（ 続紙 １ ）

京都大学	博 士（ 理 学 ）	氏名	清 水 陵 嗣
論文題目	The pro-$\mathcal{C}$ anabelian geometry of number fields （数体の副$\mathcal{C}$遠アーベル幾何について）		

（論文内容の要旨）

本論文は整数論・数論幾何学の論文であり、数体の遠アーベル幾何学を研究対象としている。遠アーベル幾何学は１９８０年代前半にGrothendieckが提唱した数論幾何学の比較的新しい一分野で、代数多様体の幾何（さまざまな幾何的不変量や、究極的には多様体そのもの）をその数論的基本群という非可換位相群から再構築しようとするものである。一方、これにさきがけて１９７０年代によって確立されていたNeukirch-内田の定理は、数体そのものがその絶対ガロア群という非可換位相群から再構築できることを主張するものである。Neukirch-内田の定理は、現代的な視点では、数体（の上の０次元代数多様体）の絶対遠アーベル幾何を確立したものととらえることができ、これまでに得られた全ての遠アーベル幾何学の結果の中でも最も重要で基本的なものの一つである。その後、絶対ガロア群を可解閉商特に最大副可解商（内田）、制限分岐商（Ivanov、清水）、m次可解商（Saidi-玉川）などのさまざまな商に取り替えることでNeukirch-内田の定理の一般化が得られている。また、数体を（有限体上の１変数）関数体に置き換えた場合のNeukirch-内田の定理は、内田の定理として１９７０年代後半に確立されているが、こちらについては、絶対ガロア群を可解閉商特に最大副可解商（内田）、制限分岐商（玉川、望月）などの商に取り替えた一般化が得られているだけでなく、最大副Σ商（Σはある条件を満たす素数の無限集合）に取り替えた一般化も得られる。この最後の一般化については、数体のNeukirch-内田の定理の場合には、これまで一切考えられて来なかった。

本論文は、このような状況の中で、数体の絶対ガロア群をその最大副C商（Cは有限群のフルクラス）に取り替えることで得られるNeukirch-内田の定理の一般化を考察しようというものである。（なお、最大副Σ商は最大副C商の特別な場合である。）より正確な問題の定式化は次の通りである：i=1,2に対して、Kiを数体、Ciを有限群のフルクラス、GiをKiの絶対ガロア群の最大副Ci商、LiをGiに対応するKiのガロア拡大とし、同型射σ:G1→G2が与えられているものとする。このとき、σを誘導するようなL2/K2からL1/K1への同型射が一意的に存在するか？本論文では、いくつかの仮定の下でこの問題が肯定的であることを証明している。特に、本論文の主結果の一つとして、Σ(Ci) のディリクレ密度が0でないならば上記の問題が肯定的であることを証明できたことは著しい。（ここで、Σ(Ci)はZ/pZがCiに属するような素数p全体の集合を表す。）さらに、Σ(Ci) のディリクレ密度が0の場合にも、いくつかの技術的な仮定の下では上記の問題が肯定的であることを証明した。

本論文では、多くの先行研究と同様に、まずGiにおけるさまざまな情報（例えば分解群）を群論的に復元し、その後でそれらの情報を用いて体の同型射を復元する。他方、従来の研究と異なり、円分指標の一部を復元することにより素点の剰余標数などの局所的な情報や体の同型射を復元する際に用いていること、体の同型射を復元する手法として内田の手法に基づくものと申請者の過去の研究に基づくものの二つを考案していること、（副C版）Neukirch-内田の定理のある種の新しい相対版を定式化して証明していることなど、独創的な部分が大きい。

本論文の以上のような結果は、当該分野で全く手付かずだった領域にメスを入れて重要度の高い結果を多数得ることによって画期的な進展を与えたのみでなく、さまざまな独創的な手法や定式化の導入によって、今後の当該分野の方向性をも決定づける、重要なものであると考えられる。

（続紙　２　）

（論文審査の結果の要旨）

本論文は、数体の遠アーベル幾何学を研究対象としている。遠アーベル幾何学は１９８０年代前半にGrothendieckが提唱した数論幾何学の比較的新しい一分野だが、これにさきがけて１９７０年代によって確立されていたNeukirch-内田の定理は、現代的な視点では、数体の絶対遠アーベル幾何を確立したものととらえることができ、これまでに得られた全ての遠アーベル幾何学の結果の中でも最も重要で基本的なものの一つである。その後、絶対ガロア群を可解閉商特に最大副可解商、制限分岐商、m次可解商などのさまざまな商に取り替えることでNeukirch-内田の定理の一般化が得られてきたが、関数体の内田の定理の場合に考えられた最大副Σ商に取り替えた一般化については、数体のNeukirch-内田の定理の場合には、これまで一切考えられて来なかった。

本論文は、このような状況の中で、数体の絶対ガロア群をその最大副C商に取り替えることで得られるNeukirch-内田の定理の一般化を考察しようというものである。特に、本論文の主結果の一つとして、Σ(C) のディリクレ密度が0でないならば上記の問題が肯定的であることを証明できたことは著しい。さらに、Σ(C) のディリクレ密度が0の場合にも、いくつかの技術的な仮定の下では上記の問題が肯定的であることを証明した。従来の研究と異なり、円分指標の一部を復元することにより素点の剰余標数などの局所的な情報や体の同型射を復元する際に用いていること、体の同型射を復元する手法として内田の手法に基づくものと申請者の過去の研究に基づくものの二つを考案していること、（副C版）Neukirch-内田の定理のある種の新しい相対版を定式化して証明していることなど、独創的な部分が大きい。

本論文の以上のような結果は、当該分野で全く手付かずだった領域にメスを入れて重要度の高い結果を多数得ることによって画期的な進展を与えたのみでなく、さまざまな独創的な手法や定式化の導入によって、今後の当該分野の方向性をも決定づける、重要なものであると考えられる。

本論文の構成は緻密であり、複雑な技法を多重的に使用した重厚な内容でありながら細かい瑕疵も全く見当たらない。それぞれの命題の証明の手法は数論的・代数的・解析的など多岐にわたるが、そのうちのいくつかは非常に独創的であり、また全体として明快な内容となっている。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、令和５年１月２０日、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。

なお、本論文は、京都大学学位規程第１４条第２項に該当するものと判断し、公表に際しては、当該論文の全文に代えてその内容を要約したものとすることを認める。

要旨公表可能日：　　　　　年　　　月　　　日以降