（ 続紙 １ ）

京都大学	博 士（ 理 学 ）	氏名	天 野　 雄 樹
論文題目	Locally Defined Independence Systems on Graphs （グラフ上で局所的に定義される独立性システム）		

（論文内容の要旨）

離散最適化分野においてもっとも基礎的な問題は、独立性システムが与えられたとき、要素数が最大（以下、単に、最大とよぶ）である独立集合を求めるという問題である。ここで独立性システムとは、有限の台集合Eとその部分集合族Ｉの組（E,I）であり、Iは空集合を含み、かつ、KがIに含まれるならば、Kの任意の部分集合もIに含まれるという条件をみたすものである。この独立性システムにおいて最大独立集合を求める問題は、最大マッチング問題、最大安定集合問題、最大充足可能性問題（ＳＡＴ）など、計算理論やアルゴリズム理論において基礎的な問題を記述することができる。一般の独立性システムが（独立）オラクルとして与えられた場合、情報論的な限界から最大独立集合を求めるために本質的にすべての部分集合を調べなくてはならず、要素数の指数時間、すなわち、効率的に（多項式時間）で求めることはできない。ここで、独立オラクルは、与えられたEの部分集合が独立か、あるいは、独立でないかを回答するものである。一方、たとえば、グラフの安定集合を独立性システムの独立集合とみなす場合、グラフが与えられたとしても、計算量的観点からＮＰ困難となり、効率的に発見することは難しい。しかし、たとえば、独立性システムがマトロイドの場合、貪欲法により多項式時間で効率的に求められることが知られている。

本論文では、独立性システムがグラフの辺集合の上で定義され、各頂点に接続する辺集合に関して局所的に定義された独立性システムの共通部分として独立性システムが定義される場合について、その局所的な計算可能性と大域的な計算可能性との関係性について議論している。より正確には、各頂点に接続する辺集合Ｅ(v)上に定義される局所的な独立性システムに対する局所α近似オラクルモデル、すなわち、Ｅ(v)の部分集合Fが与えられたとき、Ｆの部分集合でその要素数が最大の独立集合の１/α倍以上であるFに含まれる独立集合が求められるとき、大域的にどの程度近似できるか考察した。具体的な成果としては、

１．　固定された点順序に基づき順次局所近似オラクルを使うアルゴリズムの上界と下界を与えた。なお、これらの上下界はほぼタイトである。
２．　点順序を貪欲的に選択し、局所オラクルを使うアルゴリズム上界と下界を与えた。なお、これらの上下界はほぼタイトである。
３．　与えられるグラフの構造がｋ縮退である場合に、その構造を巧みに用いるアルゴリズムを２つ提案した。なお、ｋ＝１、すなわち、与えられるグラフが森である場合は、提案する２つのアルゴリズムの近似比がαとなり、局所近似オラクルの近似比と同じであり、最適なアルゴリズムであることがわかる。
４．　３のアルゴリズムのうちの１つをハイパーグラフに対して適用できるように拡張し、近似比解析を行った。
５．　二部グラフで、片側の頂点に付随する独立性システムがｋシステムである場合、局所近似オラクルに加えて、局所独立オラクルを用いることで、近似アルゴリズムを構成した。

１は、より正確には、上界として、α＋n-２を、また、下界としては、β＋n-2であることを示した。ここで、βはαを超えない最大の整数である。２は、αとnの関係に基づき３つの場合に分類し、そのすべての場合に対して、ほぼタイトな解析を行っている。また、３に関して、より正確には、グラフがｋ縮退であることを示す頂点の順序に基づき、巧みに局所的な独立集合を組み合わせることにより、以下の近似比をもつ２つのアルゴリズムを構成した。

(i)　　$\alpha+2k-2$

(ii)　　αk

（i）は、ｋ縮退グラフを直接的に用いるアルゴリズムであり、(ii)は、ｋ縮退グラフをまず１縮退（森）に分解し、その後に組み合わせるアルゴリズムである。ここで、ｋ＝１である場合、すなわち、グラフが森（１縮退）である場合は、(i)と（ii）ともに、近似比がαとなり、局所的な近似比であるαと同じになり、近似比の意味で最適なアルゴリズムになっている。また、４においては、ハイパーグラフにおける辺の最大のサイズをδとすると、その近似が$\alpha+\alpha(k-1)(\delta-1)$となるアルゴリズムを構成した。ここで、グラフにおいては、辺の最大のサイズδは２となるので、近似比がαkであり、グラフにおける２番目のアルゴリズムの一般化になっていることが分かる。

（続紙　２　）

（論文審査の結果の要旨）

学位論文では、離散最適化問題の局所的な最適性と大域的な最適性の関係性を調べている。局所的な近似可能性から大域的な近似可能性に関して何が言えるかこれまではっきり分かっておらず、計算論、あるいは、アルゴリズム論にとって重要な問いであり、また、分散計算など応用的な側面でも重要な課題である。この局所近似性と大域的近似性の関係を部分的ではあるが解決したことは意義深い。特に、

（１）　単純な固定順序に基づき局所近似オラクルを用いるアルゴリズム

（２）　貪欲的な順序、すなわち、その時点でもっとも大きな独立集合を求めることができる近傍をもつ頂点に順次、局所近似オラクルを適用するアルゴリズム

の２つのアルゴリズムの近似比に対するタイトな上下限を与え、ある意味、自然ではあるが、素朴な解法の限界を示している。また、与えられたグラフがｋ縮退であるときに、その構造を利用した非自明なアルゴリズムを２つ与えている。これらは、グラフのｋ縮退性を示す頂点の順に局所近似オラクルを用いるのであるが、得られた局所解を単純につなげることではよい近似精度を保証できないために、得られた局所的な独立集合の情報を用いて、巧みにそれらをつなげ合わせる方法を提案し、近似精度を保証している。２つのアルゴリズムは、与えられたグラフが森の場合、それらの近似比は、局所近似比のαと同じになり、近似比の意味で最適であり、２つのアルゴリズムの構成、および、それらの正当性の証明は非常に興味深い成果である。また、後者の成果をグラフからハイパーグラフに拡張している。具体的には、ハイパーグラフに現れるハイパー辺の最大のサイズをδとして、それを用いて解析可能なアルゴリズムを構成し、近似精度を証明している点も重要な結果であるいえる。

以上によって、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、令和４年１２月７日、論文内容とそれに関連した事項について諮問を行った結果、合格と認めた。

要旨公表可能日：　　　　　　年　　　月　　　日以降