

アーベルの代数方程式論 Abel's Theory of Algebraic Equations

高瀬正仁
Takase Masahito *

Abstract

It is the search for a representation formula for the roots of algebraically solvable equations that forms the basis of Abel's theory of algebraic equations. On this foundation, the "proof of impossibility" was established and the criterion for determining algebraic solvability was obtained. Kronecker went one step further to explore the nature of the solvable equation itself, and formed the problem of the composition of the Abelian equation with specified coefficient range.

代数的可解性の判定基準の真実の泉

アーベルの代数方程式論がクロネッカーに継承されていく経緯をたどり、アーベル方程式の構成問題の形成をうながした事柄を指摘したいと思う。クロネッカーは1853年の論文

「代数的に解ける方程式について (I)」(『プロイセン月報』, 1853年¹, 365-374頁)

において代数方程式の代数的可解性の研究史を振り返り、アーベルとガロアの名を挙げて代数的可解性の2通りの判定基準に言及した。次に引くのはクロネッカーの言葉である。

素次数方程式の可解性に関するこれまでの研究 — 特にアーベルとガロアの研究。それらはこの領域において引き続き行われたすべての研究の土台となるものである — は本質的に、ある与えられた方程式が[代数的に]解けるか否かの判定を可能にする2通りの基準を明らかにした。だが、これらの判定基準は可解方程式それ自体の本性 (die Natur der auflösbaren Gleichungen selbst) に関しては、実際にはごくわずかな光さえも与えなかった。(『プロイセン月報』, 1853年, 365頁)

Received December 01, 2022. Revised March 24, 2023.

2020 Mathematics Subject Classification(s): 01A27, 01A45

Key Words: the "proof of impossibility", Abelian equations, Properties of the solvable equations themselves, a representation formula for the roots

*email: qzm11576@nifty.com

¹Monatsberichte Der Königlich-Preussische Akademie Des Wissenschaften Zu Berlin. 『プロイセン王立科学アカデミー (ベルリン) 月報』. 『プロイセン月報』と略称する。

ガロアが明示した判定基準は 1846 年の論文

「方程式の冪根による可解条件について」(まえがきの末尾に 1831 年 1 月 16 日という日付が附されている.『レビューの数学誌』², 第 11 巻, 1846 年, 417-433 頁)

に書き留められている. ガロアの言葉をそのまま引くと, ガロアが得た判定基準は次のとおりである.

素次数既約方程式が冪根を用いて解けるためには, 諸根のうちの任意の二つが判明したとき, 他の根がそれらの 2 根から有理的に導出されることが必要かつ十分である.(『レビューの数学誌』, 第 11 巻, 432 頁)

ガロアの代数方程式論の到達点がここに示されている. アーベルにはこの可解条件を明示した論文はないが, 楯田関数論に関する論文のここかしこに記された言葉を見れば, アーベルもまたこれを知っていたことに疑いの余地はなく, かえってガロアはアーベルの言葉に示唆されたのであろうという推定も可能である. クロネッカーはこれをガロアとアーベルの二人に由来するものと見ているが, クロネッカーの目にはこの判定基準には「可解方程式それ自体の本性」を解明する力はないと映じたのである. クロネッカーはこの判定基準の奥底にひそんでいるものを探究した.

クロネッカーの言葉が続く.

実際のところ, (アーベルが『クレルレの数学誌』, 第 4 巻で取り扱ったもの³と, 2 項方程式に関するもの⁴とを除いて) 与えられた可解条件を満たす方程式というのははたして存在するのかどうかということは, まったく知ることができなかったのである. そのうえ, そのような方程式を作ることもほとんどできなかったし, 他の数学上の研究を通じて, いかなる場所でもそのような方程式に導かれたことはなかった. これに加うるに, アーベルとガロアによって与えられた, 上述の非常に一般的に知られている可解方程式の二つの性質, 特に 2 通りの判定基準のうち的一方について私が後ほど示すように, 可解方程式の真の性質を明るみに出すというよりも, むしろ覆い隠す役割を果たすといってもよいようなものであった. そうして可解方程式それ自体 (die auflösbaren Gleichungen selbst) は, ある種の暗闇の中にとどまっていた.(『プロイセン月報』, 1853 年, 365 頁)

アーベルの「不可能の証明」により, 次数が 4 をこえる一般の代数方程式を代数的に解くことはできないことが明らかになった. だが, どれほど高い次数の方程式であってもなお代数的に可解であるものは存在する. ガウスが数論の著作『アリトメチカ研究』⁵(1801 年) の第 7 章で取り上げた円周等分方程式はそのような方程式である. このガウスの理論に示唆を得て, アーベルは 1829 年の論文「ある種の代数的可解方程式の族につい

²原誌名は Journal des Mathématiques Pures et Appliquées.『純粋数学と応用数学のためのジャーナル』

³アーベルの論文「ある種の代数的可解方程式の族について」.『クレルレの数学誌』, 第 4 巻, 1829 年, 131-156 頁.

⁴クロネッカーの念頭にあるのは円周等分方程式である

⁵Disquisitiones Arithmeticae

て」(『クレルレの数学誌』⁶, 第4巻, 1829年)において, 今日の語法でいう巡回方程式とアーベル方程式の概念を提案し, どちらも代数的に可解であることを示した. 円周等分方程式は巡回方程式であり, 代数的可解性の根拠はそこに求められることをアーベルは洞察したのである.

16世紀のイタリアの数学者たちにより3次と4次の方程式の解法が発見されたころを振り返ると, アーベルの「不可能の証明」が代数方程式論の研究史の到達点であったことはまちがいないが, この到達点は同時に新たな探究の出発点でもあった. 「不可能の証明」は代数方程式には代数的に解けるものと解けないものが存在することを教えている. そこでクロネッカーは, 「可解方程式それ自体の本性」の解明を課題として思索を深めていった. 代数的可解性の一般的な判定基準は解ける方程式と解けない方程式を識別する基準を教えるが, この基準を満たす方程式, すなわち可解方程式の「それ自体の本性」については何も教えない. この状況を指して, 可解性の判定基準は可解方程式の真の性質を明るみに出すというよりも, むしろ覆い隠していると批評したのである.

クロネッカーが求めていたのは可解方程式それ自体の本性, すなわち可解方程式を可解方程式であらしめている属性であり, それを探究するには, 可解方程式の表層を覆っている可解性の判定基準のベールをはいで奥底に分け入っていかなければならない. クロネッカーはこのように方向を定めて思索を進めていった. 思索の根幹を形作るのは「すべての可解方程式を見つける」というアイデアで, クロネッカーはこれをアーベルの手紙の断片に学んだのである. クロネッカー自身, この間の消息を次のように吐露している.

この闇は, 整係数5次方程式の根に関する, ほとんど注意を払われることのないように思われる非常に特殊なアーベルの覚書により, ごくわずかな部分が明らかにされたにすぎない. そうして, すべての可解方程式を見つけること (alle auflösbaren Gleichungen zu finden) という問題の解決を通じてはじめて, 完全に吹き払うことができたのである. (同上, 365頁)

クロネッカーのいうアーベルの覚書というのは, アーベルがパリに向う途次滞在したフライベルクで書いた手紙の断片である. 日付は1826年3月14日. 宛先はでベルリンのクレルレ. 『クレルレの数学誌』, 第5巻(1830年), 336頁に掲載された. 係数を限定して代数的可解方程式の根の代数的表示式を書き下すというアイデアを具体的に実行し, 有理数を係数にもつ5次の可解方程式の根を次のような形に表示した.

$$x = c + A \cdot a^{\frac{1}{5}} \cdot a_1^{\frac{2}{5}} \cdot a_2^{\frac{4}{5}} \cdot a_3^{\frac{3}{5}} + A_1 \cdot a_1^{\frac{1}{5}} \cdot a_2^{\frac{2}{5}} \cdot a_3^{\frac{4}{5}} \cdot a^{\frac{3}{5}} \\ + A_2 \cdot a_2^{\frac{1}{5}} \cdot a_3^{\frac{2}{5}} \cdot a^{\frac{4}{5}} \cdot a_1^{\frac{3}{5}} + A_3 \cdot a_3^{\frac{1}{5}} \cdot a^{\frac{2}{5}} \cdot a_1^{\frac{4}{5}} \cdot a_2^{\frac{3}{5}}$$

⁶原誌名は Journal für die reine und angewandte Mathematik. 『純粋数学と応用数学のためのジャーナル』. 『リューヴィユの数学誌』と同じ表題である.

ここで,

$$\begin{aligned}
 a &= m + n\sqrt{1+e^2} + \sqrt{h(1+e^2 + \sqrt{1+e^2})} \\
 a_1 &= m - n\sqrt{1+e^2} + \sqrt{h(1+e^2 - \sqrt{1+e^2})} \\
 a_2 &= m + n\sqrt{1+e^2} - \sqrt{h(1+e^2 + \sqrt{1+e^2})} \\
 a_3 &= m - n\sqrt{1+e^2} - \sqrt{h(1+e^2 - \sqrt{1+e^2})} \\
 A &= K + K'a + K''a_2 + K'''aa_2, A_1 = K + K'a_1 + K''a_3 + K'''a_1a_3, \\
 A_2 &= K + K'a_2 + K''a + K'''aa_2, A_3 = K + K'a_3 + K''a_1 + K'''a_1a_3 \\
 & \text{(『クレルレの数学誌』, 第5巻, 1830年, 336頁)}
 \end{aligned}$$

係数域を限定して「すべての可解方程式を見つける」という問題が提起されるとともに、根の形状の一般表示式を明示するという形において解答が記述された。このアーベルの覚書に寄せて、クロネッカーはこう言っている。

可解方程式それ自体は、「すべての可解方程式を見つけること」という問題の解決を通じてのみ、完全に解明することができる。実際、そのとき、無限に多くの新たな可解方程式が手に入るばかりでなく、存在する可能性のあるあらゆる可解方程式がいわば眼前に (vor Augen) 得られることになる。そうして具体的に書き表された根の形状のおかげで、可解方程式のすべての性質を発見して提示することができるようになるのである。(同上, 365-366頁)

方程式を知るということは根を知ることであり、根を知るというのは根の形状を明示する表示式を書き下すことである。クロネッカーはこの認識をアーベルの小さな覚書から継承したのである。

可解条件の根底にあるもの

「係数域を特定したうえですべての可解方程式を見つける」という問題の考察から出発することにより、「どの根も他の2根の有理関数として表される」という代数的可解条件の根底にあるものが認識される。クロネッカーの論文「代数的に解ける方程式について (I)」の叙述に沿って考えていく。いくつかの量 A, B, C, \dots が与えられたとき、これらの量の有理関数を作ることによりある一定の数域 Ω が生成される。この数域に係数をもつある既約代数方程式が指定され、 Ω に所属する量を用いて組立てられる代数関数の中にこの方程式を満たすものが存在する場合、そのような代数関数のうちもっとも一般的なものを見つけることという問題をクロネッカーは提起した。この問題は次のようにも言える。

ある与えられた数 n に対して、次のような A, B, C, \dots のもっとも一般的な代数関数を見つけること。すなわち、そこに包含されている冪根記号の変更を通じて

生じるさまざまな表示式のうち、 n 個の表示式は、それらの対称関数がすべて量 A, B, C, \dots の有理関数になるという性質を備えている。(同上, 367 頁)

ここでクロネッカーはアーベルの遺稿「方程式の代数的解法について」⁷に言及した。アーベルは、クロネッカーが求めようとしている代数関数がもたなければならない形状を二つまで報告したというのである。クロネッカーの言葉は次のとおりである。

方程式の与えられた次数、あるいは、第 2 の言い回しに即するなら、値の個数が素数の場合に対して、アーベルは引用された論文⁸の中で、この研究を本質的に非常に遠い地点まで押し進めて、求める代数関数がもたなければならない 2 通りの形状を報告した。(同上)

クロネッカーはアーベルが書いた 2 通りの形状を再現した。第 1 の形状は次のとおり。

$$(I) \quad p_0 + s^{\frac{1}{\mu}} + f_2(s) \cdot s^{\frac{2}{\mu}} + \dots + f_{\mu-1}(s) \cdot s^{\frac{\mu-1}{\mu}}$$

ここで、素数 μ は方程式の次数、 p_0 は A, B, C, \dots の有理関数、 s は A, B, C, \dots の代数関数、そうして $f_k(s)$ は s および A, B, C, \dots の有理関数を表すものとする。

第 2 の形状は次のようである。

$$(II) \quad p_0 + R_1^{\frac{1}{\mu}} + R_2^{\frac{1}{\mu}} + \dots + R_{\mu-1}^{\frac{1}{\mu}}$$

ここで、 p_0 は A, B, C, \dots の有理関数であり、 R_1, R_2, \dots は、 A, B, C, \dots の有理関数を係数とするある $\mu - 1$ 次方程式の根を表している。

クロネッカーはこれらの 2 通りの形状を詳細に調べ、まず形状 (II) に含まれている代数関数のうち、問題を満たすものは次に挙げる性質をもたなければならないことを発見した。すなわち、(アーベルが気づいたように) 量 R_1, R_2, \dots の対称関数ばかりではなく、それらのある一定の順序に並べるとき、それらの巡回関数もまた A, B, C, \dots の有理関数でなければならない。これを言い換えると、量 R_1, R_2, \dots を根とする $\mu - 1$ 次方程式はアーベル方程式であるということにほかならない。

クロネッカーのいうアーベル方程式は次のように規定した。

私はここで、「アーベル方程式」とはつねに、アーベルが全集、第 1 巻、論文 XI⁹ で取り扱った特別のクラスの可解方程式のことと考えている。それは、(その方程式の係数は A, B, C, \dots の有理関数とし、その根をある一定の順序に配列して x_1, x_2, \dots, x_n とするとき)「根の巡回関数は A, B, C, \dots の有理関数である」、言い換えると「方程式 $x_2 = \theta(x_1), x_3 = \theta(x_2), \dots, x_n = \theta(x_{n-1}), x_1 = \theta(x_n)$ が成立する。ここで、 $\theta(x)$ は A, B, C, \dots の有理関数を係数とする x の整有理関数を表す」ということにより規定されるものである。》(同上, 368 頁)

⁷執筆時期は 1828 年の後半と推定される。アーベルの全集に収録されている。クロネッカーが参照したのはホルンボエが編纂した最初のアーベル全集 (全 2 巻, 1839 年) である。ホルンボエ編纂の全集の第 2 巻, 185-209 頁。新版の全集 (全 2 巻, 1881 年) では第 2 巻, 217-243 頁。

⁸遺稿「方程式の代数的解法について」を指す。

⁹1829 年の論文「ある特別の種類代数的可解方程式の族について」を指す。論文番号 XI はホルンボエが編纂したアーベルの最初の全集で割り当てられた番号。

これにより、クロネッカーは今日の語法でいう巡回方程式を指してアーベル方程式と呼んでいることが諒解される。

クロネッカーは二つの表示式 (I) と (II) をさらに踏み込んで究明し、形状 (II) における諸量 R の形を次のようにいっそう精密に決定した。

$$(III) \quad R_\kappa = F(r_\kappa)^\mu \cdot r_\kappa^{\gamma-1} \cdot r_{\kappa+1}^{\gamma-2} \cdot r_{\kappa+2}^{\gamma-3} \cdots r_{\kappa+\mu-2}$$

ここで、 $r_\kappa, r_{\kappa+1}, \dots$ はある $\mu - 1$ 次アーベル方程式の $\mu - 1$ 個の根である。すなわち、諸量 r (それらの配列は指数の順に沿って行う) の対称関数と巡回関数は A, B, C, \dots の有理関数である。また、 $F(r)$ は諸量 r と A, B, C, \dots の有理関数を表している。最後に、 g は μ の原始根として、 γ_m は法 μ に関する g^m の最小正剰余を表している。このような R_κ の表示式を (II) に代入して得られる形状は、「問題を満たす表示式がもたなければならない形状であるばかりではなく、問題を満たす表示式のみを包含する形状」でもある。すなわち、そのようにして生じる形状は、 A, B, C, \dots との有理関数を係数とするある μ 次方程式を、その根として恒等的に満たし、他の根は (II) における μ 次の冪根記号の変更を通じて得られる。すなわち、 m 番目の根 z_m は次に挙げる方程式

$$(IV) \quad z_m = p_0 + \omega^m \cdot R_1^\mu + \omega^{gm} \cdot R_2^\mu + \omega^{g^2m} \cdot R_3^\mu + \cdots + \omega^{g^{\mu-2} \cdot m} \cdot R_{\mu-1}^\mu$$

で定められる、というふうにして得られる。ここで、諸量 R は表示式 (III) のことで、 ω は 1 の虚の μ 乗根を表している。このような状況を踏まえて、クロネッカーは可解方程式の諸根の相互関係を明るみ出すことに成功した。クロネッカーはこう言っている。

これよりまず第一に明らかになるのは、諸量 z の対称関数が A, B, C, \dots の有理関数であるのに対して、(指数の順に沿って配列するとき) これらの量の巡回関数は A, B, C, \dots および r_1, r_2, \dots の有理関数であるということである。ところが、これらの量 r はそれら自身、あるアーベル方程式の根である。したがって、 r_2, r_3, \dots は r_1 と A, B, C, \dots との有理関数である。それゆえ、上記の状況はまさしく「素次数可解方程式はどれも、もしそれ自身があるアーベル方程式の根であるような量 r_1 を既知と仮定するならば、アーベル方程式である」ということ、言い換えると、「可解方程式の μ 個の根はつねに

$$z_2 = f(z_1, r_1), z_3 = f(z_2, r_1), \dots, z_1 = f(z_\mu, r_1)$$

というふうに相互に結ばれている。ここで、 $f(z, r_1)$ は z, r_1 と A, B, C, \dots との有理関数を表し、 r_1 は、 A, B, C, \dots の有理関数を係数とするあるアーベル方程式の根である」ということを意味しているのである¹⁰。(同上、369 頁)

この状況に寄せて、クロネッカーは、「任意の可解方程式の諸根のこのような関係こそ、アーベルとガロアによって素次数可解方程式の根の特色として報告された性質、すなわ

¹⁰ ここに現れる r_1 は式 (III) における r_1 とは異なっている。ここで言われているような r_1 は、式 (III) における r_1 と 1 の原始 μ 乗根とを適宜組合わせて構成される。

ち、どの根も他の2根の有理関数でなければならないという性質の真実の泉 (die wahre Quelle) である」(同上)と批評した。可解方程式の根の形状を確定することにより諸根の相互依存関係が目に見えるようになった。アーベルとガロアの可解性の判定基準を覆っていた闇はこうして吹き払われたのである。

代数的可解性を左右するのは諸根を連繋する相互依存関係である。ド・モアブルが取り上げた低次数の円周等分方程式の解法にはこの認識がはっきりと芽生えてるが、これを明快に語った最初の人物はラグランジュである。アーベルが規定した巡回方程式とアーベル方程式の概念やアーベルとガロアに帰せられる可解性の判定基準はこの認識の広がりの中に出現したのである。優に方程式の可解性の観念の根底に位置すると見られる認識だが、クロネッカーは明快にこれを退けた。諸根の相互関係の観察は真の根底とは言えず、かえって真の根底を覆い隠している。根底の奥底になお根底が控えていて、真の根底は「すべての可解方程式を見つけること」という課題に応じることを通じて顕わになるというのである。

「すべての可解方程式を見つける」という問題に向う第一歩は次のような言葉とともにしるされた。

どのような整係数アーベル方程式の根も1の冪根の有理関数として表される。(『プロイセン月報』, 1853年, 373頁)

整係数アーベル方程式は代数的に可解であることを一般理論は教えているが、どのような方程式であるのかを教えることはない。ところが、クロネッカーの言明によれば、そのような方程式の根は1の冪根の有理関数の形に表されるという。根の表示式の形状が具体的に明示され、それにより整係数アーベル方程式の実体は円周等分方程式にほかならないことが判明する。この状況を指して、クロネッカーは、整係数アーベル方程式それ自体の本性が明らかになったというのである。

このクロネッカーの言明はアーベル方程式の成立と解決の可能性を開く呼び水のような役割を果たしている。クロネッカーは係数を限定するというアイデアをアーベルに学んだが、アーベル方程式を取り上げたところにもアーベルの代数方程式論の影響が顕著である。

アーベルの「不可能の証明」より

アーベルの「不可能の証明」を観察すると、アーベル思索は当初から「すべての可解方程式を見つける」という問題の方向に向っていたことが諒解される。

アーベルは「不可能の証明」を2度叙述した。最初の論文は

「代数方程式に関する論文。5次の一般方程式の解法は不可能であることがここで証明される」(1824年。新版『アーベル全著作集』¹¹, 第1巻, 28-33頁.)

である。この論文は公表されなかった。2度目の論文は

¹¹シローとリーが編纂した2度目の全集。全2巻。1881年刊行。

「4次を越える一般方程式の代数的解法は不可能であることの証明」(1825年. 新版『アーベル全著作集』, 5-24頁.)

である. ドイツ語訳が『クレルレの数学誌』, 第1巻(1826年)に掲載されたが, 新版の全集にはアーベルがフランス語で書いた論文がそのまま集録されている. この1825年の論文は次のような4個の章で構成されている.

第1章 代数関数の一般形について

第2章 ある与えられた方程式を満たす代数関数の諸性質

第3章 いくつかの量の関数が, そこに含まれている諸量を相互に入れ換えるときに獲得しうる相異なる値の個数について

第4章 5次方程式の一般的解法は不可能であることの証明

第1章の章題に見られる代数関数というのは代数的表示式のこと, x', x'', x''', \dots は有限個の任意の量とすると, アーベルはこれらの量の代数関数 v の一般形を

$$v = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + q_3 p^{\frac{3}{n}} + \dots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}$$

と書いた. 一般の5次方程式が代数的に可解とすれば, その根は諸係数の代数関数として表示されるが, 代数関数の一般形は第1章で決定されている. その形の観察を通じてある矛盾に遭遇することが指摘されたなら, それで「不可能の証明」は完成する. このように歩を進めていくのがアーベルの「不可能の証明」の筋道である. 鍵をにぎっているのは, 指定された諸量を用いて組立てられる代数関数の一般形である. さまざまな姿の一般形がありうるが, 「不可能の証明」を導く力のある一般形を提示するところに証明の成否がかかっている. その延長線上に, 「すべての可解方程式を見つけること」という課題はごく自然に立現れる.

パリに滞在中のアーベルが1826年10月24日付で故国ノルウェーのホルンボエに宛てた書簡には, 代数方程式論におけるアーベルの思想の根幹を作る言葉がつかっている. 高木貞治の著作『近世数学史談』から訳文を引くと,

僕は今方程式論について仕事をしている. 僕の得意の題目だが, 到頭次の一般的问题を解く手掛りが見付かったようだ. それは「代数的に解き得る凡ての方程式の形を決定すること」というのだ. 僕は五次, 六次, 七次等々のそれらを無数に見出した. 今までそれを嗅ぎつけたものはあるまいと思う. (新版『アーベル全著作集』, 第2巻, 260頁.)

という言葉が目にとまる. アーベルは「代数的に解きうるすべての方程式の形を決定する」という課題を明瞭に語っている.

次の言葉も際立っている. これも同じ手紙からの引用である.

… 五次方程式に関しては, 若しもそれが代数的に解かれるならば, 根の形は次のようであればならないことが分った.

$$x = A + R^{\frac{1}{5}} + R'^{\frac{1}{5}} + R''^{\frac{1}{5}} + R'''^{\frac{1}{5}}$$

ここで R, R', R'', R''' は一つの四次方程式の四つの根で、それらは平方根ばかりで表わされるのだ。ここで困難であったのは式と符号とであった。

ここには5次の可解方程式の根の形状が報告されている。

次に引くのは1827年3月4日付のホルンボエ宛書簡に見られる言葉である。

方程式の理論において、ぼくは次のような問題を解決した。「代数的に解ける、ある定まった次数の方程式をすべて見つけよ」。この問題の中には、他のすべての問題が包含されている。この問題の解決により、ぼくは非常に多くのすばらしい定理に到達した。(同上, 262頁.)

1828年11月25日付のルジャンドル宛書簡の末尾の言葉も注目に値する。アーベルは、

私は幸にも、提示された任意の方程式が冪根を用いて解けるか否かの判定を可能にしてくれる確実な法則を見つけました。私の理論から派生する命題として、4次を越える方程式を(代数的に)解くのは一般に不可能であることが示されます。(『クレルレの数学誌』, 第6巻, 1830年, 80頁)

と言っている。アーベルは「代数的に解ける方程式をすべて見つけること」という問題(これを「問題A」と呼ぶことにする)と「代数的に解ける方程式の根の形状を明示する一般的な表示式を見つめること」という問題(これを「問題B」と呼ぶ)に深い関心を寄せている。あらゆる代数方程式が代数的に可解なら、これらの問題はありえない。「不可能の証明」の土台の上に、アーベルとクロネッカーの手で新たな代数方程式論が生い立っていったのである。

アーベルの遺稿より

「不可能の証明」以後のアーベルの新たな代数方程式論はアーベルの遺稿「方程式の代数的解法について」に叙述された。この論文の緒言のはじめの部分の改訂稿もあり、「方程式の代数的解法の新しい理論」という表題が附せられて、アーベルの新版の全集に再現されている(同書, 第2巻, 329-331頁)。次に引くのはアーベルの遺稿の緒言の言葉である。

代数学のもっとも興味深い諸問題のひとつは、方程式の代数的解法の問題であり、卓越した地位を占めるほとんどすべての幾何学者たちがこのテーマを論じてきたという事実もまた認められる。4次方程式の根の一般的表示に到達するのに困難はなかった。4次方程式を解くための首尾一貫した方法も見つかったし、しかもその方法は任意次数の方程式に対しても適用可能であるように思われた。だが、ラグランジュや他の傑出した幾何学者たちのありとあらゆる努力にもかかわらず、(代数方程式の代数的解法の発見という)提示された目的に到達することはできなかったのである。このような事態には、一般的な方程式の解法を代数的に遂行するのは不可能なのではないかと思わせるに足るものがあつた。だが、これは決定

不能な事柄である。なぜなら、採用された方法により何らかの結論へと達しうるのは、方程式が可解である場合に限定されているからである。実際、はたして可能なかどうかを知らないままに、永遠に探索を続けられることになってしまうのである。それゆえ、このような仕方ですべてに何らかの事物に到達しようとするには、他の道を歩まなければならない。この問題に対して、それを解くことが可能であるような形を与えなければならない…（新版の『アーベル全著作集』、第2巻、217頁）

このような認識を基礎にして、アーベルは「方程式の代数的解法の全容を包摂する」（アーベルの言葉）二つの問題を提示した。

- 1 代数的に解ける任意次数の方程式をすべて見つけること。（これは問題 A そのものである。）
- 2 ある与えられた方程式が代数的に可解であるか否かを判定すること。

これらの2問題は「結局のところ同じもの」であることもアーベルは承知していた。アーベルの言葉が続く。

これらの2問題の考察こそ、この論文のねらいとするところである。そうして、たとえ完全な解決は与えないにしても、完全な解決へといたる手法を指し示したいと思う。これらの2問題は相互に緊密に結ばれていることがわかるが、その結果、前者の問題の解決は必然的に後者の問題の解決を導かなければならない。結局のところ、これらの2問題は同じものなのである。研究の流れの中で、方程式に関する多くの一般的命題 — 方程式の可解性や根の形状に関するもの — に達するであろう。方程式の代数的解法について言うなら、方程式の理論というのはまさしくこれらの一般的性質から成り立っているのである。これらの一般的性質のひとつは、たとえば、4次を超える一般方程式を代数的に解くのは不可能である、というものである。（同上、219頁）

… われわれの問題を解決するための自然な歩みは、問題の言明に即しておのずとその姿を現してくる。すなわち、提示された方程式において、未知量のところにもっとも一般的な代数的表示式を代入しなければならない。その次に、はたしてその方程式をそのようにして満たすことは可能なかどうかという点を究明しなければならない。（同上、220頁）

まずはじめに解かなければならないのは、「代数的表示式というものの最も一般的な形状を見つけること」という問題である。「不可能の証明」を叙述した論文の第1章で取り上げられていたのはこの問題である。その段階で得られた表示式はまだ完全な一般性を獲得していたわけではないが、「不可能の証明」が可能になる程度の段階には達していた。続いて、「ある代数関数が満たしうる方程式を、存在する限りすべて見つけること」という問題が設定される。この問題が解決されたなら、そのとき問題1の解答が手に入ったの

であり、その結果、問題 2 もまたおのずと解決される。なぜなら、すべての代数的可解方程式がすでに手中にある以上、ある与えられた方程式が代数的に可解であるか否かを知るには、その方程式を代数的可解方程式のリストに照らして比較しさえすればよいからである。問題 2 の解決としてはこのように歩を進めるのが最も自然であり、少なくとも理論的な視点に立つ限りこれで完璧である。

だが、技術上の困難はなお残されている。

… 個々の特別の場合において、あの最も簡単な方程式を作るための一般規則は確かに設定されたとはいうものの、その規則に基づいてその方程式それ自身を手にするにはなお遠いからである。そうしてたとえ首尾よくその方程式を見つけることに成功したとしても、かくも複雑な諸係数が、提示された方程式の諸係数と実際に等しいかどうかを、いかにして判定せよというのであろうか。(同上, 221-222 頁)

アーベルはこの困難を回避して「他の道を通ることによって (suivant une autre route)」(アーベルの言葉. 同上, 222 頁), 提出された目的地に到達した。「他の道を通ることによって」という言葉を、アーベルは「問題を一般化することによって (en généralisant le problème)」(同上) と言い換えている。視点を転換し、「ある与えられた次数を有する方程式を満たしうる、最も一般的な代数的表示式を見つけること」という問題、すなわち問題 B を設定したのである。

代数的可解性のもうひとつの判定基準

問題 B に対する解答は別段一通りに限られるわけではない。考察の対象を素次数方程式に限定して、アーベル自身、遺稿「方程式の代数的解法について」において都合 3 種類の「根の表示式」を報告している。次に挙げるのは第 1 表示式を表明するアーベルの言葉である。

素次数 μ をもつ既約方程式が代数的に解けるとするなら、その諸根は次のような形をもつ。

$$y = A + \sqrt[\mu]{R_1} + \sqrt[\mu]{R_2} + \cdots + \sqrt[\mu]{R_{\mu-1}}$$

ここで、 A は有理量であり、 $R_1, R_2, \dots, R_{\mu-1}$ はある $\mu-1$ 次方程式の根である。(同上)

第 2 表示式は、アーベルの記号をそのまま用いると、

$$z_1 = p_0 + s^{\frac{1}{\mu}} + f_2 s \cdot s^{\frac{2}{\mu}} + f_3 s \cdot s^{\frac{3}{\mu}} + \cdots + f_{\mu-1} s \cdot s^{\frac{\mu-1}{\mu}}$$

という形である。ここで、 z_1 は対象として取り上げられている既約な代数的可解方程式の根、 μ はその方程式の次数、 s は既知量を用いて組立てられる代数関数、 p_0 は既知量の有理関数、最後に $f_2 s, \dots, f_{\mu-1} s$ は s と既知量の有理関数を表している。

アーベルの究明はさらに進む. 上記の第 2 表示式において量 s が満たす最低次数の代数方程式 (その作り方は第 2 章で示されている) を $P = 0$ とすると, この方程式は巡回方程式である. すなわち, この方程式の根 $s, s_1, s_2, s_3, \dots, s_{\nu-1}$ (ν は方程式 $P = 0$ の次数を表す) は, θs は s と既知量との有理関数として,

$$s, s_1 = \theta s, s_2 = \theta^2 s, s_3 = \theta^3 s, \dots, s_{\nu-1} = \theta^{\nu-1} s$$

という形に表示される. これに加えて, s の有理関数 $a, a_1, a_2, \dots, a_{\nu-1}$ を適切に作ることにより,

$$\begin{aligned} s^{\frac{1}{\mu}} &= A \cdot a^{\frac{1}{\mu}} \cdot a_1^{\frac{m^\alpha}{\mu}} \cdot a_2^{\frac{m^{2\alpha}}{\mu}} \cdots a_{\nu-1}^{\frac{m^{(\nu-1)\alpha}}{\mu}} \\ s_1^{\frac{1}{\mu}} &= A_1 \cdot a^{\frac{m^\alpha}{\mu}} \cdot a_1^{\frac{m^{2\alpha}}{\mu}} \cdot a_2^{\frac{m^{3\alpha}}{\mu}} \cdots a_{\nu-1}^{\frac{1}{\mu}} \\ &\dots\dots\dots \\ s_{\nu-1}^{\frac{1}{\mu}} &= A_{\nu-1} \cdot a^{\frac{m^{(\nu-1)\alpha}}{\mu}} \cdot a_1^{\frac{1}{\mu}} \cdot a_2^{\frac{m^\alpha}{\mu}} \cdots a_{\nu-1}^{\frac{m^{(\nu-2)\alpha}}{\mu}} \end{aligned}$$

(m は素数 μ の原始根)

となるようにすることができる. しかもこれらの ν 個の関数 $a, a_1, a_2, \dots, a_{\nu-1}$ はそれら自身, ある ν 次既約巡回方程式の根である. そうして z_1 は,

$$\begin{aligned} z_1 &= p_0 + s^{\frac{1}{\mu}} + s_1^{\frac{1}{\mu}} + s_2^{\frac{1}{\mu}} + \cdots + s_{\nu-1}^{\frac{1}{\mu}} \\ &+ \varphi_1 s \cdot s^{\frac{m}{\mu}} + \varphi_1 s_1 \cdot s_1^{\frac{m}{\mu}} + \varphi_1 s_2 \cdot s_2^{\frac{m}{\mu}} + \cdots + \varphi_1 s_{\nu-1} \cdot s_{\nu-1}^{\frac{m}{\mu}} \\ &+ \varphi_2 s \cdot s^{\frac{m^2}{\mu}} + \varphi_2 s_1 \cdot s_1^{\frac{m^2}{\mu}} + \varphi_2 s_2 \cdot s_2^{\frac{m^2}{\mu}} + \cdots + \varphi_2 s_{\nu-1} \cdot s_{\nu-1}^{\frac{m^2}{\mu}} \\ &\dots\dots\dots \\ &+ \varphi_{\alpha-1} s \cdot s^{\frac{m^{\alpha-1}}{\mu}} + \varphi_{\alpha-1} s_1 \cdot s_1^{\frac{m^{\alpha-1}}{\mu}} + \varphi_{\alpha-1} s_2 \cdot s_2^{\frac{m^{\alpha-1}}{\mu}} + \cdots + \varphi_{\alpha-1} s_{\nu-1} \cdot s_{\nu-1}^{\frac{m^{\alpha-1}}{\mu}} \end{aligned}$$

($\alpha = \frac{\mu-1}{\nu}$. $\varphi_1 s, \varphi_2 s, \dots, \varphi_{\alpha-1} s$ は s と既知量の有理関数)

というふうには書き表される. これが第 3 表示式である. $\mu = 5$ の場合に限定すると, この第 3 表示式はアーベルがフライブルクで書いたクレルレ宛書簡に見られる表示式と同じものである.

C.J. マルムステンは論文「代数方程式の解法の研究」(『クレルレの数学誌』, 第 34 巻, 1847 年, 46-74 頁) においてアーベルの遺稿を精密にたどり, 最後に「定理 X」として,

μ は素数とするとき, もし $\mu > 3$ なら, μ 次の既約方程式は一般に代数的に可解ではない.

という「不可能の定理」を書き添えた. 注目しなければならないのはその証明法である. マルムステンは, μ 次の一般既約方程式が代数的に可解であるという仮定のもとで, その方程式の根の第 1 表示式と第 2 表示式を組み合わせることにより, たちどころに矛盾を導いたのである. 問題 B の究明の中から, こうして「不可能の証明」が取り出された. 1828 年 11 月 25 日付のルジャンドル宛書簡において, アーベルは「提示された任意の方程式が冪根を用いて解けるか否かの判定を可能にしてくれる確実な方法」を発見したことを報告

した。マルムステンの論文に示されているように、アーベルが手にした可解性の判定基準は可解方程式の根の表示式を書き下すことに基づいている。「諸根のうちの2根により他の根がそれらの2根により有理的に表示される」という、ガロアの論文で報告されたものとは異なるもうひとつの判定基準であり、クロネッカーはこれらを指して「ある与えられた方程式が解けるか否かの判定を可能にする2通りの基準」と呼んだのであった。

根の表示式を基礎にする判定基準はそれだけではまだ可解方程式それ自体の本性の解明に到達しているわけではないが、これを土台にして歩をすすめていけば手が届きそうである。現にクロネッカーは、整係数アーベル方程式それ自体の本性は円周等分方程式であることを明らかにすることに成功した。アーベルの代数方程式論はクロネッカーに継承されて結実し、アーベル方程式の構成問題という大きな問題が造形された。「クロネッカーの青春の夢」に象徴される虚数乗法論もまたこの問題の一角を占めている。アーベルの代数方程式論の根幹を作るのは代数的可解方程式の根の表示式の探究である、この土台の上に「不可能の証明」が成立し、代数的可解性の判定基準も得られた。クロネッカーはここからなお一歩を進めて可解方程式それ自体の本性の探究に向い、アーベル方程式の構成問題を造形した。代数方程式論におけるクロネッカーの寄与の真価がそこに現れている。