

指定水平投影応力分布を有する自由曲面シェルの形状設計

FORM FINDING OF FREE-FORM SHELLS WITH SPECIFIED
HORIZONTAL PROJECTED STRESS DISTRIBUTION中嶋 拓^{*1}, 大崎 純^{*2}

Taku NAKAJIMA and Makoto OHSAKI

A form-finding method is proposed for free-form shells specifying the distribution of stresses projected to the horizontal plane. The surface shape is obtained as a solution to a linear system of the vertical equilibrium equations discretized by the finite difference method with respect to the heights at the grid points. Distribution of the shear stress is specified to generate various shapes with a region of negative Gaussian curvature and free boundary. Effect of elastic deformation is verified by finite element analysis, and the shape is iteratively corrected to achieve the specified projected stress distribution considering the material property.

Keywords : Free-form shells, form finding, Horizontal projected stress, Finite difference method, Finite element analysis, Uniformed stress distribution

自由曲面シェル, 形状設計, 水平投影応力, 有限差分法, 有限要素解析, 一様応力分布

1. はじめに

建築の大空間を覆うシェル構造は, スパンに対し薄い断面を用いて設計された曲面構造であり, 主にシェル曲面内の圧縮力により外力に抵抗する構造である¹⁾。シェル構造の中でも円筒や球形のような古典的な形状ではない複雑な形状を有するものを自由曲面シェル構造²⁾といい, その形状はNURBS (Non-Uniform Rational B-Spline) 曲面³⁾などのパラメトリック曲面を用いて設計されることが多い。

シェル構造の曲面形状と力学的性能には強い相関がある。力学的合理性に優れたシェルの設計手法として, 形状を設計変数として自重作用時の剛性の指標であるひずみエネルギーを最小化する手法が多く提案されている^{4,5)}。藤田・大崎⁶⁾は曲面の代数的不変量に関する制約条件の下でシェルのひずみエネルギーを最小化することで, 局所的及び大域的特性を指定した形状生成手法を提案した。永田・本間⁷⁾は自由曲面シェルのひずみエネルギー最小化と重量最小化の多目的最適化問題について, 群知能による優良解探索手法を提案した。土井・山本⁸⁾は波型シェルの波目方向の形状を設計パラメータとし, ひずみエネルギー最小化問題を解くことによる形状設計法を提案した。また, 剛性と同等にシェルに生じる応力が想定する材料に応じた許容範囲内であることも重要である。下田ら⁹⁾は, シェルに生じる最大応力を最小化することで, 自由曲面シェルに生じる応力を一様分布とする手法を提案した。大山・諸岡¹⁰⁾は球形シェルを対象に, シェル厚さを変数として, シェルに生じる応力を一様化する手法を提案した。打樋・山本¹¹⁾は, シェルの面外曲げ応力による歪エネルギーを用いて, 膜応力(面内力)が卓越する形状を探索する方法を提案した。

一方, 図式力学 (graphic statics) に基づく空間構造の形状設計法

について, 近年多くの研究がなされている¹²⁻¹⁴⁾。連続体シェル構造についても, Thrust Network Analysis (TNA) により, 図式解法を用いて, 外力に対して膜応力(面内力)のみで抵抗する形状と膜応力との関係を離散的な双対関係として表現する手法が提案されている^{15,16)}。Panozzoら¹⁷⁾は, 設計者の指定した初期形状をもとに, 最適化手法とTNAを用いて膜応力で外力に抵抗する形状を生成する手法を提案した。しかし, TNAを連続体シェルに適用する際に, 応力と形状をパラメトリックな形式で定義する必要がある。

曲面の高さを水平座標の関数として表すグラフ曲面としてシェルを定義したとき, シェルに生じる膜応力の釣合いはその水平投影成分を用いてPucher's formulation¹⁸⁾により記述される。この定式化を利用し, Mikiら¹⁹⁾は, 水平投影応力にAiryの応力関数を利用し, 自重作用時のシェル曲面形状をNURBS曲面により設計する手法を提案した。応力関数とシェル形状をともにNURBS曲面で定義することで, 応力関数の制御点座標を変数として非常に複雑な自由曲面シェル構造を生成できる手法が提案されている。また, Xiaら²⁰⁾は, NURBS曲面とisogeometric解析を用いて, 膜応力のみで自重に抵抗するシェルの設計手法を提案した。これらの応力関数を用いる手法は, シェル面内力を応力関数のみで制御することができ, 設計者は応力関数を変数としてそれと双対関係にあるシェル形状を設計することができる優れた手法である。しかし, これらの手法ではNURBS基底関数の高階の導関数が必要であり, 微分方程式を解析的に解くことが困難である。また, シェル曲面と応力関数をパラメトリック曲面でモデル化することは, シェル曲面の取りうる形状を限定することになる。

これに対し, パラメトリック曲面を用いないノンパラメトリックな

*1 京都大学大学院工学研究科建築学専攻 大学院生・修士(工学)

*2 京都大学大学院工学研究科建築学専攻 教授・博士(工学)

Graduate Student, Dept. of Architecture and Architectural Eng., Kyoto Univ., M. Eng.

Prof., Dept. of Architecture and Architectural Eng., Kyoto Univ., Dr. Eng.

設計手法が提案されている。堺・大崎²¹⁾は、自重に対して指定した水平方向反力(スラスト)で釣合うシェル設計法を提案した。この手法は、シェルの境界部を介して支持構造に作用する水平方向反力を指定することができ、シェルの下部構造への影響を制御できる。また、Takeokaら²²⁾は文献21)の手法の対象を曲線の境界形状をもつシェルに拡張して指定水平投影応力で釣合う形状を生成し、有限要素解析によって変形を考慮した時の水平投影応力分布を検証している。しかし、シェルの面外曲げ変形やポアソン比による横ひずみ等の弾性変形により、水平投影応力はとくに境界付近で指定値と一致しない。そのため、指定水平投影応力分布を得るために境界に強制変位を与える必要がある。塩見・山本²³⁾は、シェルのスラストに相当する外力と板厚を設計変数とし、有限要素解析を用いて釣合い条件を満たすシェルの水平投影応力分布を導出することで、面内応力の鉛直方向成分が自重と釣合うシェル形状を求める手法を提案した。有限要素解析を利用して釣合い条件を満たす応力分布を容易に得られるが、シェル内部の応力分布を詳細に制御することは難しい。

本論文では、文献22)の手法を拡張し、グラフ曲面として定義した連続体シェル曲面の水平投影応力を指定し、膜応力の鉛直方向の釣合い式を差分法で離散化して連立1次方程式を繰り返し解く方法により、ノンパラメトリックな自由曲面シェルの形状を設計する方法を提案する。膜応力の水平投影成分は、水平方向の釣合い方程式を満足するように設定する。提案手法による結果と収束性および計算時間を既往の論文²²⁾における逐次加速緩和法(SOR法)による結果と比較する。また、応力関数を用いる方法では、応力の各成分が1つの応力関数で表現されるため、得られるシェル形状の予測や、応力分布と境界での反力分布の細かな制御は、手法に対する経験がないと難しい。そこで本研究では、まずせん断応力を指定し、垂直応力は水平方向の釣合い方程式に基づき、せん断応力の関数と任意の関数の和として定義する方法を検証する。この手順により、水平投影応力の各成分と反力分布を、応力関数を用いるより直接的に制御し、それをシェル形状に反映することが可能となる。提案手法により、せん断応力を平面座標の関数として定義したモデルと、境界の一部を鉛直方向反力が生じない自由境界としたモデルを用いて、より複雑なシェル形状が生成可能であることを示す。さらに、提案手法で生成したシェル形状を対象として、面外曲げ変形を考慮した有限要素解析を行い、得られた水平投影応力と、形状設計の際に指定した水平投影応力の誤差について検証し、指定応力との誤差を反復計算により補正することで、変形を考慮した場合にもシェル境界部分の水平投影応力(水平方向反力)を指定できる手法を提案する。

2. シェルの釣合い方程式を用いた形状設計法

2.1 釣合い方程式

直交座標系であるxyz座標系において、x,y方向を水平方向、z方向を鉛直方向とする。曲面の高さhがx,yの関数h(x,y)で表されるシェルを考える。ここでは、シェルの膜理論を用い、面外方向の変形に関する曲げモーメントとせん断力は考慮しない。

シェルをxz平面とyz平面にそれぞれ平行な平面で切断した微小要素を考える。微小要素に作用する応力を図1に示す。Pucher's formulation¹⁸⁾に基づき、シェルの面内応力と外力の釣合いを、それらの水平面への投影成分を用いて示す。このような表現は Monge's

descriptionとも呼ばれる²⁴⁾。以下では、シェル断面の単位長さあたりの断面力を簡単のため応力とよぶ。

yz平面とxz平面にそれぞれ平行な曲面の切断面での垂直応力を s_x, s_y とし、yz平面とxz平面にそれぞれ平行なせん断応力を t_{xy}, t_{yx} とする。ここで、 s_x と s_y はシェルの接平面内の力である。 $s_x, s_y, t_{xy}(=t_{yx})$ のベクトルをxy平面に投影し、水平面単位長さあたりの応力に換算した断面力を、それぞれ $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}(=\tau_{yx})$ とし、水平投影応力とよぶ。シェル曲面をxz平面とyz平面にそれぞれ平行な面で切断したときに得られる曲線と、水平面(xy平面)とのなす角を ϕ_x, ϕ_y とする。 $s_x, s_y, t_{xy}(=t_{yx})$ と $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}(=\tau_{yx})$ は、次式のような関係を満たす²⁵⁾。

$$\sigma_x = s_x \frac{\cos \phi_x}{\cos \phi_y}, \quad \sigma_y = s_y \frac{\cos \phi_y}{\cos \phi_x}, \quad \tau_{xy} = t_{xy} \quad (1)$$

hと ϕ_x, ϕ_y の関係は次のように書ける。

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \tan \phi_x, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \tan \phi_y \quad (2)$$

シェルの水平方向の釣合い方程式は次のように書ける。

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

式(3)をそれぞれx,yで積分すると、 σ_x, σ_y は τ_{xy} を用いて次のように表される。

$$\sigma_x = -\int \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) dx + C_x(y), \quad \sigma_y = -\int \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) dy + C_y(x) \quad (4)$$

ここで、 $C_x(y), C_y(x)$ はそれぞれy,xの任意の関数である。せん断応力を任意の関数として与える場合は、垂直応力 σ_x, σ_y は水平方向の釣合い方程式(3)から導かれる式(4)により、せん断応力の関数と任意の関数 $C_x(y), C_y(x)$ の和として定義される。水平方向の釣合い方程式を満足するため、関数 $C_x(y), C_y(x)$ は、それぞれx,y方向に一定である必要があるが、他の水平投影応力とは相関なく、独立に定義することができる。垂直応力 σ_x, σ_y はシェルの曲率の大きさと、せん断応力 τ_{xy} はシェルの主曲率方向とそれぞれ相関があるため、これらの応力を調整することによりシェルの形状を制御することが可能となる。また、4.3節で示すように、自由境界の条件も容易に満たすことができる。また、鉛直方向の釣合い方程式は2階の偏微分方程式として次のように書ける。

$$\sigma_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + 2\tau_{xy} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + \sigma_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = f \quad (5)$$

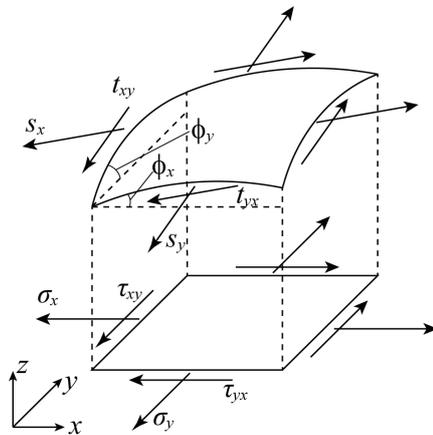


Fig.1 Definition of stresses and angles

ここで、 f はシェル単位の水平投影面あたりの自重であり、材料密度 ρ 、重力加速度 g 、板厚 t を用いて次式で表される。

$$f = -\rho g t \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2} \quad (6)$$

曲線形状の水平投影境界形状をもつシェルを対象とするため、グラフ曲面の x, y 座標をパラメータ $(u, v) \in [0, 1]^2$ の関数として $x(u, v)$, $y(u, v)$ と表す。 u, v の x, y に関する偏導関数を a, b, c, d とすると、式(5)は、 a, b, c, d と u, v を用いて次のように書ける。

$$\begin{aligned} & \left(a^2\sigma_x + 2ac\tau_{xy} + c^2\sigma_y\right) \frac{\partial^2 h}{\partial u^2} \\ & + 2\left[ab\sigma_x + (ad+bc)\tau_{xy} + cd\sigma_y\right] \frac{\partial^2 h}{\partial u\partial v} \\ & + \left(b^2\sigma_x + 2bd\tau_{xy} + d^2\sigma_y\right) \frac{\partial^2 h}{\partial v^2} \\ & + \left[\left(a\frac{\partial a}{\partial u} + b\frac{\partial a}{\partial v}\right)\sigma_x + 2\left(a\frac{\partial c}{\partial u} + b\frac{\partial c}{\partial v}\right)\tau_{xy} + \left(c\frac{\partial c}{\partial u} + d\frac{\partial c}{\partial v}\right)\sigma_y\right] \frac{\partial h}{\partial u} \\ & + \left[\left(a\frac{\partial b}{\partial u} + b\frac{\partial b}{\partial v}\right)\sigma_x + 2\left(a\frac{\partial d}{\partial u} + b\frac{\partial d}{\partial v}\right)\tau_{xy} + \left(c\frac{\partial d}{\partial u} + d\frac{\partial d}{\partial v}\right)\sigma_y\right] \frac{\partial h}{\partial v} = f \end{aligned} \quad (7)$$

式(7)の導出、および後述する差分法による釣合い方程式の離散化の詳細は付録に示す。

2.2 差分法による釣合い方程式の離散化

グラフ曲面として定義した連続体シェル曲面における膜応力の鉛直方向の釣合い式(7)を差分法で離散化する。パラメータ u, v の平面を u, v 方向にそれぞれ $N \times N$ 分割した格子点 (i, j) ($i, j=1, \dots, N+1$) を考える。格子点の u, v 方向の間隔をそれぞれ $\delta u, \delta v$ 、格子点 (i, j) の z 座標を $h_{i,j}$ とすると式(7)は中央差分を用いて次のように書ける²²⁾。

$$\begin{aligned} & \left(a^2\sigma_x + 2ac\tau_{xy} + c^2\sigma_y\right) \frac{h_{i+1,j} - 2h_{i,j} + h_{i-1,j}}{(\delta u)^2} \\ & + 2\left[ab\sigma_x + (ad+bc)\tau_{xy} + cd\sigma_y\right] \frac{h_{i+1,j+1} - h_{i+1,j-1} - h_{i-1,j+1} + h_{i-1,j-1}}{4\delta u\delta v} \\ & + \left(b^2\sigma_x + 2bd\tau_{xy} + d^2\sigma_y\right) \frac{h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1}}{(\delta v)^2} \\ & + \left[\left(a\frac{\partial a}{\partial u} + b\frac{\partial a}{\partial v}\right)\sigma_x + 2\left(a\frac{\partial c}{\partial u} + b\frac{\partial c}{\partial v}\right)\tau_{xy} + \left(c\frac{\partial c}{\partial u} + d\frac{\partial c}{\partial v}\right)\sigma_y\right] \frac{h_{i+1,j} - h_{i-1,j}}{2\delta u} \\ & + \left[\left(a\frac{\partial b}{\partial u} + b\frac{\partial b}{\partial v}\right)\sigma_x + 2\left(a\frac{\partial d}{\partial u} + b\frac{\partial d}{\partial v}\right)\tau_{xy} + \left(c\frac{\partial d}{\partial u} + d\frac{\partial d}{\partial v}\right)\sigma_y\right] \frac{h_{i,j+1} - h_{i,j-1}}{2\delta v} \\ & = f_{i,j} \end{aligned} \quad (8)$$

式(8)の右辺は次のように書ける。

$$f_{i,j} = -\rho g t \sqrt{1 + (a^2 + c^2) \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2 + 2(ab + cd) \frac{\partial h}{\partial u} \frac{\partial h}{\partial v} + (b^2 + d^2) \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2} \quad (9)$$

文献²²⁾では、式(8)をSOR法を用いて解いてシェルの形状を導出している。一方、式(8)は右辺 $f_{i,j}$ を定数とすると、格子点 (i, j) ($i, j=1, \dots, N+1$) の z 座標 $h_{i,j}$ についての連立1次方程式とみなすことができる。したがって、本論文では、各格子点における式(8)を導出し、右辺 $f_{i,j}$ を現在の形状で固定してこれを連立1次方程式として解くことで、シェルの形状を求める。その手順を以下にまとめる。

1. 水平投影応力と境界形状を指定し、釣合い方程式(8)の右辺を $-\rho g t$ とし、連立1次方程式を解き、格子点の z 座標 $h_{i,j}$ を得る。

2. 前ステップで得られたシェル形状に基づき式(9)より $f_{i,j}$ を求める。
3. 得られた $f_{i,j}$ を定数として式(8)の右辺に代入し、 $h_{i,j}$ についての連立1次方程式とみなして解き、シェル形状を更新する。
4. 各格子点での $h_{i,j}$ の変化の総和 e を次式により求める。ここで上添え字(1)は反復計算のステップ数を示す。
$$e = \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} |h_{i,j}^{(1)} - h_{i,j}^{(0)}| \quad (10)$$
5. e が指定された正の微小値 ξ 以上のとき Step2 に戻る。
6. 解形状を出力して反復計算を終了する。

3. 有限要素解析を用いたシェルの応力分布の確認と形状補正手法

2節に示した形状設計法で生成したシェル形状に材料特性を定め有限要素解析を行い、シェルの弾性変形が応力分布に及ぼす影響について確認する。ここでは、 $\tau_{xy}=0$ の一様応力分布を指定したモデルのみを対象とする。また、有限要素解析から得られた水平投影応力分布に基づき形状設計過程での指定水平投影応力 α_x, α_y を補正する。したがって、指定値と理想的な目標値は異なり、後者を以下では目標値とよぶ。例えば、境界部での応力を一様な値とすることで、領域内の応力を一様化することが可能となる。図2(a), (b)に、水平投影応力 α_x, α_y をそれぞれ目標値に近づける形状補正手法において本論文で採用した、応力の誤差評価範囲の模式図を示す。図2(a), (b)に示した境界 a での水平投影応力をそれぞれ目標値 σ_x^*, σ_y^* に近づけるように形状設計での指定値 α_x, α_y を補正しながら、形状設計と有限要素解析を繰り返す。水平投影応力 α_x, α_y の作用する方向に平行な境界付近(図2にBで示した範囲)では、境界と平行な方向の水平投影応力を指定値に一致させることが困難である。したがって、直線または曲線で定められる図2中の境界 a に接続する要素を誤差評価範囲とする。図2にbで示す範囲については、範囲 a の端点における水平投影応力の指定値を用いて形状設計を行う。 $\tau_{xy}=0$ のとき α_x, α_y は式(3)よりそれぞれ $\partial\sigma_x/\partial x=0, \partial\sigma_y/\partial y=0$ を満たす必要がある。よって α_x は x 方向に一定、 α_y は y 方向に一定として更新する。

形状設計法で生成したシェルに対して、長さのスケールを α 倍、単位面積あたりの自重 $\rho g t$ を β 倍したとき、弾性変形の影響を考慮しなければ、水平投影応力はシェルの全範囲で $\alpha\beta$ 倍となる。したがって、水平投影応力の目標値は、形状設計法で指定した値の $\alpha\beta$ 倍とする。

形状補正手法の計算手順を以下にまとめる。

1. 水平投影応力の指定値 $\alpha_x, \alpha_y, \tau_{xy}$ に基づき、鉛直方向の釣合い式を解いてシェル形状を得る。
2. 得られたシェル形状に基づき、有限要素解析を実行する。

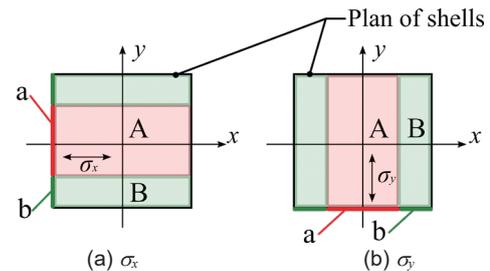


Fig.2 Stress evaluation parts for shape correction method

- 有限要素解析結果から、あらかじめ領域内に指定した応力の誤差評価範囲 a における水平投影応力 $\bar{\sigma}_x^{(l)}$, $\bar{\sigma}_y^{(l)}$ を算出する。ここで、添え字 l は反復計算のステップ数を示す。
- 得られた水平投影応力 $\bar{\sigma}_x^{(l)}$, $\bar{\sigma}_y^{(l)}$ と、目標値 σ_x^* , σ_y^* との誤差に関して次式で定められる指標 $\eta_x^{(l)}$, $\eta_y^{(l)}$ を算出する。

$$\eta_x^{(l)} = \frac{1}{n_x} \sum_{n_x} \left| \frac{\bar{\sigma}_x^{(l)}}{\sigma_x^*} - 1 \right|, \quad \eta_y^{(l)} = \frac{1}{n_y} \sum_{n_y} \left| \frac{\bar{\sigma}_y^{(l)}}{\sigma_y^*} - 1 \right| \quad (11)$$

ここで、 n_x , n_y は誤差評価範囲 a の格子点の数である。与えられた正の微小値 $\bar{\eta}$ に対して $\eta_x^{(l)}$, $\eta_y^{(l)}$ が下記の収束条件を満たせば反復計算を終了する。

$$\eta_x^{(l)} < \bar{\eta}, \quad \eta_y^{(l)} < \bar{\eta} \quad (12)$$

- 収束条件を満足しないとき、ステップ l での誤差評価範囲 a における誤差に応じて次式によりステップ $l+1$ での水平投影応力の指定値を更新する。

$$\sigma_x^{(l+1)} = \sigma_x^{(l)} - (\bar{\sigma}_x^{(l)} - \sigma_x^*), \quad \sigma_y^{(l+1)} = \sigma_y^{(l)} - (\bar{\sigma}_y^{(l)} - \sigma_y^*) \quad (13)$$

- 更新した水平投影応力の指定値 $\sigma_x^{(l+1)}$, $\sigma_y^{(l+1)}$ に基づき、2節で示した形状設計法によりシェル形状を更新し、ステップ 2 にもどる。

4. 数値解析例

形状設計法において、シェルの形状は自重と応力の比率により決定されるため、 $\rho g t = 1$ として無次元化し、長さや荷重の単位は省略する。グラフ曲面の x, y 座標は、パラメータ $(u, v) \in [0, 1]^2$ を用いた 3 次の Bernstein 多項式により表現する。パラメータ u, v 平面の格子の分割数は $N = 50$ とし、収束判定のためのパラメータは $\xi = 1 \times 10^{-9}$, $\bar{\eta} = 1 \times 10^{-3}$ とする。

形状設計のプログラムは Python を用いて作成し、鉛直方向の釣合い方程式を離散化した連立 1 次方程式は、数値計算ライブラリである Numpy を用いて解く。有限要素解析には、骨組解析ライブラリ OpenSees の Python モジュールである OpenSeesPy²⁶⁾ を使用する。シェルのモデル化には、面内剛性に加えて面外曲げ・せん断剛性を有する、四辺形アイソパラメトリックシェル要素 ShellMITC4 を用いる。

以下では 5 種類のモデルに対する結果を示す。まず、モデル 1, 2 により、本研究で提案する連立 1 次方程式を解く方法と文献 22) の SOR 法による手法を比較する。次に、せん断応力を平面座標の関数として定義したモデル 3、境界の一部を鉛直反力が生じない自由境界としたモデル 4 により、提案手法がより複雑なシェル形状を生成可能であることを示す。さらに、モデル 1, 2 を対象に有限要素解析を行い、シェルの弾性変形が応力分布に及ぼす影響について確認するとともに、3節で提案した応力一様化手法について検証する。

4.1 モデル 1, モデル 2

曲面の x, y 座標はパラメータ $(u, v) \in [0, 1]^2$ を用いて、次のように定義する。

$$\text{モデル 1: } x = 0.2u^3 - 0.3u^2 + 2.1u - 1, \quad y = 0.2v^3 - 0.3v^2 + 2.1v - 1$$

$$\text{モデル 2: } x = (2u - 1)(-v^2 + v + 1), \quad y = (-u^2 + u + 1)(2v - 1)$$

モデル 1 は境界が x, y 軸に平行な矩形平面形状であり、モデル 2 の境界は曲線である。また、水平投影応力の指定値は $\sigma_x = \sigma_y = -1$, $\tau_{xy} = 0$ とする。境界が x, y 軸に平行な矩形平面形状は $x = 2u - 1$, $y = 2v - 1$ としてモデル化することも可能であるが、ここでは文献 22) の解析との比較を行うため、文献 22) の曲面の x, y 座標の定義を採用する。

形状設計法により得られたモデル 1, 2 の釣合い形状を、図 3, 4 にそれぞれ示す。平行投影図の z 座標のみ、 x, y 座標の 2.0 倍にスケールリングして示す。どちらのモデルも、本研究で提案する連立 1 次方程式を解く方法によって、文献 22) での SOR 法による手法と同様の曲面形状が得られた。

h_{ij} の変化の総和 e が 1×10^{-9} 以下となるまでの反復計算の回数は、モデル 1, 2 でそれぞれ 10 回, 11 回であった。モデル 2 での e の履歴を図 5 に示す。縦軸は対数であり、本論文での提案手法が既往の手法より少ない反復回数で収束していることがわかる。設計に要した計算時間は、Core i7-11800H CPU (2.30GHz, 16GB memory) の PC を用いて 4.6 秒であった。文献 22) の SOR 法を採用したときの計算時間は 44 秒であり、提案手法は計算時間を 10% 程度に低減することができた。

4.2 モデル 3

曲面の x, y 座標は、パラメータ $(u, v) \in [0, 1]^2$ を用いて、矩形境界となるよう次式で定義する。

$$\text{モデル 3: } x = 2u - 1, \quad y = 2v - 1$$

モデル 3 では、 τ_{xy} を x, y の関数として、次のように定義する。

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2} \{ (x+1)(y-1) + 1 \} \quad (14)$$

τ_{xy} の y, x に関する偏導関数は $\partial \tau_{xy} / \partial y = (x+1)$, $\partial \tau_{xy} / \partial x = (y-1)$ となる。 σ_x, σ_y は、水平方向の釣合い式(3)を満たすように、式(4)において $C_x(y) = C_y(x) = -3/4$ とし、それぞれ -1.5 から -0.5 の間を変化するように次のように定義する。

$$\sigma_x = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} (x+1)^2 + 1 \right\}, \quad \sigma_y = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} (y-1)^2 + 1 \right\} \quad (15)$$

指定水平投影応力分布と釣合い形状を図 6, 7 に示す。非対称な水平投影応力を指定することで、水平投影応力の絶対値が小さい $x < 0$, $y > 0$ の部分において勾配の大きい非対称なシェル曲面形状が得られる。また $x > 0$, $y < 0$ の部分においてガウス曲率が負となる曲面形状が得られた。以上より、水平投影せん断応力分布を指定することにより、さまざまな曲面形状が得られることが示された。

4.3 モデル 4

モデル 4 は、 y 軸に平行な 2 辺を有する台形平面とし、1 辺を自由境界 (高さ h を変数) とする。曲面の x, y 座標はパラメータ $(u, v) \in [0, 1]^2$ を用いて次のように定義する。

$$\text{モデル 4: } x = 2u - 1, \quad y = (0.6u + 0.7)(2v - 1)$$

また、 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ を x, y の関数として、次のように定義する。

$$\sigma_x = -x - 1, \quad \sigma_y = -1, \quad \tau_{xy} = y \quad (16)$$

これらはシェルの水平方向の釣合い方程式 (3) を満たす。

図 8 に水平投影応力分布を示す。モデル 4 では、 $x = -1$ における自

由境界では形状設計の際の z 座標のみならず変形に対しても自由であると想定する。したがって、 σ_x は $x=-1$ において 0 となるように指定している。

2 階の偏微分方程式である式(5)の係数 σ_x , σ_y , τ_{xy} について、 $\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2 > 0$ のとき偏微分方程式は楕円型となり、 $\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2 = 0$ のときは放物型、 $\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2 < 0$ のときは双曲型となる²⁷⁾。モデル 1, 2, 3 はすべて楕円型に分類されるが、モデル 4 は、図 8(d)に示すように、自由境界付近の一部の $\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2 < 0$ となる領域において双曲型であり、 $x=-1, y=0$ の点で放物型となる。提案手法により、このような場合でも釣合い形状を求めることができることが示された。なお、本研究では釣合い微分方程式が双曲型となる領域を含むモデルについて解が得られたケースとしてモデル 4 を示したが、一般的に双曲型の問題を解くことができるわけではない。特に、双曲型となる領域が大きい場合や四辺の境界が拘束されている場合には、繰り返し計算が収束せず、解が得られなかった。

釣合い形状を図 9 に示す。鉛直方向の釣合い方程式が一部の領域で双曲型となるモデルにおいても反復計算は収束し、シェル形状を得ることができた。シェル頂部は $x = -0.4, y = 0$ 付近にあり、 $x = -1$ の自由境界はアーチ形状となる。境界形状が台形であるモデル 4 は、 x が大きいほど y 方向のスパンが大きくなり、また σ_y を一定値で指定していることから、自由開口部分より原点に近い部分が頂部となる。シェル頂部付近から自由境界に向かって伝達される直応力 σ_x の x 方向の変化率は、 τ_{xy} の y 方向の変化率と釣合うため、 $\tau_{yx} (= \tau_{xy})$ が y 方

向に変化するとき、 σ_x は x 方向に変化して自由境界で 0 となることができる。自由境界には y 方向の直応力 σ_y とせん断応力 τ_{xy} が生じる。なお、同様の水平投影応力をモデル 3 で用いた矩形境界モデルに適用した場合には、自由境界部分がシェルの頂部となることを別途確認している。自由境界に生じるせん断応力は、縁梁を設ければ、梁の軸力により端部の支持境界に伝達することが可能である。

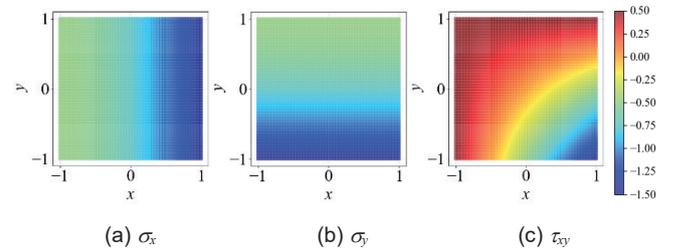


Fig.6 Stress distribution of Model 3

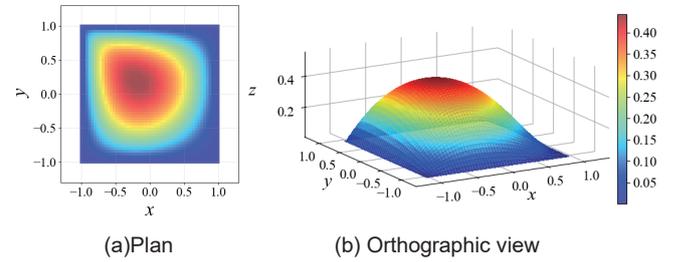


Fig.7 Equilibrium shape of Model 3

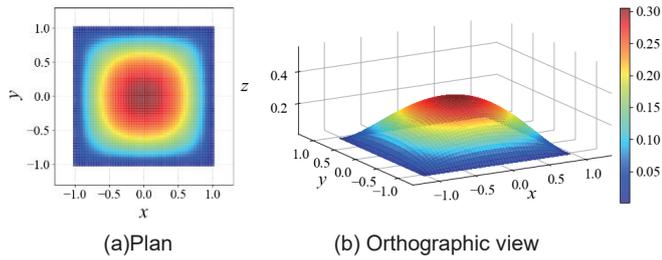


Fig.3 Equilibrium shape of Model 1

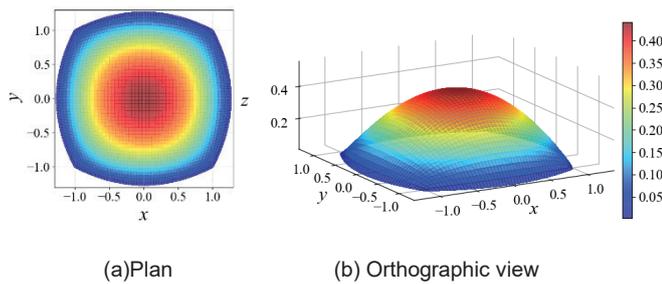


Fig.4 Equilibrium shape of Model 2

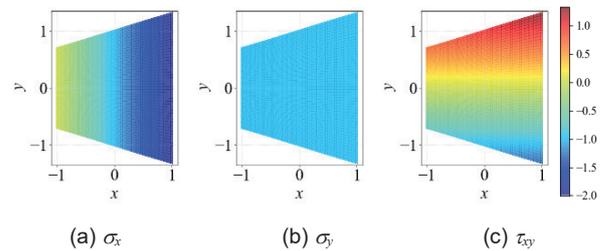


Fig.8 Stress distribution of Model 4

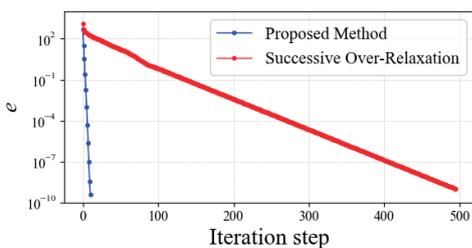


Fig.5 History of sum of shell height change e : Model 2

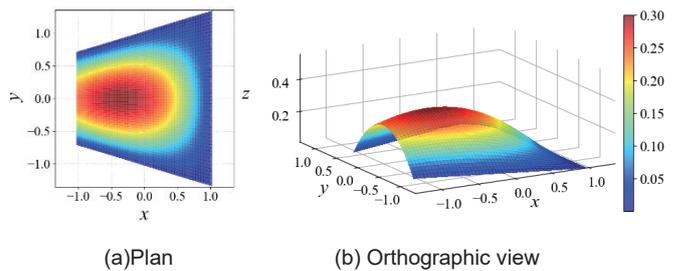


Fig.9 Equilibrium shape of Model 4

4.4 有限要素解析を用いたシェルの応力分布の確認 (モデル 1,2)

4.1 節のモデル 1, 2 を用いて、面外曲げ変形やポアソン比による横ひずみ等の弾性変形を考慮した有限要素解析を行い、得られた応力分布と形状設計法で指定した応力分布を比較する。形状設計法におけるグラフ曲面の座標 (x,y,h) に対して、有限要素解析ではそれぞれの座標値を、係数 a を用いて (ax,ay,ah) (単位: m)としてスケーリングする。ここでは $a=10$ とする。スケーリングの結果、シェルのスパンはモデル 1 で 20.0 m、モデル 2 で 25.0 m となる。シェルのライズ H は、モデル 1 で $H=3.06$ (m)、モデル 2 で $H=4.42$ (m)である。有限要素解析における荷重や材料の諸元は、シェル厚さ $t=0.1$ (m)、ヤング係数 $E=20.0$ (GPa)、ポアソン比 $\nu=0.2$ とする。シェルの自重について、コンクリートの材料密度 $\rho=2.4\times 10^3$ (kg/m³)、 $g=10$ (m/s²)とし、 $\rho g t=2.4$ (kN/m²)として検討する。指定水平投影応力 $\sigma_x=-1$ は、有限要素

解析での水平投影応力 $\sigma_x=-24$ (kN/m)に相当する。

モデル 1 および 2 について、有限要素解析により得られた水平投影応力の分布をそれぞれ図 10,11 に示す。シェル中央での鉛直変位は、モデル 1 で 0.33 mm、モデル 2 で 0.31 mm となった。モデル 1, 2 における $u=0$ の左側境界の σ_x 分布を図 12 に示す。有限要素解析の結果得られる水平投影応力は、どちらのモデルも、図 2 に a で示した境界中央では指定値より大きく、図 2 に b で示した境界端部では指定値より小さい。形状補正手法において誤差を評価した境界 a において指定水平投影応力との誤差は 10~15%程度であった。

図 13 に、有限要素解析における x 方向の面内応力 s_x の水平投影応力 σ_x に対する比率の分布を示す。シェル曲面の大部分において比率は概ね 1.0 であり、水平投影応力を指定値に近づけることにより、シェルの面内応力を近似的に指定値に近づけることが確認できた。

4.5 有限要素解析を用いた形状補正手法 (モデル 1,2)

4.4 節で示した有限要素解析モデルについて、3 節に示したアルゴリズムを用いてシェル曲面形状を補正する。図 2(a), (b)に示した σ_x, σ_y それぞれの誤差評価範囲 a は、境界に沿った直線または曲線で定められる以下の範囲とする。

$$\text{Model1: } -0.50 \leq x \leq 0.50, \quad -0.50 \leq y \leq 0.50$$

$$\text{Model2: } -0.65 \leq x \leq 0.65, \quad -0.65 \leq y \leq 0.65$$

水平投影応力 σ_x, σ_y の作用する方向にそれぞれ平行な境界付近 (図

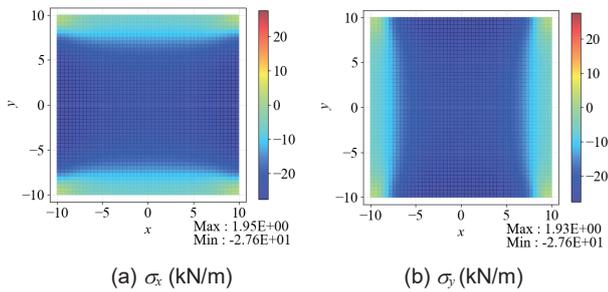


Fig.10 Distribution of projected stress : Model 1

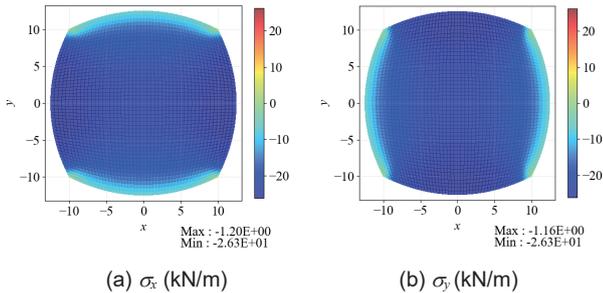


Fig.11 Distribution of projected stress : Model 2

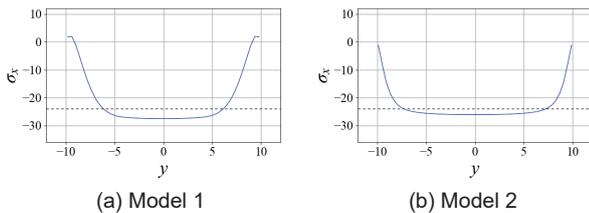


Fig.12 Distribution of projected stress σ_x (kN/m)

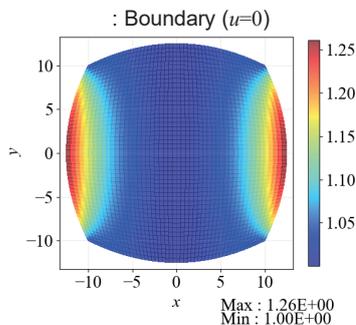


Fig.13 Distribution of ratio of in-plane stress s_x to horizontal projected stress σ_x

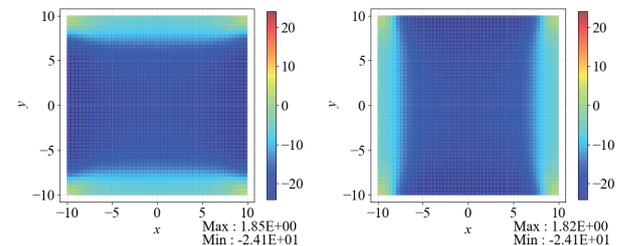


Fig.14 Distribution of projected stress : Model 1 (Converged)

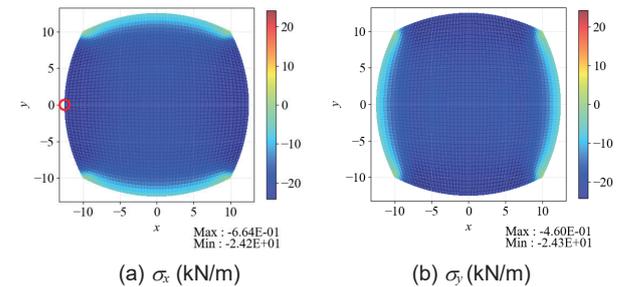


Fig.15 Distribution of projected stress : Model 2 (Converged)

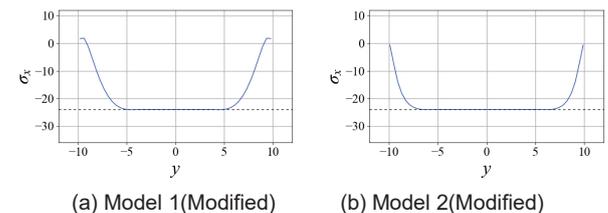


Fig.16 Distribution of projected stress σ_x (kN/m) :Boundary ($u=0$)

2にBで示した範囲)では、境界と平行な方向の水平投影応力を指定値に一致させることが困難であるため、境界付近の領域Bを除いた図2にAで示した内部領域での水平投影応力を目標値に近づける。モデル2はモデル1に比べて境界部の影響が小さいため、モデル1より大きな指定範囲とした。4.4節に示したスケーリングに基づき、3節の計算手順で示した $\bar{\sigma}_x^{(l)}$ 、 $\bar{\sigma}_y^{(l)}$ は、有限要素解析での水平投影応力(単位:kN/m)を1/24倍した値を用いる。

指定水平投影応力を修正する繰り返し計算の最終ステップにおいて得られた解(以下、収束解と呼ぶ)の水平投影応力分布を図14,15に、 $u=0$ の左側境界における σ_x 分布を図16に示す。モデル1,2とも収束条件を満たす解を得られた。シェル形状を補正する領域において、水平投影応力は目標値に一致していることがわかる。

図17に、モデル2の各反復ステップでの誤差 η の推移を示す。反復計算により、誤差 η が収束していることがわかる。図18に、モデル2のシェル左側の境界中央にあたる $y=0$ の位置(図15(a)に赤丸印で示す位置)における $\sigma_x^{(l)}$ と、更新された σ_x の履歴を、形状設計法における無次元化した値として示す。反復計算により、形状設計過程での応力指定値の絶対値 α_x は減少し、それともない有限要素解析における境界の応力の絶対値も減少し、有限要素解析で得られる水平投影応力は目標値である-1に収束している。

有限要素解析ではシェルを面外曲げ剛性を有する要素でモデル化しており、曲げ応力が生じている。モデル2の収束解について、図19に y 軸回りの曲げモーメント M_y (kNm/m)の分布を示す。曲げモーメントと直応力から得られるシェル要素の縁応力 σ_{bx} は次式により得られる。

$$\sigma_{bx} = \frac{s_x}{t} \pm \frac{6M_y}{t^2} \quad (17)$$

図20に、モデル2の収束解のシェル断面の上端と下端の縁応力 σ_{bx} 分布を示す。シェルのほとんどの領域において縁応力は負の値となり引張応力が生じていない。シェル上面の4隅の境界付近において、縁応力が0以上となる部分があり、引張応力が生じている。またシェル下端はすべて圧縮状態である。

5. 結論

本研究では、指定水平投影応力分布を有する自由曲面シェルの形状設計手法を提案した。本論で得られた知見は以下のとおりである。

1. グラフ曲面として定義した連続体シェルについて、膜応力の鉛直方向の釣合い式を離散化し、連立1次方程式を繰り返し解く方法により、膜応力のみで自重と釣合う形状を設計する方法を提案した。提案手法は既往文献の手法と同様のシェルの釣合い形状を、より小さい計算コストで生成できる。
2. せん断応力を平面座標の関数として定義し、水平方向の釣合い方程式を満たすよう水平投影応力を指定することで、提案手法が非対称なシェル形状に適用可能であることを示した。シェルの一部の領域で鉛直方向の釣合い方程式が双曲型となるモデル4においても提案手法を用いて釣合い形状を得ることができた。また、シェルの1辺を鉛直反力が生じない自由境界として水平投影応力を指定することで、アーチ型の自由境界を有するシェル形状が得られることを示した。一方、提案手法は鉛直方向の釣合い方程式が双曲型となる領域を含むモデルについて一般的に収束解を

得ることができるわけではない。双曲型となる領域をもつシェルの形状生成において、解が得られるときの条件を明確に定義するに至っておらず、これについては今後の課題としたい。

3. 提案手法で設計したシェルに材料特性を定めて有限要素解析を行い、弾性変形を考慮した場合の水平投影応力分布を境界付近の領域を除いて一様化する手法を提案した。提案手法により、境界付近の領域を除いて水平投影応力分布を一様化することができた。

水平投影応力を指定することにより、境界での反力を指定できる。また、ライズが十分に小さいシェルでは、水平投影応力と曲面の膜応力の差は小さい。したがって、弾性変形を考慮した水平投影応力を一様化することで、シェルを等厚断面により構成することが可能となる。構造種別として鉄筋コンクリートによるシェルを想定すると、シェル

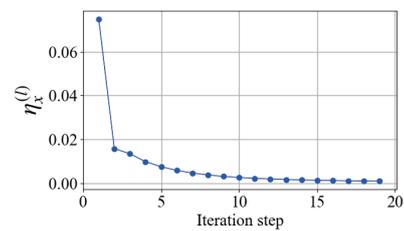


Fig.17 History of value for convergence $\eta_x^{(l)}$: Model 2

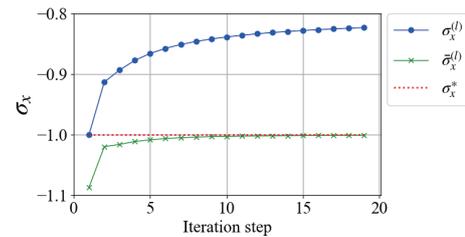


Fig.18 History of projected stress $\sigma_x^{(l)}$, $\bar{\sigma}_x^{(l)}$ Boundary ($u=0, v=0.5$) : Model 2

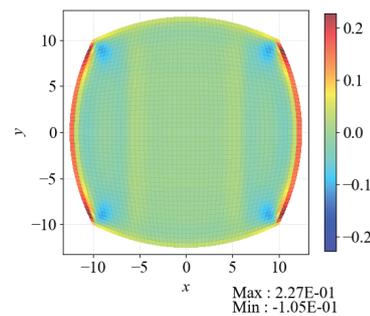
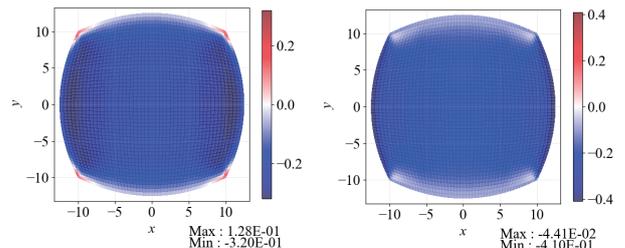


Fig.19 Distribution of bending moment M_y (kNm/m) : Model 2



(a) Top edge (b) Bottom edge

Fig.20 Distribution of edge stress σ_{bx} (MPa) : Model 2

の設計においてひび割れを生じさせる引張応力の発生は望ましくないが、引張応力が生じる範囲は限定的であり、隅部にプレストレスを導入するなどの対応を行うことで、ひび割れを防止することが可能と考えられる。

また、4節で示したとおり、境界に平行な方向の直応力は、横ひずみ等の弾性変形の影響により、境界付近では指定値に一致しない。今後の課題として、本研究で得られた知見に基づき、モデル3, 4で示したように水平投影応力を平面座標の関数として定義し、有限要素解析で得られる応力分布をより詳細に制御する手法への展開が考えられる。

謝辞

本研究は、JST CREST Grant Number JPMJCR1911の支援を受けた。

参考文献

- 1) Adriaenssens, S., Block, P., Veenendaal, D. and Williams, C. (Eds.), Shell structures for architecture: form finding and optimization, Routledge, 2014. (DOI: <https://doi.org/10.4324/9781315849270>)
- 2) Tsuboi, Y., Kawaguchi, M., Sasaki, M., Ohsaki, M., Ueki, T., Takeuchi, T., Kawabata, M., Kawaguchi, K. and Kanebako, Y.: Mechanics, Material, Structural Design., Kenchiku gijyutsu, 2012. (in Japanese)
坪井義昭, 川口衛, 佐々木睦朗, 大崎純, 植木隆司, 竹内徹, 川端昌也, 川口健一, 金箱温春: 力学・素材・構造デザイン, 建築技術, 2012.
- 3) Farin, G.: Curves and Surfaces for CAGD: A Practical Guide, Morgan Kaufmann, 5th ed., 2002.
(DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-1-55860-737-8.X5000-5>)
- 4) Ramm, E. and Mehlhorn G.: On shape finding methods and ultimate load analysis of reinforced concrete shells, Eng. Struct., Vol.13, pp.178–198, 1991. (DOI: [https://doi.org/10.1016/0141-0296\(91\)90050-M](https://doi.org/10.1016/0141-0296(91)90050-M))
- 5) Kimura, T. and Ohmori, H.: Simultaneous optimization with respect to both shape and thickness and its application, Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ), Vol. 74, No. 640, pp. 1091–1098, 2009. (in Japanese)
木村俊明, 大森博司: 形状と厚さの同時最適化法の定式化とその応用-自由曲面シェル構造の構造形態創生法の提案(その1)-, 日本建築学会構造系論文集, Vol. 74, No. 640, pp. 1091–1098, 2009.
(DOI: <https://doi.org/10.3130/aijs.74.1091>)
- 6) Fujita, S. and Ohsaki, M.: Shape optimization of shells considering strain energy and algebraic invariants of parametric surface, Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ), Vol. 74, No. 639, pp. 857–863, 2009. (in Japanese)
藤田慎之輔, 大崎純: ひずみエネルギーとパラメトリック曲面の代数不変量を考慮したシェルの形状最適化, 日本建築学会構造系論文集, Vol. 74, No. 639, pp. 841–847, 2009. (DOI: <https://doi.org/10.3130/aijs.74.857>)
- 7) Nagata, K. and Honma, T.: Form for free surface shell structure using swarm intelligence with manipulation for decent solution search, Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ), Vol. 78, No. 684, pp. 345–354, 2013. (in Japanese)
永田洗大, 本間俊雄: 優良解探索機能を導入した群知能による自由曲面シェル構造の形態, 日本建築学会構造系論文集, Vol. 78, No. 684, pp. 345–354, 2013. (DOI: <https://doi.org/10.3130/aijs.78.345>)
- 8) Doi, K. and Yamamoto, K.: Optimization of corrugation pattern on corrugated shells, Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ), Vol. 86, No. 783, pp. 783–792, 2021. (in Japanese)
土井健太郎, 山本憲司: 波板シェルの波目方向の最適化, 日本建築学会構造系論文集, Vol. 86, No. 783, pp.783–792, 2021.
(DOI: <https://doi.org/10.3130/aijs.86.783>)
- 9) Shimoda M., Yonekura M and Liu Y.: Free-form optimization of a shell structure for minimizing maximum stress, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Vol. 81, No. 821, pp.14–003 89, 2015. (in

Japanese)

- 下田昌利, 米倉正人, 劉陽: 最大応力最小化を目的とするシェル構造体のフリーフォルム最適化, 日本機械学会論文集, Vol. 81, No. 821, p.14–00389, 2015. (DOI: <https://doi.org/10.1299/transjsme.14-00389>)
- 10) Ohya S. and Morooka S.: Stress reduction effect by changing the upper and lower surfaces of the spherical shell boundary, Journal of Structural Engineering B, 68B, pp.186–193, 2022. (in Japanese)
大山晶平, 諸岡繁洋: 球形シェル境界部の上下面の形状変更による応力度低減効果, 構造工学論文集 B, 68B, pp.186–193, 2022.
(DOI: https://doi.org/10.3130/aijse.68B.0_186)
 - 11) Utebi H. and Yamamoto K.: Form evaluation of free-form shells by using bending strain energy ratio, Journal of Structural Engineering B, 62B, pp.61–68, 2016. (in Japanese)
打樋勇人, 山本憲司: 曲げ歪エネルギー率を用いた自由曲面シェルの形状評価に関する研究, 構造工学論文集 B, 62B, pp.61–68, 2016.
 - 12) Akbari M., Mirabolghasemi A., Akbarzadeh H. and Akbarzadeh M., Geometry-based structural form-finding to design architected cellular solids, SCF' 20: Symposium on Computational Fabrication, No.3, pp.1–11, 2020. (DOI: <https://doi.org/10.1145/3424630.3425419>)
 - 13) D'Acunt P., Jasienski J.-P., Ohlbrock P. O., Fivet C., Schwartz J. and Zastani D.: Vector-based 3D graphic statics: A framework for the design of spatial structures based on the relation between form and forces, Int. J. Solids Struct., Vol.167, pp. 58–70, 2019.
(DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2019.02.008>)
 - 14) Akbarzadeh, M., Van Mele, T. and Block, P.: On the equilibrium of funicular polyhedral frames and convex polyhedral force diagrams, Computer-Aided Design, Vol. 63, pp. 118–128, 2015.
(DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cad.2015.01.006>)
 - 15) Block, P. and Ochsendorf, J.: Thrust network analysis: a new methodology for three-dimensional equilibrium, Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures, Vol.48(3), 2007.
 - 16) Vouga, E., Höbinger, M., Wallner, J. and Pottmann, H.: Design of self-supporting surfaces, ACM Transactions on Graphics, Vol.31(4), pp.1–11, 2012. (DOI: <https://doi.org/10.1145/2185520.2185583>)
 - 17) Panozzo, D., Block, P. and Sorkine-Hornung, O.: Designing unreinforced masonry models, ACM Transactions on Graphics, Vol.32(4), No.91, pp.1–12, 2013. (DOI: <https://doi.org/10.1145/2461912.2461958>)
 - 18) Flügge, W.: Stresses in Shells, 2nd. ed., Springer-Verlag, 1973. (DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-88291-3>)
 - 19) Miki, M., Igarashi, T. and Block, P.: Parametric self-supporting surfaces via direct computation of Airy stress functions, ACM Transactions, Vol.34(4), pp.1–12, 2015.
(DOI: <https://doi.org/10.1145/2766888>)
 - 20) Xia, Y., Mantzaflaris, A., Juttler, B., Pan, H., Hu, P., and Wang, W.: Design of self-supporting surfaces with isogeometric analysis, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 353., pp.328–347, 2019.
(DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2019.05.030>)
 - 21) Sakai, Y. and Ohsaki, M.: Non-parametric shape design method of free-form shells using membrane stresses projected onto horizontal plane, AIJ J. Technol. Des. Vol.27, No.66, pp. 1098–1103, 2021 (in Japanese)
堺雄亮, 大崎純: 膜応力の平面投影成分を用いた自由曲面シェルのノンパラメトリック形状設計法, 日本建築学会技術報告集, 第27巻, 第66号, pp.1098–1103, 2021. (DOI: <https://doi.org/10.3130/aijt.27.1098>)
 - 22) Takeoka, R., Ohsaki, M. and Sakai, Y.: Non-parametric design of free-form shells with curved boundaries and specified reaction forces, Eng. Struct., Vol.255, p.113892, 2022.
(DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2022.113892>)
 - 23) Shimoi, H. and Yamamoto, K.: Form-finding analysis of hanging membrane using horizontal membrane stress distribution by finite element stress analysis (Transactions of AIJ), Vol. 87, No. 802, pp. 1193–1200, 2022. (in Japanese)
塩見裕幸, 山本憲司: FEM解析から得られる水平膜力分布を用いた吊り下げ膜の形状解析, 日本建築学会構造系論文集, Vol. 87, No. 802, pp.1193–1200, 2022. (DOI: <https://doi.org/10.3130/aijs.87.1193>)
 - 24) Gesualdo, A., Cennamo, C., Fortunato, A., Frunzio, G., Monaco, M. and Angelillo, M.: Equilibrium formulation of masonry helical stairs,

25) Ohsaki, M, Takeuchi, T. and Yamashita, T.: Basic Theory and Design of Shell and Spatial Structures, Kyoto University Press, 2018. (in Japanese)

大崎 純, 竹内 徹, 山下哲郎: シェル・空間構造の基礎理論とデザイン, 京大出版会, 2019.

26) Zhu, M., McKenna, F. and Scott, M. H.: OpenSeesPy: Python library for the OpenSees finite element framework, SoftwareX, Vol.7, pp. 6–11, 2018. (DOI: <https://doi.org/10.1016/j.softx.2017.10.009>)

27) Miki, M., Adiels, E., Baker, W., Mitchell, T., Sehlström, A., Williams, C. J. K.: Form-finding of shells containing both tension and compression using the Airy stress function, International Journal of Space Structures, Vol.37(4), pp. 261–282, 2022.

(DOI: <https://doi.org/10.1177/09560599221102618>)

付録 パラメータ u, v を用いたシェルの鉛直方向の釣合い方程式と差分法による釣合い方程式の離散化

グラフ曲面の x, y 座標をパラメータ $(u, v) \in [0, 1]^2$ の関数として $x(u, v)$, $y(u, v)$ と表す。 u, v の x, y に関する偏導関数を a, b, c, d とすると、これらは次のように表される。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = b, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = c, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = d \quad (\text{a.1})$$

これらは、以下に示すヤコビ行列 \mathbf{J} の逆行列 \mathbf{J}^{-1} の成分である。

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \quad (\text{a.2})$$

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (\text{a.3})$$

合成関数の連鎖則により、 x, y に関する偏微分方程式は、 u, v および a, b, c, d を用いて以下のように表すことができる。

$$\frac{\partial h}{\partial x} = a \frac{\partial h}{\partial u} + b \frac{\partial h}{\partial v}, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = c \frac{\partial h}{\partial u} + d \frac{\partial h}{\partial v} \quad (\text{a.4})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} &= \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial v} + a \left(a \frac{\partial^2 h}{\partial u^2} + b \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} \right) + b \left(a \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} + b \frac{\partial^2 h}{\partial v^2} \right) \\ &= \left(a \frac{\partial a}{\partial u} + b \frac{\partial a}{\partial v} \right) \frac{\partial h}{\partial u} + \left(a \frac{\partial b}{\partial u} + b \frac{\partial b}{\partial v} \right) \frac{\partial h}{\partial v} + a^2 \frac{\partial^2 h}{\partial u^2} + 2ab \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} + b^2 \frac{\partial^2 h}{\partial v^2} \end{aligned} \quad (\text{a.5})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} &= \frac{\partial c}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial d}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial v} + c \left(c \frac{\partial^2 h}{\partial u^2} + d \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} \right) + d \left(c \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} + d \frac{\partial^2 h}{\partial v^2} \right) \\ &= \left(c \frac{\partial c}{\partial u} + d \frac{\partial c}{\partial v} \right) \frac{\partial h}{\partial u} + \left(c \frac{\partial d}{\partial u} + d \frac{\partial d}{\partial v} \right) \frac{\partial h}{\partial v} + c^2 \frac{\partial^2 h}{\partial u^2} + 2cd \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} + d^2 \frac{\partial^2 h}{\partial v^2} \end{aligned} \quad (\text{a.6})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial c}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial d}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial v} + c \left(a \frac{\partial^2 h}{\partial u^2} + b \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} \right) + d \left(a \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} + b \frac{\partial^2 h}{\partial v^2} \right) \\ &= \left(a \frac{\partial c}{\partial u} + b \frac{\partial c}{\partial v} \right) \frac{\partial h}{\partial u} + \left(a \frac{\partial d}{\partial u} + b \frac{\partial d}{\partial v} \right) \frac{\partial h}{\partial v} + ac \frac{\partial^2 h}{\partial u^2} + (ad + bc) \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} + bd \frac{\partial^2 h}{\partial v^2} \end{aligned} \quad (\text{a.7})$$

a, b, c, d の u, v に関する偏導関数はそれぞれ次のように書ける。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial u} & \frac{\partial c}{\partial u} \\ \frac{\partial b}{\partial u} & \frac{\partial d}{\partial u} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad (\text{a.8})$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial v} & \frac{\partial c}{\partial v} \\ \frac{\partial b}{\partial v} & \frac{\partial d}{\partial v} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad (\text{a.9})$$

よって、式(5)は、 a, b, c, d と u, v を用いて次のように書ける。

$$\begin{aligned} & \left(a^2 \sigma_x + 2ac\tau_{xy} + c^2 \sigma_y \right) \frac{\partial^2 h}{\partial u^2} \\ & + 2 \left[ab\sigma_x + (ad + bc)\tau_{xy} + cd\sigma_y \right] \frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} \\ & + \left(b^2 \sigma_x + 2bd\tau_{xy} + d^2 \sigma_y \right) \frac{\partial^2 h}{\partial v^2} \\ & + \left[\left(a \frac{\partial a}{\partial u} + b \frac{\partial a}{\partial v} \right) \sigma_x + 2 \left(a \frac{\partial c}{\partial u} + b \frac{\partial c}{\partial v} \right) \tau_{xy} + \left(c \frac{\partial c}{\partial u} + d \frac{\partial c}{\partial v} \right) \sigma_y \right] \frac{\partial h}{\partial u} \\ & + \left[\left(a \frac{\partial b}{\partial u} + b \frac{\partial b}{\partial v} \right) \sigma_x + 2 \left(a \frac{\partial d}{\partial u} + b \frac{\partial d}{\partial v} \right) \tau_{xy} + \left(c \frac{\partial d}{\partial u} + d \frac{\partial d}{\partial v} \right) \sigma_y \right] \frac{\partial h}{\partial v} = f \end{aligned} \quad (\text{a.10})$$

次に、パラメータ u, v の平面を u, v 方向にそれぞれ $N \times N$ 分割した格子点 (i, j) ($i, j = 1, \dots, N+1$) を考える。格子点の u, v 方向の間隔をそれぞれ $\delta u, \delta v$ とすると、 $\delta u = \delta v = 1/N$ である。格子点 (i, j) の z 座標を $h_{i,j}$ とする。変数 h の u, v に関する偏導関数は、中心差分を用いると、次のように計算できる。

$$\frac{\partial h}{\partial u} := \frac{h_{i+1,j} - h_{i-1,j}}{2\delta u}, \quad \frac{\partial h}{\partial v} := \frac{h_{i,j+1} - h_{i,j-1}}{2\delta v} \quad (\text{a.11})$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u^2} := \frac{h_{i+1,j} - 2h_{i,j} + h_{i-1,j}}{(\delta u)^2}, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial v^2} := \frac{h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1}}{(\delta v)^2} \quad (\text{a.12})$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u \partial v} := \frac{h_{i+1,j+1} - h_{i-1,j+1} - h_{i+1,j-1} + h_{i-1,j-1}}{4\delta u \delta v} \quad (\text{a.13})$$

式(3)を満たす水平投影応力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ をパラメータとして、式(a.10)は、差分を用いて次のように表される。

$$\begin{aligned} & \left(a^2 \sigma_x + 2ac\tau_{xy} + c^2 \sigma_y \right) \frac{h_{i+1,j} - 2h_{i,j} + h_{i-1,j}}{(\delta u)^2} \\ & + 2 \left[ab\sigma_x + (ad + bc)\tau_{xy} + cd\sigma_y \right] \frac{h_{i+1,j+1} - h_{i-1,j+1} - h_{i+1,j-1} + h_{i-1,j-1}}{4\delta u \delta v} \\ & + \left(b^2 \sigma_x + 2bd\tau_{xy} + d^2 \sigma_y \right) \frac{h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1}}{(\delta v)^2} \\ & + \left[\left(a \frac{\partial a}{\partial u} + b \frac{\partial a}{\partial v} \right) \sigma_x + 2 \left(a \frac{\partial c}{\partial u} + b \frac{\partial c}{\partial v} \right) \tau_{xy} + \left(c \frac{\partial c}{\partial u} + d \frac{\partial c}{\partial v} \right) \sigma_y \right] \frac{h_{i+1,j} - h_{i-1,j}}{2\delta u} \\ & + \left[\left(a \frac{\partial b}{\partial u} + b \frac{\partial b}{\partial v} \right) \sigma_x + 2 \left(a \frac{\partial d}{\partial u} + b \frac{\partial d}{\partial v} \right) \tau_{xy} + \left(c \frac{\partial d}{\partial u} + d \frac{\partial d}{\partial v} \right) \sigma_y \right] \frac{h_{i,j+1} - h_{i,j-1}}{2\delta v} \\ & = f_{i,j} \end{aligned} \quad (\text{a.14})$$

式(a.14)の右辺は次のように書ける。

$$f_{i,j} = -\rho g t \sqrt{1 + (a^2 + c^2) \left(\frac{\partial h}{\partial u} \right)^2 + 2(ab + cd) \frac{\partial h}{\partial u} \frac{\partial h}{\partial v} + (b^2 + d^2) \left(\frac{\partial h}{\partial v} \right)^2} \quad (\text{a.15})$$

また、シェルの境界における h の u, v に関する偏導関数は次のように書ける。

$$\frac{\partial h}{\partial u} := 2 \frac{h_{i+1,j} - h_{i,j}}{\delta u} - \frac{h_{i+2,j} - h_{i,j}}{2\delta u} \quad \text{for } i=1 \quad (\text{a.16})$$

$$\frac{\partial h}{\partial u} := 2 \frac{h_{i,j} - h_{i-1,j}}{\delta u} - \frac{h_{i,j} - h_{i-2,j}}{2\delta u} \quad \text{for } i=N \quad (\text{a.17})$$

$$\frac{\partial h}{\partial v} := 2 \frac{h_{i,j+1} - h_{i,j}}{\delta v} - \frac{h_{i,j+2} - h_{i,j}}{2\delta v} \quad \text{for } j=1 \quad (\text{a.18})$$

$$\frac{\partial h}{\partial v} := 2 \frac{h_{i,j} - h_{i,j-1}}{\delta v} - \frac{h_{i,j} - h_{i,j-2}}{2\delta v} \quad \text{for } j=N \quad (\text{a.19})$$