（ 続紙 １ ）

京都大学	博 士（ 理 学 ）	氏名	山 口 永 悟
論文題目	The m-step solvable Grothendieck conjecture for affine hyperbolic curves over finitely generated fields (有限生成体上のアフィン双曲的代数曲線に対するm次可解グロタンディーク予想)		

（論文内容の要旨）

本論文は数論幾何学の論文であり、素体上有限生成な体の上の双曲的代数曲線の遠アーベル幾何学を研究対象としている。遠アーベル幾何学は１９８０年代前半にGrothendieckが提唱した数論幾何学の比較的新しい一分野で、代数多様体の幾何（さまざまな幾何的不変量や、究極的には多様体そのもの）をその数論的基本群という非可換位相群から再構築しようとするものである。遠アーベル幾何学の基本予想はGrothendieck予想と呼ばれ、「遠アーベル」多様体については、数論的基本群から多様体そのものが再構築できることを予想するものである。Grothendieck予想は、双曲的代数曲線（＝１次元遠アーベル多様体）に関しては、１９９０年代半ばまでに、基礎体が有理数体上有限生成かつ曲線の種数が０の場合（中村）、基礎体が有理数体上有限生成または有限体かつ曲線がアフィンの場合（玉川）の肯定的解決をへて、最終的には基礎体が劣p進体の場合に一般の双曲的曲線に対して肯定的に解決された（望月）。さらに、Grothendieck予想の拡張として、数論的基本群をその最大幾何的m次可解商に取り替えたもの（m次可解Grothendieck予想）を考えることができる。双曲的曲線に対するm次可解Grothendieck予想については、基礎体が代数体でm≥2かつ４点抜き射影直線の場合（中村）や基礎体が劣p進体でm≥5の場合（望月）は、やはり１９９０年代半ばまでに肯定的に解決されていた。

以来２０年以上にわたり当該分野では目立った進展がなく、特に正標数における結果は一切なかったが、申請者の修士論文における研究では、基礎体が素体上有限生成でm≥3かつ曲線の種数が０の場合に若干の仮定下でm次可解Grothendieck予想の弱型が肯定的に解決され、特に正標数の結果を初めて与えるなど、２０年以上ぶりに当該分野に進展をもたらした。

本論文は、上記の申請者の修士論文の研究の延長線上にあるものである。本論文では、双曲的曲線に対するm次可解Grothendieck予想についての研究を大きく推進し、素体上有限生成な体（特に有限体）の上のアフィン双曲的曲線についてその多くの部分を肯定的に解決したものである。主結果をより正確に述べるため、以下、双曲的曲線（のコンパクト化）の種数をg、カスプ（上の幾何的点）の数をrとする。

定理A.　基礎体を有限体とし、m≥2, r≥3, (g, r)≠(0, 3), (0, 4)またはm≥3を仮定する。このとき、アフィン双曲的曲線に対する絶対版m次可解Grothendieck予想の弱型が成立する。さらに、m≥3の場合は適切な定式化の下で強型も成立する。

定理B.　基礎体を素体上有限生成な体とし、その標数が正の場合はアイソトリビアルでない曲線のみを考える。m≥4, r≥3, (g, r)≠(0, 3), (0, 4)またはm≥5を仮定する。このとき、アフィン双曲的曲線に対する相対版m次可解Grothendieck予想の弱型が成立する。さらに、m≥5の場合は適切な定式化の下で強型も成立する。

また、定理Bを定理Aから導く際、双曲的曲線の数論的基本群に付随する外ガロア表

現を用いた良還元判定法（織田、玉川）のm次可解化（m≥2）およびベースの高次元化も行った。この結果は定理Bの証明に必要なだけではなく、それ自体にも価値のある結果である。

本論文における研究は、申請者の修士論文における研究とあわせて当該分野に２０年以上ぶりに大きな進展を与えたものであるのみでなく、当該分野の今後の更なる発展を加速させる、重要なものであると考えられる。

（続紙　２　）

（論文審査の結果の要旨）

　本論文は、素体上有限生成な体の上の双曲的曲線の遠アーベル幾何学を研究対象としている。遠アーベル幾何学は１９８０年代前半にGrothendieckが提唱した数論幾何学の比較的新しい一分野で、その基本予想はGrothendieck予想と呼ばれる。双曲的曲線に関するGrothendieck予想は、１９９０年代半ばまでに中村、玉川、望月によって肯定的に解決された。さらに、数論的基本群をその最大幾何的m次可解商に取り替えたm次可解Grothendieck予想についても、m≥2で代数体上の４点抜き射影直線の場合（中村）やm≥5の劣p進体上の双曲的曲線の場合（望月）は、やはり１９９０年代半ばまでに肯定的に解決されていた。以来２０年以上にわたり当該分野では目立った進展がなく、特に正標数における結果は一切なかったが、申請者の修士論文における研究では、m≥3で素体上有限生成な体の上の種数０の曲線の場合に正標数の場合を含む結果を与え、２０年以上ぶりに当該分野に進展をもたらした。

　本論文は、上記の申請者の修士論文の研究の延長線上にあるものであり、双曲的曲線に対するm次可解Grothendieck予想についての研究を大きく推進し、アフィン双曲的曲線の場合にその多くの部分を肯定的に解決したものである。より正確には、基礎体が有限体の場合にはm≥3（一部m≥2）に対して絶対版m次可解Grothendieck予想を、基礎体が素体上有限生成な体の場合にはm≥5（一部m≥4）に対して相対版m次可解Grothendieck予想を証明した。また、双曲的曲線の良還元判定法のm次可解化（m≥2）およびベースの高次元化にも成功した。

　申請者の修士論文から本論文につらなる一連の研究は、当該分野に２０年以上ぶりに大きな進展を与えたものであるのみでなく、当該分野の今後の更なる発展を加速させる、重要なものであると考えられる。

　本論文の構成は緻密であり、全体として十分に準備された明快な内容となっている。また、それぞれの命題の定式化や証明は、遠アーベル幾何学のm次可解化やmの最良化に伴うさまざまな技術的困難を含み、そのうちのいくつかは本論文独自の独創的手法によって解決されている。

　よって、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、令和５年１月２０日、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。

　なお、本論文は、京都大学学位規程第１４条第２項に該当するものと判断し、公表に際しては、当該論文の全文に代えてその内容を要約したものとすることを認める。

要旨公表可能日：　　　　　　年　　　月　　　日以降