（ 続紙 １ ）

京都大学	博 士（ 理 学 ）	氏名	冨田 悠
論文題目	Planar Realizability via Left and Right Applications （左右の関数適用を用いた平面実現可能性）		

（論文内容の要旨）

理論計算機科学において、プログラミング言語や論理体系の持つ性質を調べることは、ソフトウェアの検証や定理証明支援系の設計のために不可欠な、最重要課題である。その中核に位置するのが、プログラミング言語の表示的意味論と呼ばれる、数学的に厳密に定義され抽象化されたプログラミング言語のモデルの理論である。特に、プログラミング言語の複雑な構造を捉えるために、圏論の手法を用いた意味論の構築とその分析が、古くより盛んに研究されてきた。本研究はその圏論的意味論の流れに属する、**実現可能性**（**realizability**）に基づくモデル構成技法について論じたものである。

実現可能性は、もともと、数理論理学の直観主義論理において、論理式に実現子と呼ばれる計算可能な証拠を対応付ける手法として、1950年代にKleeneにより導入された。当初は実現子として、計算可能な関数に対応する自然数が用いられていたが、その後、実現子の概念は、**結合子代数**（**combinatory algebra**）と呼ばれる抽象的な構造に一般化され、論理式への対応付けは、結合子代数AからA上の**アセンブリ**（**assembly**）の圏Asm(A)を構成する技法として捉えられるようになった。Asm(A)は、結合子代数Aの要素によって実現されるような集合と写像のなす圏であり、直観的には、Aにおいて計算可能な数学的対象のなす世界の抽象化と考えられる。

アセンブリの圏Asm(A)の構造は、結合子代数Aの持つ構造に対応して定まる。型のないラムダ計算を抽象化した**PCA**（**partial combinatory algebra**）とよばれる結合子代数から得られるアセンブリの圏は、**カルテジアン閉圏**（**Cartesian closed category**）と呼ばれる構造を持ち、直観主義命題論理や型付きラムダ計算のモデルを与えることが、以前よりよく知られている。また、線型ラムダ計算を抽象化した**BCI代数**（**BCI-algebra**）と呼ばれる結合子代数については、アセンブリの圏は、**対称モノイダル閉圏**（**symmetric monoidal closed category**）の構造を持ち、線形論理や線型型付きラムダ計算のモデルを与えることも知られている。これまで、PCAやBCI代数以外の結合子代数については、アセンブリの圏の構造はこれまでほとんどわかっていなかった。しかし、冨田氏の最近の研究［Tomita, H. (2021) Realizability without symmetry. In Proc. EACSL Annual Conference on Computer Science Logic (CSL 2021), Leibniz International Proceedings in Informatics 183, pages 38:1-38:16］により、**BI(−)$^{\bullet}$代数**（**BI(−)$^{\bullet}$-algebra**）と呼ばれる平面ラムダ計算に対応する結合子代数から、対称モノイダル閉圏より一般的な、非対称な**閉多重圏**（**閉複圏**、**closed multicategory**）が得られることがわかった。ただし、閉多重圏は、対称モノイダル閉圏の対称性を排した構造であるばかりでなく、モノイダル圏の基本的な構成要素であるテンソル積とその単位対象も仮定しない、極めて一般的なものである。上記論文ではAsm(A)が単位対象を持つような結合子代数Aの条件も求めているが、テンソル積も与えるような結合子代数の条件を求めることは未解決の将来課題としていた。

本論文では、これらの研究をさらに発展させ、対称モノイダル閉圏と閉多重圏の中間に位置する、非対称な**モノイダル双閉圏**（**monoidal bi-closed category**）を与え

るような結合子代数として、**双BDI代数**（**bi-BDI-algebra**）を導入した。双BDI代数は、BI(-)$^\bullet$代数とBCI代数の間に位置する結合子代数のクラスであり、左右２種類の関数適用演算を備えている。双BDI代数の左右の関数適用を巧みに組み合わせることにより、BI(-)$^\bullet$代数で得られる非対称性は保持しつつ、BI(-)$^\bullet$代数では不可能であったアセンブリのテンソル積の構成を与えることに成功した。また、Asm(A)がモノイダル閉圏となるために、Aが双BDI代数であることが本質的に必要十分であることを示した。

さらに、論文の後半では、双BDI代数とPCA、および双BDI代数とBCI代数の間の随伴に対応する様相演算子を導入し、それから、アセンブリの非対称なモノイダル双閉圏の上に対称性や非線形性を実現する**様相余モナド**が構成できることを示した。これは、BCI代数に様相演算子を導入し、そのアセンブリの対称モノイダル閉圏の上に非線形性を実現する様相余モナドを構成するAbramskyらの**LCA**（**linear combinatory algebra**）の非対称な一般化を与えるものである。

（続紙　２　）

（論文審査の結果の要旨）

本論文は、プログラミング言語の表示的意味論及び関連する圏論・数理論理学における多くの新しい有用な知見を含む、重要な貢献である。

第一に、冨田氏の最近の研究および本論文の研究により、これまで考察されてこなかった、非対称・非可換な計算モデルを、実現可能性の手法により構成することが可能であることがはじめて示された。さらに、そのような構成を行うために結合子代数が満たすべき条件がシステマティックに特定され、その条件を用いていくつもの具体例が与えられている。これらの成果をもって、実現可能性の領域を大きく広げる、非可換・非対称な実現可能性の理論が、冨田氏によって世界に先駆けて打ち立てられたと言ってよい。

第二に、この研究で導入された、BI(-)$^\bullet$代数や双BDI代数をはじめとする様々な結合子代数のクラスは、平面ラムダ計算や双平面ラムダ計算のモデルとしても自然な研究対象であり、実現可能性以外の文脈でも、様々な応用を持つことが期待できる。実際、最近の長谷川の研究では、外延的なBI(-)$^\bullet$代数と、閉オペラド（closed operad）と呼ばれる構造との間に密接な関係があることが示されており、BI(-)$^\bullet$代数はオペラドの理論とプログラム意味論を結びつけるひとつの鍵となる概念であることが指摘されている。また、非対称・非可換な圏論的モデルは、ブレイド（絡み目）のような弱い対称性を備えたモデルの基礎としても有用であり、冨田氏の成果は、最近のブレイド付きラムダ計算（braided lambda calculus）の理論の基礎としても用いられている。また、冨田氏は、副作用を伴う計算を抽象化したMoggiのコンピュテーショナルラムダ計算（computational lambda calculus）およびそのモデルがBI(-)$^\bullet$代数の構造を持つことを示しており、これは、実際のプログラミング言語により近い計算モデルについても冨田氏のアプローチが有効であることを強く示唆するものである。

このように、冨田氏の成果は、プログラム意味論及び関連分野における基礎的かつ適用範囲の広い貢献であり、今後、さらに多くの応用をもたらすものであると考える。技術的にも、冨田氏の成果は、膨大な計算に裏付けられた緻密な証明に基づくものであり、大変高い水準にある。

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、令和４年１２月１３日、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。

要旨公表可能日：　　　　　年　　　月　　　日以降