RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B92 (2023), 1–24

3 次方程式の還元不能な場合
Cubic equations in the *casus irreducibilis*

長田直樹
Naoki Osada *

Abstract

When a real cubic equation has three distinct real roots, it is called the *casus irreducibilis* or the case of irreducible. To find the roots of such equations using Cardano's formula, it is necessary to extract cube roots of imaginary binomials.

In this paper we review remarkable works from Cardano to Euler on the solution of cubic equations in the *casus irreducibilis* and on the extraction of the cube roots of imaginary binomials. In it we give new proofs of Girard's method of constructing three real roots of a cubic equation and of Newton's method of extracting cube roots of imaginary binomials.

§ 1. はじめに

実数係数の 3 次方程式

$$x^3 + px + q = 0 \tag{1.1}$$

の実根を求める公式

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \tag{1.2}$$

Received November 18, 2022; Revised Februay 9, 2023.
2020 Mathematics Subject Classification(s): 01A40,01A45
Key Words: cube root of binomial, cubic equation, casus irreducibilis, angle trisection.
This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.
*東京女子大学
email: osada@lab.twcu.ac.jp

© 2023 Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University. All rights reserved.

は、カルダーノの公式と呼ばれる。(1.1) が相異なる 3 実根を持つための必要十分条件は、$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$ である。このとき (1.1) は、還元不能な場合[1](casus irreducibilis[2])と呼ばれ、カルダーノの公式に虚数の立方根が現れる。p, q が整数のとき (1.2) により x を計算するためには、2 項式の立方根 $\sqrt[3]{\alpha + \sqrt{\beta}}$ の抽出が必要である。ここで、α は整数または半整数、β は $2^2 3^3 \beta$ が整数となるような有理数である。

本論文では、還元不能な場合の 3 次方程式の解法と虚数の 2 項式の立方根の抽出について、カルダーノおよびボンベッリによる問題誕生からド・モアブルおよびオイラーによる問題解決[3]までを時間を追って述べる。還元不能な場合の 3 次方程式の解法に関する個々の数学者の業績は、多くの研究者の論文や解説がある。カルダーノ、ボンベッリおよびヴィエトによる還元不能な場合の 3 次方程式の解法と虚数の 2 項式の立方根の抽出については、いくつかの通史 (カッツ [17]、メルツバッハ-ボイヤー [19] など) でも扱われている。しかしながら、カルダーノからオイラーまでの発展を追った研究は未見である。

数式の表現は、17 世紀前半まで今日とかなり異なるが、現代の表記法を用いる。原典からの引用は、段下げし末尾に出典を示す。出典として原典のみを挙げたものは原典から、原典と英訳をあげたものは両者を見比べての邦訳である。補足は [ ] 内に記す。

§ 2. カルダーノ

1545 年ジロラモ・カルダーノ (Girolamo Cardano) は、タルタリア (Tartaglia) から聞き出した 3 次方程式の代数解法と弟子のロドヴィコ・フェラーリ (Lodovico Ferrari) による 4 次方程式の代数解法に図形を用いた証明をつけて、『アルス・マグナ』(大いなる技法、*Ars Magna*)[3] において公開した。カルダーノは、3 次方程式の根を文により 2 項式[4]の立方根の和あるいは差で表したが、2 項式の立方根の抽出の方法を持ち合わせてなかった[5]。たとえば、$x^3 + 6x = 20$ に公式を適用し、$\sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$ を x の値とした。同じ XI 章の最後で

---

[1]「不還元の場合」とも呼ばれる。

[2] 17 世紀末までは 'casus irreducibilis'(ラテン語) とは呼ばれておらず、「モノの $\frac{1}{3}$ の立方は数の $\frac{1}{2}$ の平方より大きい」というような呼び方をされた。ド・ラニー (Thomas Fantet de Lagny) が 1697 年に出版した『新初等算術と代数、あるいは数学入門』*Nouveaux élements d'arithmetique et d'algebre: ou, introduction aux mathematiques* [18, p.473] において 'cas irreductible'(フランス語) と呼んだのが筆者が知る限り 'casus irreducibilis' の初出である。[5] をみよ。'casus irreducibilis' は、19 世紀のある時期から体論あるいはガロア理論のなかで本格的に用いられるようになったと考えられる。たとえば、オットー・ヘルダー (Otto Hölder) は 1891 年に「3 次方程式における *casus irreducibilis* について」*Über den Casus irreducibilis bei der Gleichung dritten Grades* (Mathematische Annalen, 38, 307312) を発表している。

[3] 実根を表すのに何故虚数が必要になるかという問題がガロアの理論を用いて解明されたのは 19 世紀後半であるが、本論文では扱わない。

[4] カルダーノは $x^3 = ax + b$ $(a > 0, b > 0)$ に対し、$\frac{b}{2} + \sqrt{(\frac{b}{2})^2 + (\frac{a}{3})^3}$ を 2 項式 'binomium', $\frac{b}{2} - \sqrt{(\frac{b}{2})^2 + (\frac{a}{3})^3}$ を 2 項の差を意味する 'apotomen' と使い分けた。本論文では両方とも 2 項式と呼ぶ。

[5] 筆者は、2022 年 9 月 5 日の講演の際「カルダーノは 2 項式の立方根の抽出を代数的にではなく、数値計算により行ったと考えられる」と述べたが訂正する。1547 年に行われたタルタリアとフェラーリとの公開試合における問題と解答 [12, pp.257-259] を見ると、16 世紀中頃のイタリアでは立方根を抽出して表すことは要求してなかったと考えられる。

> 最初の例 $\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$ は、そこに示された規則が示すように、また試してみれば完全に明らかなように 2 である。 [3, fol.30][4, p.100]

と述べ、導出の根拠は示さなかった。

カルダーノは、$x^3+b=ax$ が還元不能な場合に、虚数の立方根を用いるのでなく、定数項の符号を変えた $x^3=ax+b$ の根が容易に見つけられるものを例に取り上げた。$x^3=ax+b$ の根を β とすると、

$$\alpha=\frac{\beta}{2}\pm\sqrt{a-3\left(\frac{\beta}{2}\right)^2} \tag{2.1}$$

が $x^3+b=ax$ の根となることを述べた[6]。上記の方法を用いると、カルダーノの公式では容易に求められない他の 2 実根を求めることができる。同様に、$x^3+b=ax$ の根 α がみつかれば

$$\beta=\frac{\alpha}{2}\pm\sqrt{a-3\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}$$

が $x^3=ax+b$ の他の 2 実根である。

> 例：$x^3+3=8x$[を考える。] $x^3=8x+3$ を解くと前に述べた規則により私は 3 を得る。これの半分の 2 乗は $2\frac{1}{4}$ で、それに 3 を掛けると $6\frac{3}{4}$ である。x の係数 8 からこれを引くと $1\frac{1}{4}$ が残り、立方がモノと数に等しい方程式 [$x^3=8x+3$] の根の半分 $1\frac{1}{2}$ からその平方根を加え、あるいは引くと両者は求める根である。一方は $1\frac{1}{2}+\sqrt{1\frac{1}{4}}$ で他方は $1\frac{1}{2}-\sqrt{1\frac{1}{4}}$ である[7]。 [3, fol.32][4, p.106]

カルダーノは、還元不能な場合に虚数を用いなかったが、虚数の必要性に気がついたと思われる。『アルス・マグナ』の第 XXXVII 章で虚数について言及した。

> 規則 II
>
> 試行錯誤の第 2 の型は負数の [平方] 根を用いる。私は 1 つの例題を与えるだろう。もし誰かがあなたに「10 を 2 つの部分に分け、一方を他方に掛け合わせたときの積を 30 あるいは 40 にせよ」と言ったとする。この場合あるいは方程式は明らかに不可能である。しかしながら、我々はそれをこのように解くだろう。10 を等しい部分に分けよう。5 がその半分である。それ自身を掛けると 25 を生じる。25 から積、すなわち 40 を引き去ると、第 6 巻の操作の章で教えたように、-15 が余る。この平方根を 5 から引き去ると、お互いに掛け合わせた部分が 40 にな

[6] $\alpha^3+b=a\alpha$ と $\beta^3=a\beta+b$ の辺々加えると $\alpha^3+\beta^3=a(\alpha+\beta)$ となる。$(\alpha+\beta)((\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta-a)=0$ より、$\alpha+\beta=0$ または $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2-a=0$ である。後者の場合、

$$\alpha=\frac{\beta\pm\sqrt{\beta^2-4(\beta^2-a)}}{2}=\frac{\beta}{2}\pm\sqrt{a-3\left(\frac{\beta}{2}\right)^2}$$

である。

[7] (2.1) において、$\beta=3$ とする。$\frac{3}{2}\pm\sqrt{8-3\left(\frac{3}{2}\right)^2}=1\frac{1}{2}\pm\sqrt{1\frac{1}{4}}$

る。これらは、それゆえ、$5+\sqrt{-15}$ と $5-\sqrt{-15}$ である。

証明

[...]

しかし、この量では純粋な負数や他の数のように演算を行うことができないので、これは本当に詭弁に近いものである。

[3, fol.66][24, pp.201-202]

現代的に表すと、

$$\begin{cases} x+y=10 \\ xy=40 \end{cases}$$

から y を消去し、$x^2-10x+40=0$ を解いて

$$x=\frac{10}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2-40}=5\pm\sqrt{-15},\quad y=5\mp\sqrt{-15}$$

を与えている[8]。そして

$$\begin{cases} (5+\sqrt{-15})+(5-\sqrt{-15})=10 \\ (5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15})=5^2-(-15)=40 \end{cases}$$

を確かめている。

「純粋な負数や他の数のように演算を行うことができ」るように複素数を導入したのは、次節で述べるボンベッリである。

§3. ボンベッリ

§3.1. 2項式の立方根の抽出

1572年にラファエル・ボンベッリ (Rafael Bombelli) は『代数学』*L'Algebra*[1] において、2項式の立方根を抽出した。立方根の抽出を行うのに先立ち、『代数学』I巻において、虚数「負の正 (piú di meno)」$+\sqrt{-1}$ と「負の負 (meno di meno)」$-\sqrt{-1}$ を

$$\begin{aligned} &(+1)(+\sqrt{-1})=+\sqrt{-1}, && (-1)(+\sqrt{-1})=-\sqrt{-1}, && (+1)(-\sqrt{-1})=-\sqrt{-1}, \\ &(-1)(-\sqrt{-1})=+\sqrt{-1}, && (+\sqrt{-1})(+\sqrt{-1})=-1, && (+\sqrt{-1})(-\sqrt{-1})=+1, \\ &(-\sqrt{-1})(+\sqrt{-1})=+1, && (-\sqrt{-1})(-\sqrt{-1})=-1 \end{aligned}$$

の乗算を満たすとして導入した [1, p.169]。続いて虚数の2項式の立方根の演算を

[8]「$5+\sqrt{-15}$ と $5-\sqrt{-15}$」の原文は '5 p:R m:15, & 5 m:R m:15' である。

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-3}}\times\sqrt[3]{2+\sqrt{-3}}=\sqrt[3]{\sqrt{-3}\times\sqrt{-3}+2\times2+2\times2\times\sqrt{-3}}$$
$$=\sqrt[3]{(-3)+4+4\sqrt{-3}}=\sqrt[3]{1+\sqrt{-48}}$$

などにより説明した。そして、虚数の 2 項式の立方根の抽出を解説した。$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=2+\sqrt{-1}$ の説明を抜粋する。

> $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$[9] の辺を求める場合、求める辺の数は $\sqrt{-121}$ の 2 乗 [の符号を変えた数] に 2 の 2 乗である 4 を加えると 125 になり、立方根をとると 5 となる。[$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=a+\sqrt{-b}$ とおく。$(a^2+b)^3=(a+\sqrt{-b})^3(a-\sqrt{-b})^3=(2+\sqrt{-121})(2-\sqrt{-121})=2^2-(-121)=125$ より $a^2+b=\sqrt[5]{125}=5$ となる。] ここで、2 乗が 5 より小さく、[$a^3-3ab=2$ より]3 乗が 2 より大きい数 [a] を求める必要がある。これを 1 とすると、必然的に [$b=$]4 となり、[中略]
>
> これ [b] を 3 倍すると 12 になるが、これは 1 しかない立方数からは得られないので 1 は適さない。また 3 もその 2 乗だけで 5 を超えるので、これ [3] 以上も適さない。[中略]
>
> [$a=$]2 が残り、[$b=1$ となり、] その辺は $2+\sqrt{-1}$ である。 [1, pp.180-181]

ボンベッリによる抽出法を現代的に記述すると以下のようになる。

$$x^3=3mx+2n,\quad (n\text{ は整数}, m\text{ は自然数}, n^2-m^3<0)$$

にカルダーノの公式を適用して得られる 2 項式の立方根 $\sqrt[3]{n+\sqrt{n^2-m^3}}$ が、整数 a と自然数 b により

$$\sqrt[3]{n+\sqrt{n^2-m^3}}=a+\sqrt{-b} \tag{3.1}$$

と表示される[10]とすると、$\sqrt[3]{n-\sqrt{n^2-m^3}}=a-\sqrt{-b}$ である[11]。

$$\sqrt[3]{n+\sqrt{n^2-m^3}}\sqrt[3]{n-\sqrt{n^2-m^3}}=\sqrt[3]{m^3}=m$$

一方、$(a+\sqrt{-b})(a-\sqrt{-b})=a^2+b$ より

$$a^2+b=m \tag{3.2}$$

である。つぎに、(3.1) の両辺を 3 乗し、実部を等置すると

$$a^3-3ab=n \tag{3.3}$$

[9]原文は 'R.c. L 2 p di m R.q. 121 ⌋' である。ここで、⌋ は L の鏡像である。

[10]ニュートンが注意 (7 節参照) しているように、$\sqrt[3]{n+\sqrt{n^2-m^3}}=a+\sqrt{-b}$ と抽出されるためには $3a^2-b>0$ が必要である。$3a^2-b<0$ のときは $a-\sqrt{-b}$ であるが、抽出はほぼ同様にできる。さらに、(3.1) をみたす整数 a と自然数 b が存在するとは限らない。たとえば、$m=2, n=-1$ のとき、$\sqrt[3]{-1+\sqrt{-7}}$ は整数 a と自然数 b で $a+\sqrt{-b}$ あるいは $a-\sqrt{-b}$ と表せない。

[11] $\sqrt[3]{n+\sqrt{n^2-m^3}}=a+\sqrt{-b}$ の共役複素数は $\sqrt[3]{n-\sqrt{n^2-m^3}}=a-\sqrt{-b}$ である。

となる。$b>0, m>0$ と (3.2) より、a は $-\sqrt{m}<a<\sqrt{m}$ の範囲の整数である。さらに $n>0$ のとき a は $\sqrt[3]{n}<a<\sqrt{m}$ の範囲の整数である。これらの範囲の a に対し、(3.2) により b を決定し、(3.3) をみたす a, b の組を採用する [17, p.417]。

実数の 2 項式の立方根のボンベッリによる抽出も、符号が異なるだけでほぼ同様である。

$$x^3+3mx+2n=0, \quad (m, n \text{ は整数}, n^2+m^3>0)$$

にカルダーノの公式を適用して得られる 2 項式の立方根 $\sqrt[3]{-n+\sqrt{n^2+m^3}}$ が、整数 a と自然数 b により

$$\sqrt[3]{-n+\sqrt{n^2+m^3}}=a+\sqrt{b} \tag{3.4}$$

と表示されるとする。(3.4) より、$\sqrt[3]{-n-\sqrt{n^2+m^3}}=a-\sqrt{b}$ である[12]。したがって、

$$\sqrt[3]{-n+\sqrt{n^2+m^3}}\sqrt[3]{-n-\sqrt{n^2+m^3}}=\sqrt[3]{-m^3}=-m$$

一方、$(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})=a^2-b$ より

$$a^2-b=-m \tag{3.5}$$

である。つぎに、(3.4) の両辺を 3 乗し、整数部分を等置すると

$$a^3+3ab=-n \tag{3.6}$$

となる。(3.6) より、$n>0$ のときは $\sqrt[3]{-n}<a<0$ となり、$n<0$ のときは $0<a<\sqrt[3]{-n}$ となる。これらの範囲の a に対し、(3.5) により b を決定し、(3.6) をみたす a, b の組を採用する [17, p.416]。

II 巻ではカルダーノの公式と立方根の抽出を用いて 3 次方程式の正根をもとめた。$x^3=6x+40$ にカルダーノの公式を適用すると

$$x=\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}$$

が得られる。$\sqrt[3]{20\pm\sqrt{392}}=2\pm\sqrt{2}$ を用いて $x=(2+\sqrt{2})+(2-\sqrt{2})=4$ を与えた。

つぎに、$x^3=15x+4$ にカルダーノの公式を適用すると

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

が得られる。$\sqrt[3]{2\pm\sqrt{-121}}=2\pm\sqrt{-1}$ を用いて、$x=(2+\sqrt{-1})+(2-\sqrt{-1})=4$ を与えた。ボンベッリは正根しか認めてないので、負根 $-2+\sqrt{3}, -2-\sqrt{3}$ は与えてない。

[12] 2 項式なので n^2+m^3 は非平方数である。$-n+\sqrt{n^2+m^3}=a^3+3ab+(3a^2+b)\sqrt{b}$ より、$-n=a^3+3ab, \sqrt{n^2+m^3}=(3a^2+b)\sqrt{b}$ である。$-n-\sqrt{n^2+m^3}=a^3+3ab-(3a^2+b)\sqrt{b}=(a-\sqrt{b})^3$ より、$\sqrt[3]{-n-\sqrt{n^2+m^3}}=a-\sqrt{b}$ となる。

ボンベッリの抽出法は、$a+\sqrt{b}$ あるいは $a-\sqrt{b}$, (a, b は整数) と抽出される場合にしか適用できないが、画期的なものであった。1 世紀後でもライプニッツは自分の論文と一緒にボンベッリの『代数学』をホイヘンスに送り [15, p.205]、ウォリスは 1685 年から 1693 年にかけて、ボンベッリの仕事により大きな関心を持つようになった [25, p.326]。17 世紀にスホーテンとニュートンが部分的に改良したことを除き、18 世紀にド・モアブルが虚数の立方根の抽出を与えるまで、ボンベッリの方法が乗り越えられることはなかった。

§ 3.2. 還元不能な 3 次方程式と角の三等分

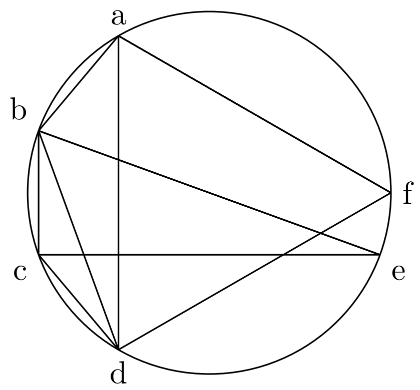

図 1. ボンベッリの正 9 角形の 1 辺の長さを求める問題 [2, p.265]

ボンベッリは、『代数学』II 巻の $x^3 = 9x + 9$ などの還元不能な問題のところで「これは、その場所で述べるように、角を三つの等しい部分に分割するために有用であった」[1, p.321] と述べた。「その場所」とは、『代数学』V 巻の問題 135 である。

> [135] 円 abcdef があり、直径 be を $\sqrt{192}$ とする。この内部に正 9 角形を作りたい。1 辺の長さはいくらか。
>
> この問題は、今のところ私には不可能に思えるが、いずれ立方体と数がモノに等しい $[x^3 + b = ax]$ という方程式の一般的な解法が見つかったとき、その解法に立方根が現れないとは考えにくい。このことは、もし 9 角形が構成できるとすれば、それは器具によってのみ可能であることを示唆している。オロンス・フィネ (Oronce Finé) とアルブレヒト・デューラー (Albrecht Dürer) がそのような 9 角形の構成に関する規則[13]を持っているが、それは間違いなく誤りである：そして誤りは明らかなので、私はそれを説明しない。
>
> 前述の円内に正三角形 adf を作成すると、与えられた規則によって一辺は 12 である[14]。弧 ad の三等分点を b, c とすると、3 つの線分 ab, bc, cd の長さは等しく、

[13] デューラーは 1525 年に出版した『測定法教則』*Underweysung der Messung* [7] で正九角形と角の三等分の作図法を与えた [8, pp.67-68] が、わずかな誤差を持つ。角の三等分の誤差については [16, pp.174-177] を見よ。

[14] 直径 D の円に内接する正三角形の一辺は $\frac{\sqrt{3}}{2}D$ である。

それらを $2x$ とおく。そうすると、$2x$ が [正 9 角形の]1 辺となる。

四角形 abcd において、$\mathrm{bc}\cdot\mathrm{ad}+\mathrm{ab}\cdot\mathrm{cd} = 2x\cdot 12+2x\cdot 2x = 4x^2+24x$ である。[一方、プトレマイオスの定理 $\mathrm{bc}\cdot\mathrm{ad}+\mathrm{ab}\cdot\mathrm{cd} = \mathrm{ac}\cdot\mathrm{bd}$ と] $\mathrm{ac} = \mathrm{bd}$ より $\mathrm{ac} = \mathrm{bd} = \sqrt{4x^2+24x}$ である。△abe は直角三角形なので、$\mathrm{ae}^2 = \mathrm{be}^2 - \mathrm{ab}^2 = 192 - 4x^2$ より $\mathrm{ae} = \sqrt{192-4x^2}$ である。同様に、四角形 abce において、$\mathrm{ab}\cdot\mathrm{ce}+\mathrm{bc}\cdot\mathrm{ae} = \mathrm{be}\cdot\mathrm{ac}$ より、$2\cdot 2x\cdot\sqrt{192-4x^2} = \sqrt{192}\sqrt{4x^2+24x}$ である。両辺を be[$=\sqrt{192}$] で割ると、$x\sqrt{16-\frac{1}{3}x^2} = \sqrt{4x^2+24x}$ であり、2 乗すると、$4x^2+24x = 16x^2 - \frac{1}{3}x^4$ より $x^4+72x = 36x^2$ すなわち、$x^3+72 = 36x$ が得られた。

[2, pp.265-266][13, p.185][20, p.142]

この問題に対し、1929 年に『代数学』IV 巻,V 巻を編集し出版したエトーレ・ボルトロッティ (Ettore Bortolotti) は「この一節は、ボンベリが還元不能な場合の 3 次方程式の解法を角の三等分問題と関連付けている」[2, pp.265-266] と脚注に記した[15]。ボンベッリは、『代数学』の IV 巻,V 巻を 1572 年に出版しなかったので、それらは 1929 年まで写本のままおかれた [19, p.261]。

§4. ヴィエト

フランソワ・ヴィエト (François Viète) は、没後 1615 年に出版された『方程式の理解と改良についての 2 つの論文』*De aequationum et recognitione et emendatione tractatus duo* [26] において、還元不能な場合に三角法と 3 倍角の公式を用いて、正根の 1 つを求めた。本節ではカッツ [17, pp.422-425] に基づきヴィエトの方法を述べる。

3 次方程式

$$x^3 - 3b^2x = b^2d\ (2b > d > 0)$$

を考える[16]。$x = r\cos\theta$ とおくと $r^3\cos^3\theta - 3b^2r\cos\theta = b^2d$ すなわち

$$\cos^3\theta - 3\frac{b^2}{r^2}\cos\theta = \frac{b^2d}{r^3}$$

となる。余弦の 3 倍角の公式[17] $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ を変形した $\cos^3\theta - \frac{3}{4}\cos\theta = \frac{1}{4}\cos 3\theta$ にあてはめるため r を $3\frac{b^2}{r^2} = \frac{3}{4}$ となるようにとると、$r = 2b$ である。そのとき、$\frac{b^2d}{r^3} = \frac{d}{8b}$ である。θ を $\frac{d}{8b} = \frac{1}{4}\cos 3\theta$ をみたすように、すなわち $\cos 3\theta = \frac{d}{2b}$ にとると $x = r\cos\theta$ が 1 つの実根である。$0 < d < 2b$ より $0 < \frac{d}{2b} < 1$ だから $0 < 3\theta < 90°$ をみたす θ がただ 1 つ定まる。

---

[15] ボルトロッティの注記について原亨吉 [15, p.206] が言及している。

[16] $\Delta = -(b^2)^3 + \frac{b^4d^2}{4} = b^4(-b^2 + \frac{d^2}{4}) < 0$ より還元不能な場合である。

[17] ヴィエトは、直角三角形の辺の長さを考察した。底辺が D、垂線が B、斜辺が Z の直角三角形の底角 (斜辺と底辺のなす角) を 3 倍にすると、底辺が $D^3 - 3B^2D$、垂線が $3BD^2 - B^3$、斜辺が Z^3 の直角三角形になる [17, p.422]。底角を θ として現代の記号で表すと、$\cos\theta = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{Z}}$, $\cos 3\theta = \frac{\mathrm{D}^3-3\mathrm{B}^2\mathrm{D}}{\mathrm{Z}^3}$ となるので、余弦の 3 倍角の公式 $4\cos^3\theta - 3\cos\theta = \dfrac{4\mathrm{D}^3 - 3\mathrm{Z}^2\mathrm{D}}{\mathrm{Z}^3} = \dfrac{\mathrm{D}^3 - 3\mathrm{B}^2\mathrm{D}}{\mathrm{Z}^3} = \cos 3\theta$ が得られる。

$x^3-300x=432$ または $300x-x^2=432$[の正根を求める]。2 つの直角三角形があり、その共通の斜辺は $[b=]10$ である。最初の三角形の垂線に対する角 [斜辺と底辺のなす角] は 2 番目の角 [θ とおく] を 3 倍したものである。最初の三角形の底辺の 2 倍である d は $\frac{432}{100}$ に等しい。これより、$\cos 3\theta [= \frac{d}{2b}] = \frac{432}{2000}$ である。[$3\theta = 77°31'$ より $\theta = 25°50'$ なので、] $\cos\theta = 0.9$ より $x = 20 \times 0.9 = 18$ である。

共通の斜辺は 10, 2 番目の三角形の底辺は 9, 垂線は $\sqrt{19}$ である。最初の三角形の斜辺は 10, 底辺は $2\frac{16}{100}$ である。$x=-18$ は $300x-x^3=432$ をみたすので、x は $9+\sqrt{57}$ または $9-\sqrt{57}$ である[18]。 [26, p.12]

ヴィエトは図をつけてないので、図 2 はジラールの作図法を参考に作成した。最初の直角三角形は △ACO, 第 2 の直角三角形は △ADO である。2 つの三角形の斜辺は共通で $AO=10$ である。$\angle\mathrm{OAC}=3\theta, \angle\mathrm{OAD}=\theta$ にとる。最初の直角三角形の底辺は $AC=\frac{d}{2}=2\frac{16}{100}$, 第 2 の直角三角形の底辺は $AD=9$, 垂線は $DO=\sqrt{19}$ である。$x=AF$ が求める根である。

$p=3b^2, q=b^2d$ とおき、ジラールの作図法に対応させる。図 2 において、半径 $AO=\sqrt{\frac{p}{3}}=b$, $AE=2AC=\frac{q}{\frac{p}{3}}=d$ なので、5 節で示すように、AF は $x^3-3b^2x=b^2d$ の根になる。

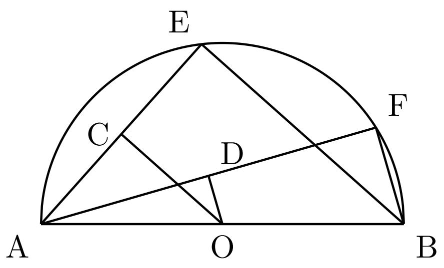

図 2. ヴィエトの例題

§ 5. ジラール

1629 年アルベール・ジラール (Albert Girard) は、『代数学の新しい発見』*Invention nouvelle en l'algèbre*[14] で還元不能でないときは、ボンベッリと同様の方法で 2 項式の立方根を抽出し、還元不能な場合には三角法を用いて 1 根を求め残りの 2 根は割り算により 2 次方程式に還元させた。

$x^3=13x+12$ とする。

x の係数の三分の一は $4\frac{1}{3}$ であるので、その平方根 [の 10000 倍] は 20816 であ

[18] $x^3-300x=432$ の他の 2 根は負であるので、$-x^3+300x=432$ の正根を求める。$-x^3+300x-432$ を $x+18$ で割り $-x^2+18x-24=0$ を解いて残りの 2 正根は $9+\sqrt{57}, 9-\sqrt{57}$ である。

る[19]。[$4\frac{1}{3}$ と 20816 の] 積は 90203 で除数とする。

x^0 の係数の半分は 6 である。[100000 倍した]600000 を被除数とする。被除数を除数で割った商 [の 10000 倍] は 66515 である。正弦 [が 0.66515 となる角は] $41°41'37''$ である。[正弦の符号を負にするため]$180°$ を加えると $221°41'37''$ となる。その $\frac{1}{3}$ は $73°53'52''$ でその正弦 [の 100000 倍] は 96078 である。その 2 倍は 192156 である。20816[$= \sqrt{4\frac{1}{3}} \times 10000$] を掛けると、結果は 400000 である。400000 を 100000 で割った 4 が x である[20]。

$x^3 = 13x + 12$ を $x = 4$ で割ると $x^2 = 4x - 3$ となり、[根は]-3 と -1 である。つまり必要な値は $4, -3, -1$ の 3 つである。 [14]

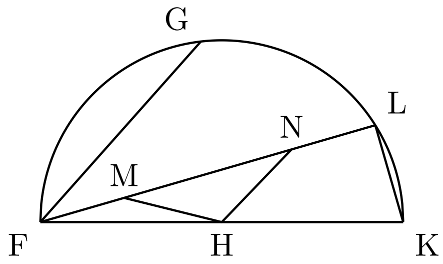

図 3. ジラールによる根の作図

ジラールは引き続き、$x^3 = px + q, (p = 13, q = 12)$ を例に取り 3 実根の作図法を与えた (図 3 参照)。原亨吉による要約を引用する。

> 半径が $\sqrt{p/3}$ に等しい半円 H において、$q/\frac{p}{3}$ に等しく弦 FG をとり、残る弧 $\overset{\frown}{\mathrm{GK}}$ の 1/3 を張る弦を、[幾何学的に双曲線を用いて] 作図する。この KL を半径として同じ円弧を描き、弦 FL との交点を M, N とすれば、求める根の値は $FL, -FN, -FM$ に等しい。 [15, p.207]

ジラールは証明を与えておらず、30 年後にスホーテンが与えるのであるが、ここでは現代の記法を用いて証明しておく。

$\angle\mathrm{GFK} = 3\theta$ とおくと、$\angle\mathrm{LFK} = \theta$ で、作り方から $0° < \theta < 30°$ である。そして、

$$\cos 3\theta = \frac{FG}{FK} = \frac{q/\frac{p}{3}}{2\sqrt{\frac{p}{3}}} = \frac{q}{2\frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}}$$

[19] 10000 倍するのは、小数計算を有効桁数 5 桁の整数計算に置き換えるためである。

[20] 現代の記法で表す。$x^3 = 13x + 12$ に対し、$x = 2r\sin\theta$ とおくと、$8r^3\sin^3\theta - 2\times 13r\sin\theta - 12 = 0$ である。$8r^3$ で割り、$\sin^3\theta - \frac{13}{4r^2}\sin\theta - \frac{3}{2r^3} = 0$ を正弦の 3 倍角の公式 $\sin^3\theta - \frac{3}{4}\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 3\theta = 0$ にあてはめる。$\frac{13}{4r^2} = \frac{3}{4}$ より、$r = \sqrt{\frac{13}{3}}$ となる。$\frac{1}{4}\sin 3\theta = -\frac{3}{2r^3}$ より、$\sin 3\theta = -\frac{6}{r^3} = -0.665147$ を解くため、正弦表で $\sin\tau = 0.665147$ となる τ を求めると、$\tau = 41°41'37''$ である。$3\theta = \tau + 180°$ より、180 を加えた $221°41'37''$ を 3 で割り $\theta = 73°53'52''$ である。$x = 2r\sin\theta = 2\times 2.0816\times 0.96078 = 3.9999$ となる。

となる。また、$KL = FK\sin\theta = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\sin\theta$ である。

$$FL = \sqrt{FK^2 - KL^2} = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\sqrt{1-\sin^2\theta} = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\theta$$

よって、

$$FL^3 - pFL - q = 8\frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}\cos^3\theta - 2p\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\theta - q$$
$$=8\frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}\left(\cos^3\theta - \frac{3}{4}\cos\theta - \frac{q}{8\frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}}\right) = 8\frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}\left(\cos^3\theta - \frac{3}{4}\cos\theta - \frac{1}{4}\cos 3\theta\right) = 0$$

H を原点、F, K を x 軸上にとる。M, N の x 座標をそれぞれ x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ とすると、

$$FM = \frac{x_1 + \sqrt{\frac{p}{3}}}{\cos\theta}, \quad FN = \frac{x_2 + \sqrt{\frac{p}{3}}}{\cos\theta}$$

となる。H を中心、半径 $KL = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\sin\theta$ の円の方程式は $x^2 + y^2 = \frac{4}{3}p\sin^2\theta$ で、FL の方程式は $y = (x + \sqrt{\frac{p}{3}})\tan\theta$ である。x_1, x_2 は

$$x^2 + \left(x + \sqrt{\frac{p}{3}}\right)^2\tan^2\theta = \frac{4}{3}p\sin^2\theta$$

の 2 根である。整理すると、

$$\left(x + \sqrt{\frac{p}{3}}\right)^2 - 2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos^2\theta\left(x + \sqrt{\frac{p}{3}}\right) + \left(\frac{p}{3} - \frac{4}{3}p\sin^2\theta\right)\cos^2\theta = 0$$

$x + \sqrt{\frac{p}{3}}$ について解くと

$$x + \sqrt{\frac{p}{3}} = \sqrt{\frac{p}{3}}\cos^2\theta \pm \sqrt{\frac{p}{3}\cos^4\theta - \frac{p}{3}\cos^2\theta + \frac{4}{3}p\sin^2\theta\cos^2\theta}$$
$$=\sqrt{\frac{p}{3}}\cos^2\theta \pm \sqrt{p}\cos\theta\sin\theta$$

となる。よって、FM, FN は

$$\frac{x + \sqrt{\frac{p}{3}}}{\cos\theta} = \sqrt{p}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta \pm \sin\theta\right)$$

となる。$-FM, -FN$ が $x^3 - px - q = 0$ の根であることは

$$\left(-\frac{x + \sqrt{\frac{p}{3}}}{\cos\theta}\right)^3 - p\left(-\frac{x + \sqrt{\frac{p}{3}}}{\cos\theta}\right) - q$$
$$= -p\sqrt{p}\left(-\frac{8}{3\sqrt{3}}\cos^3\theta + \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta\right) - 2\frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}\cos 3\theta$$
$$=\frac{8p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}\left(\cos^3\theta - \frac{3}{4}\cos\theta - \frac{1}{4}\cos 3\theta\right) = 0$$

によりいえた。以上より $FL, -FM, -FN$ の符号付きの長さが 3 根である。

§6. スホーテン

フランス・ファン・スホーテン (Frans van Schooten) はルネ・デカルト (René Descartes) の『幾何学』*La geometrie* ラテン語訳第 2 版 (1659) の付録に自身が執筆した「3 次方程式の解についての付録」*Appendix de cubicarum æquationum resolutione* [6, pp.345-368] を付け、さらに追加として「2 項式の [立方] 根をもつ任意の 2 項式から任意の [立方] 根を抽出するための一般的規則」(*Regula generalis extrahendi quaslibet radices ex quibuscunque Binomiis, radicem binomiam habentibus* [6, pp.389-400]) を収録した。前者では、ジラールの角の三等分などについて詳しい解説を行い、後者ではボンベッリの 2 項式の立方根抽出の方法を拡張した。本節では、後者について述べる。

スホーテンの $\sqrt[3]{\sqrt{242}+12\frac{1}{2}}$ の抽出に関する部分を抜粋する。

> まず、与えられた二項式に分数が見つかった場合、二項式に分母を掛けて分数を取り出さなければならない。たとえば、$\sqrt{242}+12\frac{1}{2}$ を抽出するには、二項式に 2 を掛けると $\sqrt{968}+25$ になる。
>
> [中略]
>
> $25+\sqrt{968}$ の立方根[21]を求めるには、まず 968 から 25 の 2 乗である 625 を引くと、343 が残り、その立方根は 7 である。
>
> [中略]
>
> $\sqrt{968}$ は 31 より大きく 32 より小さい値である。次に、有理数部分[22] 25 に 31 または 32 を加えると、合計は 56 または 57 になる。そこから立方根を抽出する。これは実際には 4 未満であるが、$3\frac{1}{2}$ よりも大きくなる。したがって、4 は目的の有理数であり、真の [立方] 根よりも少し大きくなる。次に、4 から $\frac{7}{4}$ (つまり、[有理数部分と無理数部分] の二乗の差の立方根 7 を、求めた [立方] 根 4 で割ったものである) を引くと $2\frac{1}{4}$ が残る。整数部分 25 は $\sqrt{968}$ より小さいので、ここで減算する。もしそれがもっと大きかったら、それは加算する。しかし、$2\frac{1}{4}$ に含まれる最大の整数は 2 であり、その半分は根の有理数部分である 1 である。1 の 2 乗に、2 乗部分の差の立方根である 7 を足すと、残りの部分の 2 乗である 8 になる。したがって、$1+\sqrt{8}$ は $25+\sqrt{968}$ の立方根である。もちろん、そこから立方根を抽出できる場合であるが。
>
> [中略]
>
> したがって、$\sqrt[3]{\sqrt{242}+12\frac{1}{2}}$ を抽出するために 2 を掛けた二項式の立方根が $1+\sqrt{8}$ であることが分かった。$1+\sqrt{8}$ を $\sqrt[3]{2}$ で割ると、$\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\sqrt[6]{128}}$ となり、$\sqrt{242}+12\frac{1}{2}$ の立方根である。 [6, pp.389-394]

[21] スホーテンは有理数部分と無理数部分の和の順序は問題にしていない。

[22] 原文は 'numerum absolutum'(絶対数) である。

スホーテンは、$20+\sqrt{392}$ に対し文字式を用いて証明[23]をおこなった [6, pp.395-396]。上記の例の第 3 段落に当てはめる。

a を整数、bc を正の有理数とし、$\sqrt[3]{\sqrt{968}+25}=\sqrt{bc}+a$ とすると[24]、$\sqrt[3]{\sqrt{968}-25}=\sqrt{bc}-a$ と表せる。

$$7=\sqrt[3]{968-625}=(\sqrt{bc}+a)(\sqrt{bc}-a)=bc-a^2$$

である。$31<\sqrt{968}<32$ より、$(3\frac{1}{2})^3<56=31+25<\sqrt{968}+25<32+25=57<4^3$ なので

$$3\tfrac{1}{2}<\sqrt[3]{\sqrt{968}+25}<4$$

である。$\sqrt{bc}+a\approx 4$ とすると

$$\sqrt{bc}-a=\frac{bc-a^2}{\sqrt{bc}+a}\approx\frac{7}{4}$$

より $2a=(\sqrt{bc}+a)-(\sqrt{bc}-a)\approx 4-\frac{7}{4}=2\frac{1}{4}$ となる。a は整数だから $a=1$ となり、$bc-a^2=7$ より $bc=8$ となる[25]。したがって、$\sqrt[3]{\sqrt{968}+25}=1+\sqrt{8}$ より、

$$\sqrt[3]{\sqrt{242}+12\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\sqrt[3]{\sqrt{968}+25}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}(1+\sqrt{8})=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}+\sqrt[6]{128}$$

が得られた。

スホーテンの方法は、2 項式を定数倍して「自然数 $+\sqrt{\text{自然数}}$」としたとき、その立方根を抽出した結果がふたたび「自然数 $+\sqrt{\text{自然数}}$」となる場合に使えるので、適用範囲がボンベッリの方法から大きく広がった、スホーテンは、上記の方法は 2 項式の p 乗根 (p は素数) の抽出にも使えると述べている。なおスホーテンは、$bc<0$ の場合 (還元不能な場合) は扱ってない。

§7.　ニュートン

1669-70 年にアイザック・ニュートン (Isaac Newton) は「ゲラルド・キンフイセンの代数学についての批評」(以下「批評」と略す) *In Algebram Gerardi Kinckhuysen Observationes* [28, pp.364-447] において虚数の 2 項式の立方根抽出のアルゴリズムを与えた。

---

23 $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}$ 算出の箇所は、原亨吉 [15, p.209] による翻訳がある。

24 根号の中を bc としたのは、ヴィエト由来の斉次冪の法則である。

25 近似計算を用いずに現代的に示す。$bc-a^2=7$ と $3\frac{1}{2}<\sqrt[3]{\sqrt{968}+25}=\sqrt{bc}+a<4$ より、

$$\tfrac{7}{4}<\sqrt{bc}-a=\frac{bc-a^2}{\sqrt{bc}+a}<2$$

より $\frac{7}{2}-2<2a<4-\frac{7}{4}$ となる。$\frac{3}{4}<a<\frac{9}{8}$ である。a は整数だから $a=1$ となり、$bc-a^2=7$ より $bc=8$ である。

ニュートンは、立方根の抽出を 2 つの例題 $\sqrt[3]{-2+\sqrt{-121}}$ と $\sqrt[3]{10-\sqrt{-243}}$ を用いて行った。ここでは例題のアルゴリズムを一般化する。2 項式を $C\sqrt{D}+A\sqrt{-B}$ とする[26]。ここで、A, C は整数、B, D は自然数、C^2D+A^2B は立方数で、B は平方数の因数を持たないとする。さらに、2 項式の立方根を抽出した結果が整数または半整数 a と c により

$$\sqrt[3]{C\sqrt{D}+A\sqrt{-B}} = c + a\sqrt{-B}$$

と表せるものとする。$M = 4\sqrt[3]{C^2D+A^2B}$ とおき、$n^2B < M$ の範囲の自然数 n で $M - n^2B$ が平方数となるものをとり、立方根を

$$\pm\frac{1}{2}\sqrt{M-n^2B} \pm \frac{n}{2}\sqrt{-B} \quad (\text{複号任意})$$

の中から探す。複号についてニュートンは

> しかし，符号に関しては，どちらの二項（すなわち提案されたものと発見されたもの）でも純粋な[27][実数]（不純な [虚数]）部分は，取り出された積の 3 倍 (3 分の 1) が残された場合の二乗より小さいと，同じものになることに注意。
>
> [28, pp.394-395]

と注意しているが､我々の記号で表すと以下のようになる。$(\frac{1}{2}\sqrt{M-n^2B})^2 > 3(\frac{n}{2}\sqrt{B})^2$ のとき、$\pm\frac{1}{2}\sqrt{M-n^2B}$ は C と同符号にとり、$(\frac{1}{2}\sqrt{M-n^2B})^2 > \frac{1}{3}(\frac{n}{2}\sqrt{B})^2$ のとき、$\pm\frac{n}{2}\sqrt{-B}$ は A と同符号にとる。

例 1. $-2+\sqrt{-121}$ の立方根は $-2+\sqrt{-1}$ である。
準備 $-2+\sqrt{-121} = -2+11\sqrt{-1}$
$(-2)^2-(\sqrt{-121})^2 = 4-(-121) = 125$
$4\times\sqrt[3]{125} = 4\times 5 = 20$

	-1 との積	20 からの差	両者の平方根	試すべき 2 項式
1	-1	19	*	
4	-4	16	$\sqrt{-4},\ 4$	$+\sqrt{-1},\ -2$
9	-9	11	*	
16	-16	4	$\sqrt{-16},\ 2$	$-\sqrt{-4},\ +1$

19 と 11 は平方数でないので棄却し、他の 16 と 4 から $-2+\sqrt{-1}$ と $1-\sqrt{-4}$ を

[26]ニュートンは説明のところでは $A\sqrt{-B}+C\sqrt{D}$ としているが、例題では実部を先に書いているので、例題の順に入れ替える。

[27]原文は ‘partes puræ’(純粋な部分) と ‘partes impuræ’(不純な部分) である。$-2+\sqrt{-121}$ の純粋な部分は -2 で、不純な部分は $\sqrt{-121}$ である。

得る。これらのうち、$-2+\sqrt{-1}$ の立方は $-2+\sqrt{-121}$ となる[28]。

[28, pp.394-395]

ホワイトサイドが指摘 [28, p.394,(47)] しているように、ニュートンの方法は、抽出した立方根の実部が整数または半整数で $\sqrt{-B}$ の係数も整数または半整数と仮定しているので、残り 2 つの立方根

$$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}(-2+\sqrt{-1}) = \frac{(2-\sqrt{3})-(1+2\sqrt{3})\sqrt{-1}}{2}$$
$$\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}(-2+\sqrt{-1}) = \frac{(2+\sqrt{3})-(1-2\sqrt{3})\sqrt{-1}}{2}$$

は求められない。

例 2. $10-\sqrt{-243}$ の立方根は 3 つ、$-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{-3}, -2-\sqrt{-3}$ および $\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}$ である。
準備 $10-\sqrt{-243} = 10-9\sqrt{-3}$
$(10)^2-(\sqrt{-243})^2 = 100-(-243) = 343$
$4\times\sqrt[3]{343} = 4\times 7 = 28$

操作

1	-3	25	$\sqrt{-3}$	5	$-\frac{1}{2}\sqrt{-3}+\frac{5}{2}$
4	-12	16	$\sqrt{-12}$	4	$-\sqrt{-3}-2$
9	-27	1	$\sqrt{-27}$	1	$+\frac{3}{2}\sqrt{-3}-\frac{1}{2}$

このように発見した 3 つの 2 項式を立方して、それらすべてが $10-\sqrt{-243}$ となることがわかり、それらを [立方] 根と結論づける[29]。

3 つの立方根の実部は整数または半整数で、虚部は整数または半整数の $\sqrt{3}$ 倍なので求められている。3 つの立方根には

$$\frac{5-\sqrt{-3}}{2} = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}(-2-\sqrt{-3}), \quad \frac{-1+3\sqrt{-3}}{2} = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}(-2-\sqrt{-3})$$

の関係がある。

ニュートンは例題を用いてアルゴリズムを提示しただけで、証明をつけてない。また、『ニュートン数学論文集』[28] にも証明はないので、現代的に定式化して証明をつける。

[28] 上記の記号で $C=-2, D=1, A=11, B=-1, M=4\cdot 5=20$ である。表の見出しを一般的に書き直す。

n^2	$-n^2B$	$M-n^2B$	$\pm\frac{n}{2}\sqrt{-B}$	$\pm\frac{1}{2}\sqrt{M-n^2B}$	試すべき 2 項式
1	-1	19	*		
4	-4	16	$\pm\sqrt{-1}$	± 2	$-2+\sqrt{-1}$
9	-9	11	*		
16	-16	4	$\pm 2\sqrt{-1}$	± 1	$+1-2\sqrt{-1}$

[29] $C=10, D=1, A=-9, B=3, M=4\cdot 7=28$ である。本例のように $B=3$ の場合は、3 つの立方根すべてを求められることがある。

定理 (ニュートン) 2 項式を $C\sqrt{D}+A\sqrt{-B}$ とする。ここで、A,C は整数、B,D は自然数、C^2D+A^2B は立方数 E^3 で、B は平方数の因数を持たないとする。2 項式の立方根を抽出した結果が整数または半整数 a と c により

$$\sqrt[3]{C\sqrt{D}+A\sqrt{-B}}=c+a\sqrt{-B}$$

と表せるものとする。$M=4E$ とおくとき、$M-n^2B$ が平方数となる自然数 n が存在して、

$$|c|=\frac{1}{2}\sqrt{M-n^2B},\quad |a|=\frac{n}{2}$$

と表せる。c の符号は $c^2>3a^2B$ のとき C と同符号にとり、$c^2<3a^2B$ のとき C と異符号にとる。a の符号は $c^2>\frac{1}{3}a^2B$ のとき A と同符号にとり、$c^2<\frac{1}{3}a^2B$ のとき A と異符号にとる。

証明 $\sqrt[3]{C\sqrt{D}+A\sqrt{-B}}=c+a\sqrt{-B}$ の共役複素数をとると、$\sqrt[3]{C\sqrt{D}-A\sqrt{-B}}=c-a\sqrt{-B}$ となる。$\sqrt[3]{C\sqrt{D}+A\sqrt{-B}}\sqrt[3]{C\sqrt{D}-A\sqrt{-B}}=\sqrt[3]{C^2D+A^2B}=E$ と $c^2+a^2B=(c+a\sqrt{-B})(c-a\sqrt{-B})$ より

$$c^2+a^2B=E \tag{7.1}$$

である。a は整数または半整数だから自然数 n が存在して $a=\pm\frac{n}{2}$ と書ける。(7.1) より、$4c^2+n^2B=4E$ であるので、n は $n^2B<M$ をみたす。そして、$c=\pm\frac{1}{2}\sqrt{M-n^2B}$ と表せる。a と c の複号はそれぞれ、いずれか一方を取る。
$\sqrt[3]{C\sqrt{D}+A\sqrt{-B}}=c+a\sqrt{-B}$ の両辺を 3 乗すると $C\sqrt{D}+A\sqrt{-B}=c^3-3ca^2B+(3c^2a-a^3B)\sqrt{-B}$ である。よって、

$$C\sqrt{D}=c(c^2-3a^2B)$$
$$A=3a(c^2-\tfrac{1}{3}a^2B)$$

より、$c^2-3a^2B>0$ のとき c は C と同符号、$c^2-3a^2B<0$ のとき c は C と異符号である。$c^2-\frac{1}{3}a^2B>0$ のとき a は A と同符号、$c^2-\frac{1}{3}a^2B<0$ のとき a は A と異符号である。 □

C^2D+A^2B が立方数でない場合、すなわち $C^2D+A^2B=E^3F$(E は整数、F は自然数) のとき、$\sqrt[3]{CF\sqrt{D}+AF\sqrt{-B}}=c+a\sqrt{-B}$ となる整数または半整数 a と c が存在すると仮定する。$C^2F^2D+A^2F^2B=E^3F^3$ であるので、$EF=\sqrt[3]{C^2F^2D+A^2F^2B}=\sqrt[3]{CF\sqrt{D}+AF\sqrt{-B}}\sqrt[3]{CF\sqrt{D}-AF\sqrt{-B}}=c^2+a^2B$ となる。a は整数または半整数なので、自然数 n により $a=\pm\frac{n}{2}$ と表される。$M=4EF$ とおくと、$M=(2c)^2+n^2B$ となるので、$c=\pm\frac{1}{2}\sqrt{M-n^2B}$ である。$M-n^2B$ が平方数となれば、

$$\pm\frac{1}{2\sqrt[3]{F}}\sqrt{M-n^2B}\pm\frac{n}{2\sqrt[3]{F}}\sqrt{-B}$$

が試すべき $\sqrt[3]{C\sqrt{D}+A\sqrt{-B}}$ の立方根である[30]。複号は定理と同様に決定する。

[30]ホワイトサイドが脚注 [28, p.394,(45)] に記している。

ニュートンが「批評」に自分の名前を出すのを嫌がったため [27, I,p.241] か、当時の出版事情のせい [23, pp.52-53] かは分からないが、キンフイセン『代数学』のメルカトールによるラテン語訳は出版されなかったので、その解説である「批評」も出版されなかった。ニュートンは、ルーカス教授職の「代数学講義」[29][31](ca.,1684) では、「批評」の終結式などの結果は発展させ収録したが、立方根の抽出については記載しなかった。その理由を「代数学講義」でカルダーノの公式を説明するのに先立ち

> 本当はここで、この方法 [冪根の抽出] の構成について述べておかなければならないが、このような還元を行う用途は極めて少ないし、その実践に最も役立つ技術を開発するというより、この方法の可能性を明らかにしたかったので、ここでは割愛することにする。 [29, pp.408-409]

と記している。

§8. ド・モアブル

§8.1. ド・モアブルの定理

アブラーム・ド・モアブル (Abraham de Moivre) は、彼の名前がついた定理

$$(\cos\phi + \sqrt{-1}\sin\phi)^n = \cos n\phi + \sqrt{-1}\sin n\phi \tag{8.1}$$

を陽に与えてはないが、1722 年の「角の分割」*De Sectione Anguli*[21] では整数 n に対し、(8.1) が導ける式を与えた。

> 単位円において x を任意の弧の正矢(せいし)$[1-\cos\phi]$ とし、t を別の正矢とせよ。前者と後者の弧は $1:n$ とせよ。[つまり、$x = 1-\cos\phi, t = 1-\cos n\phi$ とせよ。] そこで
>
> $$1 - 2z^n + z^{2n} = -2z^n t \text{ と } 1 - 2z + z^2 = -2zx$$
>
> という既知と思われる 2 つの方程式を仮定し、z を消去すると、x と t の関係が決まる方程式が生じることになる。 [21, p.229][24, p.445]

$x = 1-\cos\phi$ と $t = 1-\cos n\phi$ を 2 つの方程式に代入すると

$$1 - 2\cos n\phi\cdot z^n + z^{2n} = 0 \tag{8.2}$$

$$1 - 2\cos\phi\cdot z + z^2 = 0 \tag{8.3}$$

となる。(8.2) より

$$z^n = \cos n\phi \pm \sqrt{\cos^2 n\phi - 1} = \cos n\phi \pm \sqrt{-1}\sin n\phi$$

[31] 1707 年にニュートンの後任のルーカス教授職ウイリアム・ウィストン (William Whiston) によってほぼそのまま『普遍算術』*Arithmetica Universalis* として出版された、

となり、(8.3) より

$$z = \cos\phi \pm \sqrt{\cos^2\phi - 1} = \cos\phi \pm \sqrt{-1}\sin\phi$$

となる。z を消去すると

$$(\cos\phi \pm \sqrt{-1}\sin\phi)^n = \cos n\phi \pm \sqrt{-1}\sin n\phi, \quad \text{(複号同順)}$$

が導ける [24, p.445]。このことが「ド・モアブルの定理」の名前の由来と思われる。

§ 8.2. 2 項式の立方根 $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}$ の抽出

ド・モアブルは 1738 年「冪根の単純な項への還元、あるいは任意の 2 項式 $a+\sqrt{+b}$ または $a+\sqrt{-b}$ の [冪] 根の抽出」*De Reductione Radicalium ad simpliciores terminos, seu de extrahenda radice quacunque data ex Binomio* $a+\sqrt{+b}$*, vel* $a+\sqrt{-b}$.[22] において、2 項式の立方根の抽出を還元不能な場合も含め解決した。この論文では、4 つの問題が扱われている。そのうち第 1 問「2 項式 $\sqrt[n]{a+\sqrt{b}}$ をより簡単な項にまとめる」で立方根 $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}$ の抽出が扱われている。例題を 2 題 $\sqrt[3]{45+\sqrt{1682}}$, $\sqrt[3]{170+\sqrt{18252}}$ 取り上げているが、いずれも $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}} = x+\sqrt{y}$ の x, y が整数になる問題である。x を求めるのに、数値計算を用いている。

例 2

$\sqrt[3]{45+\sqrt{1682}}$ を単純にする。
$a = 45, b = 1682$ なので、近似的に $\sqrt{b} = 41.01219$ である。$a+\sqrt{b} = 86.01219, a-\sqrt{b} = 3.89781$ の立方根 $4.4142, 1.5857$ の和は 5.9999 であり、整数 6 に最も近い。$2x = 6$ より $x = 3$ である。$y = x^2 - m$ で $m = \sqrt[3]{a^2-b} = \sqrt[3]{343} = 7$ より、$y = 9 - 7 = 2$, したがって、簡約された二項式は $3+\sqrt{2}$ である。 [22, p.465]

ド・モアブルの 2 つの例はボンベッリが扱った問題と同様に抽出した結果が $x+\sqrt{y}$ (x は整数, y は自然数) となる問題であるが、x, y が無理数であっても適用可能である[32]。

§ 8.3. 虚数の 2 項式の立方根 $\sqrt[3]{a+\sqrt{-b}}$ の抽出

第 2 問「不可能な 2 項式 $a+\sqrt{-b}$ の立方根の抽出」では虚数の 2 項式の立方根 $\sqrt[3]{a+\sqrt{-b}}$ の抽出が扱われている。

$$\sqrt[3]{a+\sqrt{-b}} = x + \sqrt{-y} \tag{8.4}$$

[32] たとえば、$\sqrt[3]{22+\sqrt{486}}$ に適用する。
$22+\sqrt{486} = 44.045407, 22-\sqrt{486} = -0.045407$ より $\sqrt[3]{22+\sqrt{486}} = 3.531562$, $\sqrt[3]{22-\sqrt{486}} = -0.356760$ の和をとると、$2x = 3.174802$ であるので、$x = 1.587401$ である。$m = \sqrt[3]{22^2-486} = -\sqrt[3]{2} = -1.259921$ より、$y = x^2 - m = 3.779763$ となる。$\sqrt[3]{22+\sqrt{486}} = 1.587401 + \sqrt{3.779763}$ と抽出できる。実は、$x^3 = 3.999999, y^3 = 53.99999$ より、$\sqrt[3]{22+\sqrt{486}} = \sqrt[3]{4} + \sqrt[6]{54}$ である。

とおく。ここで、x は有理数、y は正の有理数である。(8.4) の両辺を 3 乗し、[実部および虚部 $\times\sqrt{-1}$ を] 比較すると、

$$x^3 - 3xy = a \tag{8.5}$$

$$3x^2\sqrt{-y} - y\sqrt{-y} = \sqrt{-b} \tag{8.6}$$

となる。(8.5) の 2 乗から (8.6) の 2 乗を減じると

$$x^6 + 3x^4y + 3x^2y^2 + y^3 = a^2 + b$$

となり、その立方根 $x^2 + y = \sqrt[3]{a^2+b}$ を m とおく。$y = m - x^2$ を (8.5) に代入すると、

$$4x^3 - 3mx = a \tag{8.7}$$

である。[(8.7) の根は

$$x = \sqrt[3]{\frac{a}{8} + \sqrt{\frac{a^2}{64} - \frac{m^3}{64}}} + \sqrt[3]{\frac{a}{8} - \sqrt{\frac{a^2}{64} - \frac{m^3}{64}}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{a+\sqrt{-b}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{-b}}\right)$$

より、](8.7) は $2x = \sqrt[3]{a+\sqrt{-b}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{-b}}$ から導かれる方程式と同じものである。

> しかし、方程式 $4x^3 - 3mx = a$ の x を前者 [$2x = \sqrt[3]{a+\sqrt{-b}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{-b}}$] から見出すことはできない。というのは、それは虚量 $\sqrt{-b}$ を含む 2 つの部分から構成されているので。これは正弦表 [三角関数表] によって行うのが最も良い方法であろう。
>
> それゆえ、2 項式 $81 + \sqrt{-2700}$ から立方根を抽出するとする。$a = 81, b = 2700$ とおくと $a^2 + b = 6561 + 2700 = 9261[= 21^3]$ より、$m = 21$ となり $3mx = 63x$ である。よって、解かれる方程式は $4x^3 - 63x = 81$ である。余弦に対する方程式 [余弦の 3 倍角の公式]、すなわち $4x^3 - 3r^2x = r^2c$ と比較して $r^2 = 21$ より $r = \sqrt{21}$ なので $c = \frac{a}{r^2} = \frac{81}{21} = \frac{27}{7}$ である。[...]
>
> 弧 A の余弦が $\frac{27}{7\sqrt{21}}[= 0.841697]$ となるのはおよそ $32°42'$ である[33]。[C を円周とすると、] $C - A[= 360° - A] = 327°18'$ で $C + A[= 360° + A] = 392°42'$ で、それぞれ [$A, C - A, C + A$] の三分の一は $10°54', 109°6', 130°54'$ である。
>
> これらの最初のものは四分円 [90°] より小さいので、その余弦、すなわち $79°6'[= 90° - 10°54']$ の正弦は正と考えられる。そして他の 2 つは四分円より大きいので、それらの余弦、すなわち $19°6'[= 109°06' - 90°], 40°54'[= 130°54' - 90°]$ の弧の正弦は負である。
>
> 余弦の $\sqrt{21}$ 倍はそれぞれ $4.4999,\ -1.4999,\ -3.000$ すなわち、$\frac{9}{2},\ -\frac{3}{2},\ -3$ である。$m - x^2$ は $21 - \frac{81}{4},\ 21 - \frac{9}{4},\ 21 - 9$ すなわち、$\frac{3}{4},\ \frac{75}{4},\ 12$ なので平方根は

[33] $\cos 32°42' = 0.8415$ である。

$\frac{1}{2}\sqrt{3},\ \frac{5}{2}\sqrt{3}, 2\sqrt{3}$ である。それゆえ、$\sqrt{-y}$ の値は $\frac{1}{2}\sqrt{-3},\ \frac{5}{2}\sqrt{-3},\ 2\sqrt{-3}$ である。したがって、$\sqrt[3]{81+\sqrt{-2700}}$ の値は、$\frac{9}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3},\ -\frac{3}{2}-\frac{5}{2}\sqrt{-3},\ -3+2\sqrt{-3}$ である。同様にして、$\sqrt[3]{81-\sqrt{-2700}}$ の 3 つの値は、$\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3},\ -\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\sqrt{-3},\ -3-2\sqrt{-3}$ である[34]。 [22, pp.473-474][24, pp.447-449]

現代の記法で表すと、$r=\sqrt{m}, c=\frac{a}{m}$ とおくと (8.7) は

$$4\left(\frac{x}{r}\right)^3-3\left(\frac{x}{r}\right)=\frac{c}{r} \tag{8.8}$$

となる。$0<\frac{c}{r}<1$ より[35]、$\cos A=\frac{c}{r}$ とおき、余弦の 3 倍角の公式

$$4\cos^3\frac{A}{3}-3\cos\frac{A}{3}=\cos A$$

に当てはめると $\cos\frac{A}{3}=\frac{x}{r}$ となる。$\cos A=\frac{c}{r}$ となる $0^\circ<A<90^\circ$ を余弦表で求め、$A,\ 360^\circ-A,\ 360^\circ+A$ をそれぞれ三等分し 3 つの立方根の実部を

$$x=\sqrt{m}\cos\frac{A}{3},\ x=\sqrt{m}\cos\frac{360^\circ-A}{3},\ x=\sqrt{m}\cos\frac{360^\circ+A}{3}$$

とし、虚部は $y=m-x^2$ により計算する[36]。

ド・モアブルの方法は、x,y を数値的に求めるので、立方根の 1 つの実部が整数あるいは半整数であれば正確に抽出できるが、複雑な無理式の場合は近似値としてしか求められない。とはいえ、2 項式 $a+\sqrt{b}, a+\sqrt{-b}$ の立方根を抽出する問題は登場から 200 年経って解決された。3 次方程式 (8.7)[37] にヴィエトの方法を適用し、さらに $\cos A=\cos(360^\circ-A)=\cos(360^\circ+A)$ を用いて $a+\sqrt{-b}$ の 3 つの立方根の実部を得て、虚部は $y=m-x^2$ から求める工夫が功を奏した。

§9. オイラー

§9.1. 1 の原始 3 乗根を用いたカルダーノの公式

実数係数の 3 次方程式

$$x^3+px+q=0$$

[34] ド・モアブルは $-3+2\sqrt{-3}, -3-2\sqrt{-3}$ をそれぞれ $-3+\frac{1}{2}\sqrt{-3}, -3-\frac{1}{2}\sqrt{-3}$ と誤っているが引用に際して訂正してある。本例の場合、ニュートンの抽出法 (7 節) でも 3 つづつ立方根を求めることができる。ボンベッリの抽出法 (3 節) では、$-3+2\sqrt{-3}, -3-2\sqrt{-3}$ のみしか求められない。

[35] $\sqrt[3]{a^2}<\sqrt[3]{a^2+b}=m$ より、$a<\sqrt{m^3}$ なので、$0<\frac{c}{r}=\frac{a}{\sqrt{m^3}}<1$ である。

[36] $y=m-m\cos^2\frac{A}{3}=m\sin^2\frac{A}{3}$ より、$\sqrt{-y}=\sqrt{m}\sin\frac{A}{3}\sqrt{-1}$ となる。したがって、$x+\sqrt{-y}=\sqrt{m}\left(\cos\frac{A}{3}+\sqrt{-1}\sin\frac{A}{3}\right)$ である。$\cos A=\frac{c}{r}=\frac{a}{m\sqrt{m}}$ より、$a=m\sqrt{m}\cos A$ で、$b=m^3-a^2=m^3-m^3\cos^2 A=m^3\sin^2 A$ なので、$a+\sqrt{-b}=m\sqrt{m}(\cos A+\sqrt{-1}\sin A)$ である。$x+\sqrt{-y}=\sqrt{m}\left(\cos\frac{A}{3}+\sqrt{-1}\sin\frac{A}{3}\right)$ は、$n=\frac{1}{3}$ として $a+\sqrt{-b}=m\sqrt{m}(\cos A+\sqrt{-1}\sin A)$ にド・モアブルの定理 (8.1) を適用したものになっている。他の 2 つの立方根は $\sqrt{m}\left(\cos(120^\circ\pm\frac{A}{3})+\sqrt{-1}\sin(120^\circ\pm\frac{A}{3})\right)$ である。

[37] ド・モアブルの (8.7) 式は、ボンベッリの $a, b, -m, -n$ がド・モアブルでは順に x, y, m, a であることに注意すれば、ボンベッリの (3.2) を (3.3) に代入すれば得られる。

の 3 根 x_0, x_1, x_2 は

$$x_j = \omega^j \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \omega^{2j} \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \quad j = 0, 1, 2 \tag{9.1}$$

と表される[38]。ここで、$\omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ は 1 の原始 3 乗根である。

1 の原始 3 乗根を用いたカルダーノの公式 (9.1) は最初にレオンハルト・オイラー (Leonhard Euler) が与えた。オイラーは 1733 年「方程式の根の形の予想」*De formis radicum aequationum cuiusque ordinis coniectatio*(E30) [9] をサンクトペテルブルグのアカデミーに提出し、1738 年アカデミーの紀要に掲載された。

> §3. 私は 3 次方程式の以下のような 2 次方程式に依拠する解法を考察しよう。3 次方程式をその第 2 項が欠けている $x^3 = ax + b$ とせよ。私はその根 x はある 2 次方程式 $z^2 = \alpha z - \beta$ の 2 つの根 A と B により $= \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ となるという。そのとき、方程式の性質 [根と係数の関係] より $A + B = \alpha, AB = \beta$ となるだろう。しかしながら、a と b から α と β を決定するため、3 乗すると $x^3 = A+B+3\sqrt[3]{AB}(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}) = 3x\sqrt[3]{AB}+A+B$ を与える方程式 $x = \sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}$ をとる。与えられた方程式 $x^3 = ax+b$ と比較することにより、$a = 3\sqrt[3]{AB} = 3\sqrt[3]{\beta}$ と $b = A+B = \alpha$ を与えるだろう。よって $\alpha = b$ と $\beta = \frac{a^3}{27}$ となり説明した方法で方程式 $x^3 = ax + b$ を解くための 2 次方程式は、$z^2 = bz - \frac{a^3}{27}$ となる[39]。その根 A と B がわかっているので、$x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ となるだろう。
>
> §4. しかし、任意の量の立方根は 3 つの値を持つので、式 $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ は、さらに与えられた方程式のすべての根を含むことになる。たとえば μ と ν を 1 の 3 乗根で、$\mu\nu = 1$ であるとすると、それは $x = \mu\sqrt[3]{A} + \nu\sqrt[3]{B}$ となるだろう[40]。結果として、μ と ν は $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ と $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ あるいは入れ替えたものである。それゆえ、与えられた方程式の根が $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ であれば他の 2 根は $x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{A} + \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{B}$ と $x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{A} + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{B}$ である。
>
> [9, pp.217-218][10, pp.2-3]

§ 9.2. 複素数の n 乗根

さらにオイラーは、1746 年に執筆し、1751 年ベルリンの科学アカデミー会誌に掲載された「方程式の虚根に関する研究」*Recherches sur les racines imaginaires des équations*(E170) [11] において、ド・モアブルの定理を陽に述べ、これを用いて一般の複素数 $a + \sqrt{-1}b$ の n 乗根を与えた。

---

[38] 現在では、(9.1) をカルダーノの公式と呼ぶこともある。

[39] オイラーは、§7 で $z^2 = bz - \frac{a^3}{27}$ を $x^3 = ax + b$ の分解方程式 'aeqatio resoluens' と呼んでいる。2 根 A, B は $\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}$ である。

[40] $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ が $x^3 = ax + b$ の根とすると、$3\sqrt[3]{AB} = a, A + B = b$ となる。$x_1 = \mu\sqrt[3]{A} + \nu\sqrt[3]{B}$ とおくと、$x_1^3 = \mu^3 A + \nu^3 B + 3\mu\nu\sqrt[3]{AB}(\mu\sqrt[3]{A} + \nu\sqrt[3]{B}) = A + B + 3\sqrt[3]{AB}(\mu\sqrt[3]{A} + \nu\sqrt[3]{B}) = ax_1 + b$ より、x_1 は $x^3 = ax + b$ の根になる。

定理 XIII

実数の [冪] 根、あるいは $M+\sqrt{-1}N$ の形の虚数の [冪] 根のどちらを取り出すにしても、[冪] 根は常に同じ $M+\sqrt{-1}N$ の形の実数、あるいは虚数のどちらかになる。

証明

根を取り出すべき累乗の指数を n とすると、$\sqrt[n]{a}$ か $\sqrt[n]{a+b\sqrt{-1}}$ のどちらかの値を考慮しなければならないことになる。$b=0$ ならば後者は前者に変化するので、数 n が何であれ、$\sqrt[n]{a+b\sqrt{-1}}$ が $M+\sqrt{-1}N$ という形に含まれることを証明する必要があるだろう。これを証明するために、その正接が $\frac{b}{a}$ となるような角度 ϕ を探すか、あるいは $\sqrt{aa+bb}=c$ と仮定して、その正弦が $\frac{b}{c}$、余弦が $\frac{a}{c}$ となるような角度 ϕ を取ってみよう。すると、$\cos\phi=\frac{a}{c}$ と $\sin\phi=\frac{b}{c}$ から、$a+\sqrt{-1}b=c(\cos\phi+\sqrt{-1}\sin\phi)$ となる。さて、$(\cos\phi+\sqrt{-1}\sin\phi)^m=\cos m\phi+\sqrt{-1}\sin m\phi$ は、それ $[m]$ が正か負か、整数か有理数か、あるいは無理数であるかにかかわらず、m の文字で示されるどんな数であっても示される。これにより、$(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a+b\sqrt{-1}}=c^{\frac{1}{n}}(\cos\phi+\sqrt{-1}\sin\phi)^{\frac{1}{n}}=(\cos\frac{1}{n}\phi+\sqrt{-1}\sin\frac{1}{n}\phi)c^{\frac{1}{n}}$ が得られる。したがって、$c=\sqrt{aa+bb}$ は実数で正の量だから、角度 ϕ もその部分 $\frac{1}{n}\phi$ とその正弦と余弦も実数で、$(a+\sqrt{-1}b)^{\frac{1}{n}}$ は $M+\sqrt{-1}N$ という形に属することは明らかである。

[11, p.260]

オイラーはド・モアブルの定理を用いて任意の複素数の n 乗根を極形式で与えた。これは 8.3 節で述べたド・モアブルの結果を今日用いられているように拡張したものである。ド・モアブルは 3 乗根に 3 つの偏角を与えたのに対し、オイラーは 1 つの 3 乗根 $\sqrt[3]{A}$ が既知のとき、残りの 3 乗根は $\omega\sqrt[3]{A},\omega^2\sqrt[3]{A}$ であることを述べているので、1 つの偏角のみを与えたと考えられる。

§10. おわりに

本論文では、還元不能な場合の 3 次方程式の解法と虚数の 2 項式の立方根の抽出を時間を追って述べた。その中で、ジラールによる還元不能な場合の 3 次方程式の 3 実根の作図法に新たに証明を与え、ニュートンによる虚数の 2 項式の立方根抽出法を新たに定式化し証明を行った。

当該テーマについて、カルダーノからオイラーまでの著しい業績は次のようである。3 次方程式に還元不能な場合が存在することは、カルダーノの公式により明らかになった。還元不能な場合にカルダーノは、公式は適用せずに定数項の符号を変えた方程式の正根が求められる場合に、この正根を用いて求める方程式の根を求めた。ボンベッリは複素数を導入し、ある種の条件のもとではあったが、虚数の 2 項式の立方根の抽出法を与えた。またボンベッリは角の三等分の問題を還元不能な場合の 3 次方程式の解法に帰着させたが、このことを記載した『代数学』V 巻は 20 世紀になるまで出版されなかった。

ボンベッリ以降、還元不能な場合の 3 次方程式の解法は、2 項式の立方根の抽出による方法と角の三等分あるいは三角法 (3 倍角の公式や数表など) を用いる方法の 2 方面から研究された。ヴィエトは角の三等分あるいは三角法を用いて 1 つの正根を求め、残り 2 つの負根の絶対値を除算により 2 次方程式に帰着して求めた。ジラールは、角の三等分を用いた 3 実根の作図法を証明をつけずに与えた。スホーテンは、実の 2 項式の立方根の抽出法を改良し、ジラールの作図法に幾何学的証明をつけたが、虚数の 2 項式の立方根の抽出は行ってない。虚数の 2 項式の立方根の抽出法はニュートンが改良したが、『ニュートン数学論文集』に掲載されるまで 300 年間出版されなかった。

ド・モアブルは、虚数の 2 項式の 3 つの立方根の実部を、ボンベッリが用いた 2 つの式から導かれる 3 次方程式にヴィエトの方法を適用し、さらに $\cos A = \cos(360°-A) = \cos(360°+A)$ を用いて求め、虚部をボンベッリが用いた関係式により求めた。ド・モアブルにより虚数の 2 項式の立方根抽出の問題は解決された。オイラーは、ド・モアブルの定理を用いて任意の複素数の n 乗根を極形式で表した。これは、ド・モアブルによる虚数の 2 項式の立方根抽出法を一般化したもので、今日複素数の n 乗根を求める際に用いられるものである。

謝辞

小川束先生のご助言により本論文は改善されました。ここに記して感謝いたします。

参考文献

[1] Rafael Bombelli, L'Algebra, 1572.
`https://www.e-rara.ch/zut/content/titleinfo/1230877`

[2] Rafael Bombelli, Opera di Rafael Bombelli da Bologna, Libre IV e V, 1929.
`http://storage.lib.uchicago.edu/pres/2005/pres2005-188.pdf`

[3] Hieronymi Cardani, Artis Magnæ, sive de regvlis algebraics, 1545.
`https://www.digitale-sammlungen.de/en/view/bsb10942315?page=4,5`

[4] Girolamo Cardano, The Rule of Algebra, Translated by T. Richard Witmer, Dover, 1968. ([3] の英訳)

[5] Sara Confalonieri, The casus irreducibilis in Cardano's Ars Magna and De Rgula Aliza, Arch. Hist. Exact Sci. (2015) 69:257-289.

[6] René Descartes, Geometria à Renato Descartes, ed. Frans Van Schooten, (2nd Latin translation by Schooten) Amstelodami, 1659.
`https://www.tulips.tsukuba.ac.jp/limedio/dlam/B18/B1883744/1/lime/10011021502/10011021502_208.html`

[7] Albrecht Dürer, Underweysung der Messung, 1538.
`https://www.e-rara.ch/doi/10.3931/e-rara-8271`

[8] アルブレヒト・デューラー、「測定法教則」注解、下村耕史訳編、中央公論美術出版、2008. ([7] の日本語訳)

[9] Leonhard Euler, De formis radicum aequationum cuiusque ordinis coniectatio, 1733.
`https://scholarlycommons.pacific.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1029&context=euler-works`

[10] Leonhard Euler, English translation by Jordan Bell, A conjecture on the forms of the roots of equations. ([9] の英訳) `https://arxiv.org/pdf/0806.1927.pdf`

[11] Leonhard Euler, Recherches sur les racines imaginaires des équations, Mémoires de l'académie des sciences de Berlin 5 (1749): 222288.
`https://archive.org/details/euler-e170/page/n39/mode/2up`

[12] John Fauvel and Jeremy Gray, The History of Mathematics: A Reader, Palgrave Macmillan, 1987.

[13] Veronica Gavagna, Radices Sophisticae, Racines Imaginaires: The origin of Complex Numbers in the Late Renaissance, in Rossella Lupacchini and Annarita Angelini ed., The Art of Science: From Perspective Drawing to Quantum Randomness, Springer, 2014.

[14] Albert Girard, Invention nouvelle en l'algèbre, 1629.
`https://books.google.co.jp/books?id=JMQoAAAAcAAJ&printsec=frontcover&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false`

[15] 原亨吉、解説、ライプニッツ著作集、2、工作舎、1997、所収

[16] 一松信、解説、矢野健太郎、角の三等分、ちくま学芸文庫、2006、所収

[17] ヴィクター J. カッツ、上野健爾・三浦伸夫監訳、カッツ数学の歴史、共立出版、2005 (Victor J. Katz, A History of Mathematics, 2nd Ed., 1998 の日本語訳)

[18] Thomas Fantet De Lagny, Nouveaux élements d'arithmetique et d'algebre: ou, introduction aux mathematiques, 1692.
`https://books.google.co.zm/books?id=bKk2AAAAMAAJ&printsec=frontcover#v=onepage&q&f=false`

[19] メルツバッハ-ボイヤー、三浦 伸夫・三宅 克哉 (監訳)、数学の歴史 I、朝倉書店、2018 (Uta C.Merzbach and Carl B. Boyer, A History of Mathematics, 3rd ed., John Wiley, 2010 の日本語訳)

[20] 三浦伸夫、数学の歴史、放送大学教育振興会、2013

[21] Abraham de Moivre, De Sectione Anguli, Philosophical Transactions, Vol. 32 (1722 - 1723), pp. 228-230. `https://www.jstor.org/stable/103605`

[22] Abraham de Moivre, De Reductione Radicalium ad Simpliciores Terminos, Seu de Extrahenda Radice QuacunqueData ex Binomio $a+\sqrt{+b}$, vel $a+\sqrt{-b}$. Philosophical Transactions, Vol. 40 (1737 - 1738), pp. 463-478. `https://www.jstor.org/stable/103957`

[23] Christoph J. Scriba, Mercator's Kinckhuysen-translation in the Bodleian Library at Oxford, The British Journal for the History of Science , Jun., 1964, Vol. 2, No. 1, 45-58.

[24] David Eugene Smith, A source book in mathematics, Dover, 1959 (originary published in 1929 by McGraw-Hill)

[25] Jacqueline Anne Stedall, A large discourse concerning algebra: John Wallis's 1685. *Treatise of algebra*, Ph D. thesis, The Open University, 2000.
`http://oro.open.ac.uk/58080/1/DX212669.pdf`

[26] François Viète, De aequationum recognitione et emendatione tractatus duo, 1615.
`https://www.e-rara.ch/zuz/doi/10.3931/e-rara-55950`

[27] リチャード・ウェストフォール、田中・大谷訳、アイザック・ニュートン、I,II, 平凡社、1993, (Richard Westfall, Never at Rest, Cambridge University Press, 1980 の日本語訳)

[28] D.T. Whiteside, The mathenatical papers of Isaac Newton, Vol.II, Cambridgeat at the University Press, 1968.

[29] D.T. Whiteside, The mathenatical papers of Isaac Newton, Vol.V, Cambridgeat at the University Press, 1972.