，種数nのハンドル体V_nの1次元コホモロジーの元で色づけられているもののことである． Aut（F_n）の$A_d(n)$への作用はフィルトレーションを保つので，次数付きベクトル空間$B_d(n)$には，整数環上のｎ次一般線形群GL(n,Z)による作用と，$Aut(F_n)$のIA自己同型部分群IA(n)の降中心列に付随する次数付きLie代数gr(IA(n))の作用が定義される．
また，$End(F_n)$作用に対応して，gr(IA(n))の$B_d(n)$への作用はある次数付きLie代数$gr(E_*(n))$の作用に拡張される．$Gr(E_*(n))$の元は，ハンドル体V_nの1次ホモロジー群の元で色付けられた根付き3価木の線形結合であり，したがって，$B_d(n)$の元と$gr(E_*(n))$の元の，色に関する縮約を考えることができるが，この縮約写像のgr(IA(n))への制限がもともとの作用と（符号を除いて）一致することが示されている．これにより，gr(IA(n))の$B_d(n)$への作用の計算を開ヤコビ図と木の縮約で計算できるようにしている．

フィルター付きベクトル空間$A_d(n)$の構造は，有限生成自由群と準同型の圏Fの反対圏F^{op}からフィルター付きベクトル空間の圏fVectへの関手A_dに拡張される．

本論文の主結果は以下のとおりである．

- dに対してnが十分大きいとき，ヤコビ図の空間$A_d(n)$に対する上記のフィルトレーションと，自由群の自己同型群上の加群としての根基フィルトレーションは一致する．
- d≧2で，dに対してnが十分大きいとき，ヤコビ図の空間は自由群の自己同型群上の加群としてちょうど2つの直既約成分$A_dP(n)$,$A_dQ(n)$を持つ．この2つの直既約成分のうち$A_dP(n)$は既約加群であり，$A_dQ(n)$は既約ではなく一般に多くの組成因子を持つ．また，この直既約分解は，関手A_dの関手A_dP,A_dQへの直既約分解に拡張する．

（続紙 ２ ）

（論文審査の結果の要旨）

Kontsevich不変量は，Jones多項式など種々の量子不変量を統一する絡み目の強力な不変量であり，普遍有限型不変量でもあり，ヤコビ図の空間に値を持つ．ヤコビ図とは，ある種の(1,3)価グラフであって，Lie代数の代数的構造を表す普遍代数の側面を持ち，物理学における量子場の理論に現れるFeynmanダイアグラムとも関係している．ヤコビ図の空間の構造を理解することは，有限型不変量の観点から結び目全体の空間の構造を理解することと同値であると考えることができ，結び目理論における重要な研究課題の一つであるといえる．

本論文は，ヤコビ図のなすベクトル空間への有限生成自由群の自己同型群による作用の構造に関するものである．申請者は本論文の前の論文 Actions of automorphism groups of free groups on spaces of Jacobi diagrams. I, Ann. Inst. Fourier, published online, 2022 において，n本の向き付けられた弧からなる1次元多様体の上の次数dのヤコビ図の空間$A_d(n)$に対して，n個の元で生成される自由群の自己同型群$Aut(F_n)$の作用を導入し，特に次数d=2の場合において$A_2(n)$の構造を決定している．本論文では，前論文に引き続き$A_d(n)$の$Aut(F_n)$加群構造を一般の次数においてより詳細に考察し，$A_d(n)$の非常に複雑な加群構造のうち重要な基礎となるべき性質について明らかにしている．

自由群の自己同型群$Aut(F_n)$には自然な商群としてGL(n,Z)があり，また対応する部分群としてIA自己同型群IA(n)がある．申請者が考察した$A_d(n)$のフィルトレーションから定まる次数付きベクトル空間$gr(A_d(n))=B_d(n)$には，GL(n,Z)の作用とIA(n)の次数化Lie代数gr(IA(n))の作用が定まり，これらの作用の組み合わせを見ることによって，$A_d(n)$の$Aut(F_n)$加群構造を調べるということが本論文の鍵となる研究方針である．

本論文の主結果は，nが十分大きい場合に，$A_d(n)$がちょうど2つの直既約成分を持つというものである．一般に加群の直既約性を証明するということは困難であることが多いが，本論文では$gr(A_d(n))=B_d(n)$のGL(n,Z)既約分解へのgr(IA(n))の作用を注意深く見ることにより，主結果を証明している．

これらの結果は,結び目理論において重要であるだけでなく,$Aut(F_n)$表現の新しい例を与えている．$Aut(F_n)$表現$A_d(n)$は，組成因子のそれぞれが既約有理GL(n,Z)表現であるような組成列を持っている．このようなタイプの$Aut(F_n)$表現は最近研究が進んでいる重要な表現のクラスであるが，本論文は結び目理論と関連した新しい具体例を与えている．また，申請者の考察した関手A_dは多項式関手の新しい例も与えている．このように，本論文の結果は表現論や圏論の観点からも興味深いものである．

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、令和5年1月26日、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。

要旨公表可能日：　　　　　年　　　月　　　日以降