RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B92 (2023), 39–55

関孝和による『楊輝算法』の解法の訂正について
Seki Takakazu's Correction of the Solution of *Yang Hui Suanfa*

上野　健爾
Kenji Ueno *

Abstract

In May 1673, Seki Takakzu completed a revised manuscript of "Yang Hui suanfa". Seki corrected a proof in "Yang Hui suanfa". Yang Hui claimed to have corrected the errors in three of the solutions of "Wucao suanjing", but in the third and final solution, he had no choice but to show a non-mathematical solution: he drew a reduced drawing to find the required length and then measured it to find the actual length. Seki showed the correct length in his manuscript. Although Seki did not describe his argument for finding the length, his argument can be easily deduced. To do so, a simultaneous equation consisting of two unknowns had to be solved, and one of the unknowns had to be eliminated. This suggests that the "Yang Hui suanfa" problem was one of his first possible encounters with a problem that required many unknowns for its solution.

In the manuscript, Seki gave a solution that is quite different from the solution given by Yang Hui. Again, he does not say how he obtained that solution. In this solution, it is not necessary to find the length of the line segment as Yang Hui did, but only to find the area from the three sides of a triangle. This is substantially described in Problem 19 of the "Daijutsu bengi no ho". This formula for area is essentially the same as Heron's formula.

However, it is doubtful that Seki found this solution immediately after solving the quadratic equation of the line segment numerically to find the true length. In this note, I will discuss another possibility for Seki's argument: the possibility that he used the root formula for a special type of quadratic equations. This formula could have been obtained by Seki combining Problem 14 in the second volume of "Tianmu bilei chengchu jiefa" of "Yang Hui suanfa" and Problem 8 in the final chapter of "Suanxue qimeng."

§1.　はじめに

『楊輝算法』は楊輝の著作『乗除通変算宝』三巻 (1274 年刊),『続古摘奇算法』二巻 (1275 年冬至),『田畝比類乗除捷法』二巻 (1275 年小暑) の三著作をこの順番に一つにま

Received October 20, 2022. Revised December 11, 2022.
01A25, 01A27, 01A45
Key Words: History of Japanese Mathematics, Seki Takakazu, "Yang Hui suanfa"
*四日市大学　関孝和数学研究所 The Seki Kowa Institute of Mathematics, Yokkaichi
email: ueno@yokkaichi-u.ac.jp

とめて明代に刊行されたものである．刊本は朝鮮に渡り再刻され，朝鮮刊本は日本にも輸入されていた．朝鮮刊本では三著作の序文は巻頭にまとめられ，錯簡もあった．関孝和は錯簡を直し，三著作を刊行順に直し，序文も各著作の巻頭に置き直した写本を作成した．朝鮮刊本は宣徳八年癸丑 (1433)(宣徳は明の元号) 五月に印刷されており，関孝和が『楊輝算法』の改定版とも称すべき編纂写本を完成したのは寛文癸丑仲夏 (寛文 13 年 (1673) 五月) である．朝鮮刊本の年紀に合わせて写本が作成されたように見られる．また，写本作成は『発微算法』刊行の 1 年半前のことであり，関孝和の数学がある程度完成していた時期と考えられる．

『楊輝算法』の「田畝比類乗除捷法」巻下の冒頭は「五曹刊誤三題」と題して『五曹算経』で取り扱われている三題の問題の解法が間違っているとして，その解法を訂正している．関孝和は，その中で三番目の問題，四辺形の四辺の長さが与えられているときに四辺形の面積を求める問題，の楊輝の解法を正しくない (「右楊輝五曹共皆非也」) と記し，「求積法曰」以下に正しい解法を記している．関孝和の自筆の稿本が知られていない現在，この関孝和による訂正文は，関の手になる文章として貴重なものでもある．

これまで，この事実は知られていたが，関孝和の解法に関してはほとんど議論されてこなかった．本稿では関孝和の解法を分析する．楊輝が「田畝比類乗除捷法」巻下で示した方法でこの問題を解くためには 2 未知数の連立方程式が必要となり，未知数の消去も必要となる．このことは，関孝和の傍書法と終結式の理論を構築する必要性を感じさせる最初の契機が『楊輝算法』のこの問題ではなかったかと推測させる．さらに，特筆すべきことは，未知数を消去して得られた 2 次方程式を数値的に解くのであれば，面積は以下に示す楊輝の方法と同じように直角三角形と台形に分けて計算するのが簡単なはずである．しかし，関孝和は「求積法曰」として記した解法では，楊輝が必要とした数値は使わずに，四辺形を二つの三角形に分けて面積を求めている．一方で，楊輝が数学的に求めることができなかった数値の精密な近似値を新たに記した図の中で記している．しかも，この図は楊輝の図を反転させた形で記し，楊輝の図とは違うことを強調しているようにも見える．

なぜ，関孝和は楊輝の方法を放棄して別の方法を使ったのか．二通りの解釈が可能である．一つは，楊輝が求めた数値を使って計算をする方法を更に一般の場合に適用できる形に書き直す過程で，二つの三角形に分けて面積を計算すると最終的に美しい形に計算をまとめることができることに気づいたという解釈である．この方法では，特別な形の 2 次方程式の根の公式が必要となるが，後述するようにそのことのヒントは，楊輝の「田畝比類乗除捷法」巻下第 14 問の解法の図に記されている (図 6)．この図と『算学啓蒙』巻下，開方釋鎖門の問題 8 を見れば，天元術による 2 次方程式の記法と解の公式を自然に理解することができる．それは，関孝和が少なくとも

$$-x^2 + ax - S = 0, \quad a > 0, \quad S > 0$$

の形の 2 次方程式の根の公式の一般形を知ってたことを窺わせる．これもこれまで全く議論されてこなかったことである．

2 次方程式の根の公式は，

$$x(x+b)=S, \quad b>0, \quad S>0$$

の場合は『算法統宗』巻六に「帰除平方帯縦歌」として解の導出法が歌訣として記されている．天元術を理解していれば，この歌訣は 2 次方程式の根の公式であることは容易に理解できる．こうしたことが，他の 2 次方程式の根の公式への興味を深めて，関は一般の 2 次方程式の根の公式を理解していた可能性も考えられる．

ところで，この解法は複雑であるが，関の最初の解法であった可能性を捨てきれない．数学の研究では最初の解法は得てして複雑な議論となり，後に整理された解法を思いつくことが多いからである．

一方，関孝和の著作とされる「題術弁議之法」の例題 19 では三角形の三辺を使っていちばん長い辺からの三角形の高さ (中股) を求める公式が，余り宜しくないという解法 (関は「権術」と呼んでいる) と共に記されている．この公式を使えば，三角形の面積が容易に得ることができ，関孝和が与えた解法が直ちに得られる．この三角形の面積の公式は実質的にヘロンの公式に他ならない．こうして，最終的に関孝和は一般の三角形の面積を求めることに適用でき，四辺形の場合は四辺と対角線の一つの長さが分かれば面積を求めることができる一般的な方法を解法として採用したと考えられる．これが，関が「術曰」や「草曰」とせずに「求積法曰」と記した理由と考えられる．

彼の数学を数学を形成していく上で関孝和は『楊輝算法』からきわめて大きな影響を受けている ([1] 4 章)．関孝和がいつ『楊輝算法』を本格的に学び始めたかは不明であるが，『古今算法記』の刊行以前であると思われる．この点に関しては今後議論を深めていくことが必要である．

関連する年表を記しておく．

洪武 11 年 (1397) 戊午	『楊輝算法』が余氏勤徳書堂から出版される．
宣徳 8 年 (1433) 癸丑五月	『楊輝算法』が朝鮮で再刻される．
寛文 11 年 1(671) 辛亥	澤口一之『古今算法記』を刊行．
寛文 13 年 (1673) 癸丑五月	関孝和『楊輝算法』の改定編纂版を写本として作成．
延宝 2 年 (1674) 甲寅十二月	関孝和『発微算法』の序文を記す．

§ 2.　『五曹算経』の問題

楊輝がその解法を訂正した 3 番目の『五曹算経』の問題は『五曹算経』では次のように記されている．

> 今有四不等田東三十五歩西四十五歩南二十五歩北一十五歩問田幾何　答曰三畝奇八十歩
> 術曰并東西八十歩半之得四十歩又并南北絵四十歩半之得二十歩二位相乗得八百歩以畝法除之即得

(現代語訳　今，四辺形の田がある．東の辺は 35 歩，西は 45 歩，南は 25 歩，北は 15 歩である．田の面積はどれだけか．答えは 3 畝余り 80 歩
解き方　東西の辺を併せて 80 歩，これを半分にして 40 歩．また，南北の辺を併せて 40 歩，これを半分にして 20 歩．両者の積を取って 800 歩を得，畝法 (1 畝は 240(平方) 歩) で割って得る．

『五曹算経』の解法は，四辺形 $ABCD$ の面積を，図 1 の記号を借りると

$$\frac{b+d}{2}\cdot\frac{a+c}{2}$$

と計算しており，長方形以外のときは正しい解を与えない．

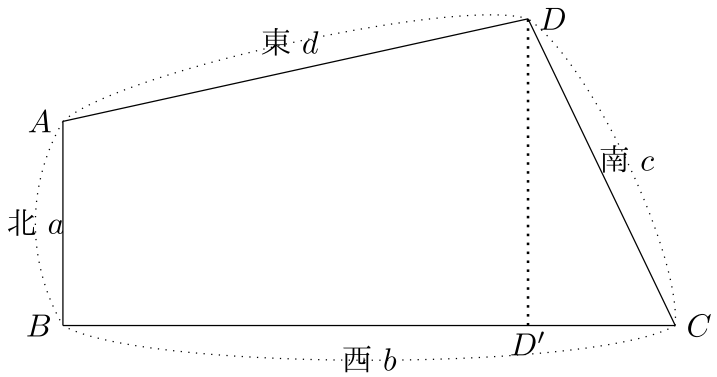

図 1. 『五曹算経』では四辺形 (四不等) と記すが，四辺の長さを与えただけでは，四辺形の形は決まらない．そのため,『楊輝算法』では $\angle B$ を直角と仮定して議論している．$a = 15$, $b = 45$, $c = 25$, $d = 35$.

§3.　「田畝比類乗除捷法」巻下の楊輝の解法

そもそも，四辺形の各辺の長さを与えただけでは四辺形は決まらないので，この問題は不完全な問題である．そこで，楊輝算法では四辺形の一つの角 (図 1 の $\angle B$) を直角と仮定して，四辺形の形を確定して問題を解いている．

五曹四不等田東三十五歩西四十五歩南二十五歩北一十五歩問田幾何
答称三畝八十歩非
実三畝四十歩三尺九分六厘八毛七糸半
田圍四面不等者必有斜歩然斜歩豈可作正歩相併今以一寸代十歩為図以証四不等田不可用東西　相併南北相併各折半相乗之法
如遇此等田勢須分両段取用
其一勾股田

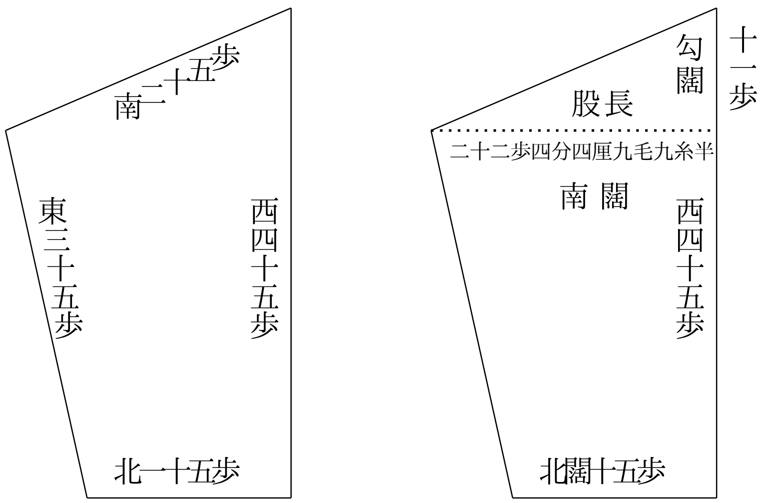

図 2.

　其一半梯田
草日勾闊十一歩股長二十二歩四分四厘九毛九糸半用勾股相乗折半得積一百二十三歩四分七厘四毛七糸二忽半又置梯田南闊二十二歩四分四厘九毛九糸半併北闊十五歩以半長十七歩乗之得積六百三十六歩六分四厘九毛一糸五忽併二積共七百六十歩一分二厘三毛八糸七忽半以畝法除得三畝四十歩零歩以一歩之積二十五乗之得三尺九分六厘八毛七糸半

五曹，四不等田，東三十五歩，西四十五歩，南二十五歩，北一十五歩，田幾何(いくばく)ぞと問ふ．

　答へに称して三畝八十歩．非なり．
　実，三畝四十歩三尺九分六厘八毛七糸半．
　田圍四面不等なるは必ず斜歩有り．然れば斜歩，豈に，正歩相併せ作るべきや．今，一寸を以て十歩に代へて図と為し，以て四不等田，東西を相併せ，南北を相併せて各(おのおの)折 [半] 相乗の法を用ひべからずを証す．
如(も)し，これらの，田勢に遇へば須く両段に分けて取用すべし．
　　　その一勾は股田．
　　　その一半は梯田．
　勾闊十一歩，長三十四歩，股長二十二歩四分四厘九毛九糸半．田三畝四十歩三尺九分六厘八毛七糸半にあらざるなり．
　実，三畝四十三歩一十尺四分五厘三毛一糸半．

　草に曰く，勾闊十一歩，股長二十二歩四分四厘九毛九糸半，勾股を用ひて相乗

し折半して，積一百二十三歩四分七厘四毛七糸二忽半を得る．又た，梯田の南闊二十二歩四分四厘九毛九糸半を置き，北闊十五歩を併せ，半長十七歩を以てこれに乗じ，積六百三十六歩六分四厘九毛一糸五忽を得る．二積を併せ共に七百六十歩一分二厘三毛八糸七忽半を得て，畝法を以て除し，三畝四十歩零歩を得，一歩の積二十五を以てこれに乗じ，三尺九分六厘八毛七糸半を得る．

四辺が不等である四辺形を考えているので，対辺は平行とならず，五曹算経の解法はおかしいと楊輝はまず指摘する．楊輝の解法では図 2 の右側に記された勾闊 (図 1 で D から BC に降ろした垂線の足を D' とするときの CD') と股長 (図 1 の DD') を求めて，四辺形を三角形と台形に分けて面積を求めている．ただ，股長，勾闊の長さを数学的に求めることができなかったので，10 歩を 1 寸に縮尺した図を描き，勾闊の長さを測定して 11 歩を得，三平方の定理を使って股長を求めている．

それに基づいて，四辺形を図 2 の右の図の上部の直角三角形と下部の台形に分けて計算した．

この解法に対して，関孝和は数学的に非であるとしたわけである．

§4. 関孝和の解法

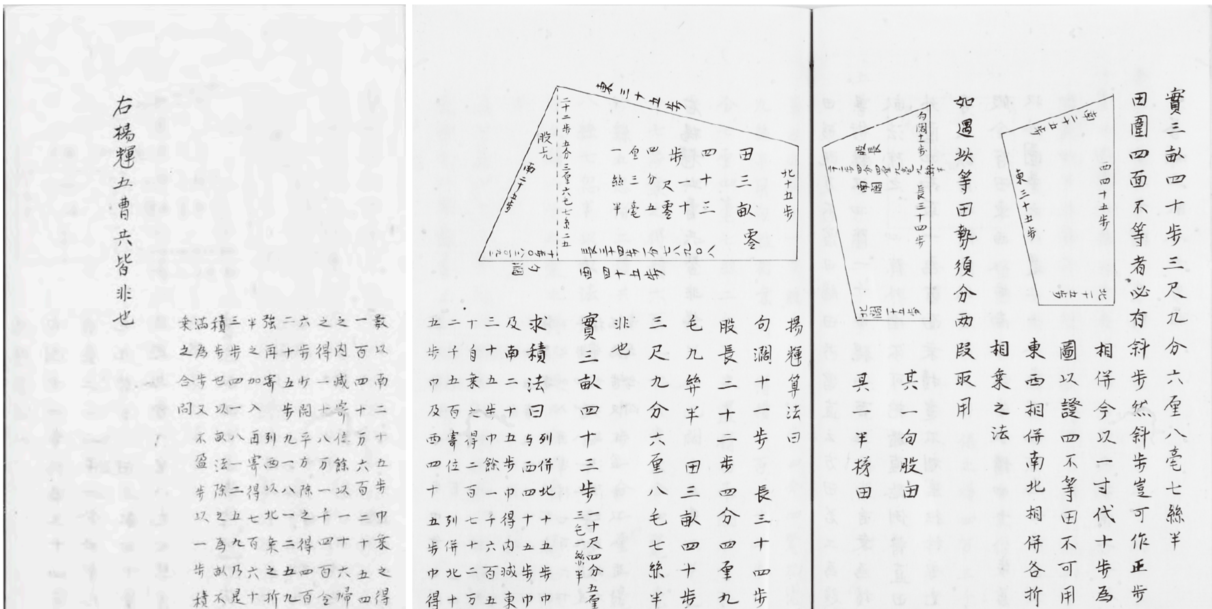

図 3. 関孝和の訂正した解法は上の図の「求積法曰」以下に記されている．(射水市新湊博物館高樹文庫蔵「楊輝算法」).

関孝和は図 2 の勾闊と股長を数学的に求めていたことが分かる (図 3, 図 5)．しかし，四辺形の面積は別の方法で求めているように見える．少なくとも勾闊や股長の長さを解法の

中では直接は使っていない．関孝和は訂正した解法を次のように記している．以下，読み下し文のみを記す．

> 求積法に曰く，北十五歩巾と西四十五歩巾及び南二十五歩巾を併せ列し，内，東三十五歩巾を減じ，余り一千六百五十を得て，　これを自乗し，二百七十二万二千五百を得て位に寄す．北十五歩巾及び西四十五歩巾を併せ列し，得る数，南二十五歩巾を以てこれに乗じ，一百四十万六百二十五[1]を得，これを四たびし，内，位に寄せたるを減じ，余り一十六を以てこれを帰して，一十八万一千四百令六歩少を得，開平方にこれを除し，四百二十五歩九一八一二五九強を得て再び寄す．西を列し，北を以てこれに乗じ，これを折半して再び寄せたるに加入し，七百六十三歩四一八一二五九を得る．　乃ちこれ積歩なり．畝法を以てこれを除し畝と為す．満たさざるは歩を為す．又(ま)た，歩を盈(み)たさざるは一を以て歩積にこれを乗じて問に合す．

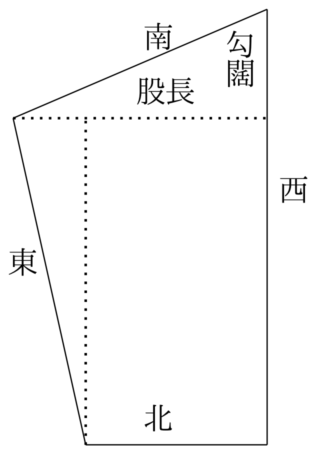

図 4.

関孝和の記述は必要最低限を記すだけで，どのように考察して解法を見出したかの説明は全くない．一年半後に序を記した『発微算法』の記述と相通じるものがある．

勾闊，股長をどのようにして求めたのか，現代の記号を使わずに，関孝和の考えの可能性を迫ってみよう．ただし，このままでは見にくいので勾闊を x, 股長を y として現代的な式を括弧内に記す．

(1) 勾闊の冪と股長の冪は南の冪に等しい．($x^2 + y^2 = \text{南}^2$)

(2) 西と勾闊の差の冪と股長と北の差の冪は東冪に等しい．($(\text{西} - x)^2 + (y - \text{北})^2 = \text{東}^2$)

[1]正しくは「一百四十万六千二百五十」となる．

(3) 西と勾闊の差の冪は西冪と勾闊冪の和と西と勾闊の積の二倍との差に等しい．($(西 - x)^2 = 西^2 + x^2 - 2\,西\,x$)

(4) 股長と北の差の冪は股長冪と北冪の和と股長と北の積の二倍との差に等しい．($(y - 北)^2 = y^2 + 北^2 - 2\,北\,y$)

(3) と (4) の和をとると
西と勾闊の差の冪と 股長と北の差の冪の和は勾闊冪と股長冪と西冪と北冪の和から西と勾闊の積と股長と北の積の和の二倍を除いたものに等しい．($(西 - x)^2 + (y - 北)^2 = x^2 + y^2 + 西^2 + 北^2 - 2(西\,x + 北\,y)$)

このことと (2) より
南冪と西冪と北冪との和から西と勾闊の積と股長と北の積の和の二倍を除いたものは東冪に等しい．($(南^2 + 西^2 + 北^2 - 2(西\,x + 北\,y) = 東^2$)

このことから
(5) 西と勾闊の積と北と股長の積の和の二倍は南冪と北冪と西冪との和から東冪を除いたものに等しい．($2(西\,x + 北\,y) = 南^2 + 西^2 + 北^2 - 東^2$)

(1) と (5) は勾闊と股長を未知数とする連立方程式となっている．

股長の満たす方程式を得るために勾闊を (1), (5) から消去する．
南冪と西冪と北冪との和から東冪を除いたものを甲と名づける．($甲 = 南^2 + 西^2 + 北^2 - 東^2$)

すると (5) より
(6) 西と勾闊の積の二倍は甲から北と股長の積の二倍を除いたものに等しい．($2\,西\,x = 甲 - 2\,北\,y$)

(1) より
(7) 西冪の 4 倍と勾闊冪の積と西冪の 4 倍と股長冪の積との和は西冪の 4 倍と南冪の積に等しい．($4\,西^2 x^2 + 4\,西^2 y^2 = 4\,西^2 南^2$)

(6) と (7) より
甲から北と股長の積の二倍を除いたものの冪と西冪と股長冪の積の 4 倍との和は西冪と南冪の積の 4 倍に等しい．($(甲 - 2\,北\,y)^2 + 4\,西^2 y^2 = 4\,西^2 南^2$)

これより
(8) 北冪と西冪の和と股長冪の 4 倍と甲冪の和から甲と北と股長の積の 4 倍を除いたものは西冪と東冪の積の 4 倍に等しい．($4(北^2 + 西^2) y^2 - 4(甲北) y + 甲^2 = 4\,西^2 南^2$)

これは股長の満たす 2 次方程式である．
以上はいわゆる天元術を表に出さない議論である．天元術を使うとどう表現できたかを考えてみる．傍書法はまだ完成されていなかったとして考えてみる．言葉を使うと長くなるので，“2 南” は算木記号を使って ‖ 南 と記し，和や差の記号はないので 3 北 − 2 南 は

$|||$北$\cancel{\|}$北などと表示する．唯，冪記号は現代の記号を使うことにする．また，積 "北·南" は $|$ 北·南と記すことにする．天元の一 (未知数 x) として勾闊をとる．すると (1) は

(1a)

$\mid$ 股長^2 $\cancel{\mid}$南^2	○	$\mid$

と表現できる[2]．(2) は

(2a)

$\mid$ 股長^2 $\mid$ 北^2 $\cancel{\|}$北·股長 $\mid$ 西^2$\cancel{\mid}$東^2	$\cancel{\|}$西	$\mid$

$(1a) - (2a)$ より

(3a)

$\mid$ 東^2 $\cancel{\mid}$南^2 $\mid$ 北^2 $\cancel{\mid}$西^2 $\|$ 北 股長	$\|$ 西

そこで $(1a)$ と $(3a)$ の連立方程式を考える．$(3a)$ より

(4a)

○	$\mid$ 東^2$\cancel{\mid}$南^2 $\cancel{\mid}$北^2 $\cancel{\mid}$西^2 $\|$ 北·股長	$\|$ 西

$(1a) \times 2$ 西 $- (4a)$

(5a)

$\|$ 西·股長^2 $\cancel{\|}$西·南^2	$\mid$ 南^2 $\mid$ 北^2 $\mid$ 西^2 $\cancel{\mid}$東^2 $\cancel{\|}$北·股長

南^2 + 北^2 + 西^2 − 東^2 を甲とおいて $(3a)$ と $(5a)$ を書き換える．

(6a)

$\cancel{\mid}$甲 $\|$ 北·股長	$\|$ 西

(7a)

$\|$ 西·股長^2 $\cancel{\|}$西·南^2	$\mid$ 甲 $\cancel{\|}$北·股長

[2]各次数の係数の区別が難しいので，四角で各次数の係数を囲って区別する．方程式は昇冪の順に記す．

$(6a) \times$ (甲 $-$ 2 北 $\cdot$ 股長) $-$ $(7a) \times 2$ 西 より

(8a)

$\|\|\|\|$西$^2 \cdot$南^2 $\cancel{\|}$甲^2 $\|\|\|\|$北$\cdot$甲$\cdot$股長 $\cancel{\|\|\|\|}$北$^2 \cdot$股長^2 $\cancel{\|\|\|\|}$西$^2 \cdot$股長^2

を得る．天元の一を股長にとると，この式は

(9a)

$\cancel{\|}$甲^2 $\|\|\|\|$西$^2 \cdot$南^2	$\|\|\|\|$北$\cdot$甲	$\cancel{\|\|\|\|}$北^2 $\cancel{\|\|\|\|}$西^2

と書き直すことができる．

以上のように，傍書法が確立されていない段階でも，股長に関する方程式を未知数の消去によって得ることは可能であったと思われる．同様に股長を消去すると，勾闊の満たすべき方程式は北と西を入れ替えて得られるので，天元の一を勾闊にとると

(9b)

$\cancel{\|}$甲^2 $\|\|\|\|$北$^2 \cdot$南^2	$\|\|\|\|$西$\cdot$甲	$\cancel{\|\|\|\|}$北^2 $\cancel{\|\|\|\|}$西^2

が得られる．

関は最初は実際の数値を用いて方程式を解き，股長と勾闊の値を求めたものと思われる．具体的数値は 2 次方程式 (9a), (9b) に 東 $=35$, 西 $=45$, 北 $=15$, 南 $=25$ と置くと，方程式

$$2340000 + 99000y - 9000y^2 = 0 \tag{10a}$$

$$-2160000 + 297000x - 9000x^2 = 0 \tag{10b}$$

を解いて得られる．具体的に数値を計算すると

$$\text{股長} = y = 22.536725\cdots$$
$$\text{勾闊} = x = 10.82109165\cdots$$

を得，関の計算結果と一致する．ちなみに，$(10a)$ の他の解は負であるが，$(10b)$ は他に正の解 $22.178908\cdots$ を持つ．もちろん，これは題意を満たさない解である．

しかしながら，方程式 (9a), (9b) を見て，関孝和は『楊輝算法』や『算学啓蒙』の問題との類似に気づいたと思われる．式 (9a) に関しては，式に (西$^2+$北^2) を掛けて，天元の一を 2(西$^2+$北^2)$\cdot$股長 に取り直すと

(11a)

$\cancel{\|}$甲$^2 \cdot$北^2 $\cancel{\|}$甲$^2 \cdot$西^2 $\|\|\|\|$北$^2 \cdot$西$^2 \cdot$南^2 $\|\|\|\|$西$^4 \cdot$南^2	$\|\|$北$\cdot$甲	$\cancel{\|}$

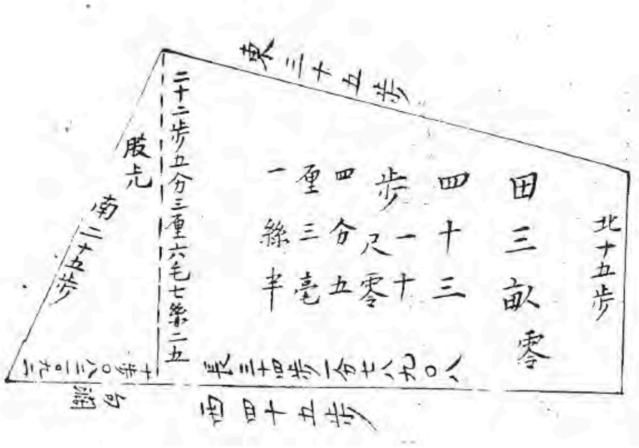

図 5. 関が記した図を拡大したもの．股長と勾闊の精密な近似値が記されている．(藪内旧蔵本「楊輝算法」)

と書くことができる．また式 (9b) に関しても同様に式に (西^2 + 北^2) を掛けて天元の一を 2(西^2 + 北^2) · 勾闊 に取り直すと

(11b)

⊤̸甲^2 · 北^2 ⊤̸甲^2 · 西^2 ||||北^2 · 西^2 · 南^2 ||||北^4 · 南^2	‖ 西 · 甲	⊤̸

の形をしている．具体的な数値を代入すれば，これは「田畝比類乗除捷法」巻下と『算学啓蒙』巻下「開方釈鎖門」で扱われた 2 次方程式になっている．

§5. 2 次方程式の根の公式

「田畝比類乗除捷法」巻下の第 14 番目の問題は 2 次方程式の根の公式と深く関係している．

直田積八百六十四歩只云長闊共六十歩問長多闊幾何
答曰十二歩
和歩求差術曰四之積幾歩減和自之積余開平方除之得長闊之差歩
演段曰和自乗有四段直田積一段差方積所以用四積減和方剰下差方一段却取方面
草曰共歩六十自乗得三千六百歩又四因田積得三千四百五十六歩以少減多余一百四十四即差方一段也開平方除見差歩十二

直田，積八百六十四歩，只云ふ，長と闊共に六十歩．長，多くば闊幾何(いくばく)ぞと問ふ．
答へて曰く，十二歩．
和歩求差術に曰く，四の積歩，和これを自するの積を減じ，余りを開平方

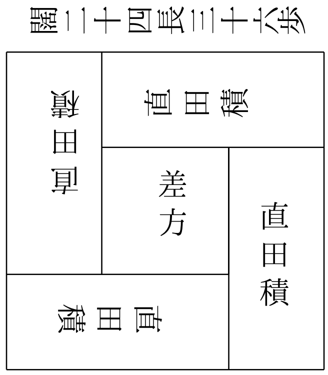

図 6.

にこれを除し，長と闊の差歩を得る．

演段に曰く，和の自乗に四段の直田積，一段の差方積有り．

四積を用ひて和方より減じ剰り下に差方一段．却て方面を取る．

草に曰く，共の歩六十を自乗し，三千六百歩を得る．又た，田積に四因して三千四百五十六歩を得て，少きを以て多きを減じ，余り一百四十四，即ち差方一段なり．開平方に除し，差歩十二を見る．

これは，長方形の長い方の辺を x，短い方の辺を y とおくと，長方形の面積を S, 長辺と短辺の和を a とすると

$$xy = S$$
$$x + y = a$$

のとき $x - y$ を求める問題である．図 6 より

$$(x-y)^2 = a^2 - 4S$$

であることが分かるので，$x - y = \sqrt{a^2 - S}$ であり，これから x と y が簡単に求まる．

$$x = \frac{a + \sqrt{a^2 - S}}{2}$$
$$y = \frac{a - \sqrt{a^2 - S}}{2}$$

『楊輝算法』『田畝比類乗除捷法] 巻下ではこの問題の直前の第 12 番目と第 13 番目の問題で上の記号を使えば x と y を求める問題が出されている．まだ，方程式の形になっていないが，算盤上に算木を置く形での方程式の解法が示されている．

『算学啓蒙』巻下「開方釈鎖門」問題 8 では類似の問題の方程式が天元術が記述されている．

> 今有直田八畝五分五厘只云長平和得九十二歩問長平各幾何答曰平三十八歩〇長五十四歩
> 　術日立天元之一爲平 |〇|𝍠| 以減云数余為長用平乗起為積 |〇|𝍱𝍡|𝍠̸| 寄左列畝通歩与寄左相消得開方式 |𝍪〇𝍭𝍡̸|𝍱𝍡|𝍠̸| 平方開之得平以減和歩即長合問
>
> 今，直田八畝五分五厘有り．只云ふ，長平和して九十二歩を得る．長平各幾何ぞと問ふ．
> 答に曰く平三十八歩，長五十四歩．
> 　術に曰く，天元の一を立てて平と為す |〇|𝍠|．以て云へる数より減じて長と為し，平を用いて乗起して積と為す |〇|𝍱𝍡|𝍠̸|．左に寄す．畝を列して歩に通し，左に寄せたると相消して開方の式 |𝍪〇𝍭𝍡̸|𝍱𝍡|𝍠̸| を得る．

上の記号を使えば y の満たす方程式

$$-S + ay - y^2 = 0 \tag{12}$$

を求めている．x も同じ形の方程式となる．この方程式は (11a), (11b) と同じ形の方程式になっている．

『算学啓蒙諺解大成』では建部賢弘が『楊輝算法』の図 6 と同様の図を描いて，古法な解法であると注をしている．その注では数値解のみを問題としていて，2 次方程式の根の公式に対する注意はない．一般論を重視した関孝和は，解がでてくる原理に興味を持ったと思われるので，上の問題から 2 次方程式 (12) の形の根の公式を実質的に知っていたとしてもおかしくない．根が二つ出てくることにも気づいたと思われる．

すると，(11a), (11b) の解から (9a), (9b) の解は，今日の記号を使えば次のように記される．(9a) の 2 次方程式の解は

$$\frac{2\,北\cdot甲 \pm \sqrt{4\,北^2\cdot甲^2 - 4(北^2+西^2)(甲^2 - 4\,西^2\cdot南^2)}}{4(北^2+西^2)}$$
$$= \frac{北\cdot甲 \pm 西\cdot\sqrt{4\,南^2(北^2+西^2) - 甲^2}}{2(北^2+西^2)}$$

である．同様に (9b) の 2 次方程式の解は

$$\frac{西\cdot甲 \pm 北\cdot\sqrt{4\,南^2(北^2+西^2) - 甲^2}}{2(北^2+西^2)}$$

である．ただ，今の場合は問題の条件から解を一つ選ぶ必要があり，

$$\text{(12a)} \qquad 股長 = \frac{北 \cdot 甲 + 西 \cdot \sqrt{4\,南^2(北^2 + 西^2) - 甲^2}}{2(北^2 + 西^2)}$$

$$\text{(12b)} \qquad 勾闊 = \frac{西 \cdot 甲 - 北 \cdot \sqrt{4\,南^2(北^2 + 西^2) - 甲^2}}{2(北^2 + 西^2)}$$

であることが分かる．

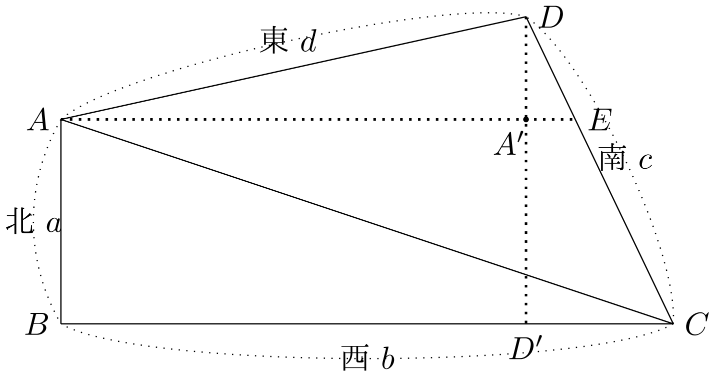

図 7. D から BC へ降ろした垂線の足を D', A から DD' に降ろした垂線の足を A', AA' と CD との交点を E と記す．DD' が股長，CD' が勾闊である．関孝和は四辺形の面積を $\triangle ACD$ と $\triangle ABC$ の和として計算している．$D'C = x$, $DD' = y$, $k = a^2 + b^2 + c^2 - d^2$ とおくと，$x^2 + y^2 = c^2$, $2bx + 2ay = k$ が得られ，これより $x = (bk - a\sqrt{4c^2(a^2+b^2) - k^2})/\{2(a^2+b^2)\}$, $y = (ak + b\sqrt{4(c^2(a^2+b^2) - k^2}/\{2(a^2+b^2)\}$ であることが分かる．$\triangle DA'E$ と $\triangle DD'C$ が相似であることより $A'E/D'C = DA'/DD'$ より $A'E = DA' \cdot D'C/DD' = x(y-a)/y$. 従って $AE = AA' + A'E = b - x + x(y-a)/y = b - ax/y = \dfrac{(b^2+a^2)\sqrt{4c^2(a^2+b^2) - k^2}}{ak + b\sqrt{4c^2(a^2+b^2) - k^2}}$. これより $\triangle ACD = AE' \times DD'/2 = \dfrac{\sqrt{4c^2(a^2+b^2) - k^2}}{4}$ を得る．

次に図 7 の AE の長さを求める．$\triangle DA'E$ と $\triangle DD'C$ が相似であることから $A'E/D'C = DA'/DD'$ がなりたち，

$$A'E = DA' \cdot D'C/DD' = 勾闊 \cdot (股長 - 北)/股長 = 勾闊 - 勾闊 \cdot 北/股長$$

と書くことができる．従って

$$AE = AA' + A'E = BD' + A'E = (西 - 勾闊) + 勾闊 - 勾闊 \cdot 北/股長 = \frac{(西 \cdot 股長 - 北 \cdot 勾闊)}{股長}$$

を得る．従って $(12a)$ と $(12b)$ より

$$AE = \frac{(西^2 + 北^2) \cdot \sqrt{4\,南^2(北^2 + 西^2) - 甲^2}}{北 \cdot 甲 + 西 \cdot \sqrt{4\,南^2(北^2 + 西^2) - 甲^2}}$$

を得る．すると $\triangle ACD$ の面積は $AE \times$ 股長/2 であるので

$$\frac{\sqrt{4\,南^2(北^2+西^2)-甲^2}}{4} \tag{13a}$$

であることが分かる．関孝和はこの事実を $(4\,南^2(北^2+西^2)-甲^2)/16$ の平方根をとると表現している．

関が以上のような推論をしたかは分からないが，いずれにしても『楊輝算法』の編纂写本を作る段階では，もっと明解な解法があり，股長や勾闊を求める必要がないことに気づいたことは間違いない．

§6. 「題術弁議之法」における三角形の高さの公式とヘロンの公式

『楊輝算法』の編纂写本を作成する段階では，関は三辺が与えられた三角形の面積を求める公式を見出していて，それを四辺形の面積を求めることに適用している．それが「求積法曰」いう表現で楊輝の解法の訂正を行った理由と考えられる．三辺が与えられた三角形の面積を求める公式は実質的に「題術弁議之法」の第 19 番目の例題に与えられている．

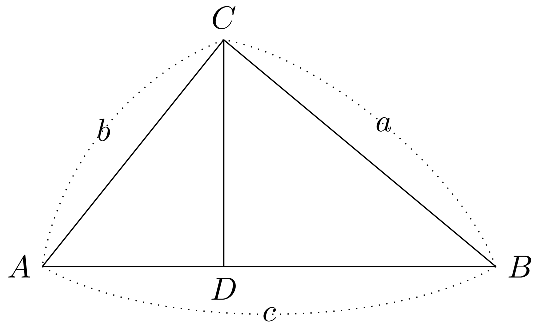

図 8. $AB > BC > CA$ である三角形を考え，AB を大斜，BC を中斜，CA を小斜と呼ぶ．頂点 C から辺 AB に降ろした垂線の足を D とする．CD を中股，AD を短股と呼ぶ．このとき中股の 2 乗は $\{4b^2c^2-(c^2+b^2-a^2)^2\}/(4c^2)$ で与えられ，三角形の面積を S とすると $16S^2 = 4b^2c^2-(c^2+b^2-a^2)^2$ が成り立つ．これからヘロンの公式は簡単に求めることができ，ヘロンの公式と同値な表現である．

仮如有三斜大斜四尺四寸中斜三尺七寸小斜一尺五寸問中股幾何

答曰中股一尺二寸

術曰列大斜自之加入小斜冪得二千一百六十一寸内減中斜冪余七百九十二寸為実列大斜倍之得八尺八寸為法実如法而一得短股九寸自之得数以減小斜冪余一百四十四寸為再実開平方除之得中股

仮如(たとへば)，三斜有り．大斜四尺四寸，中斜三尺七寸，小斜一尺五寸．中股幾何(いくばく)ぞと問ふ．

答へて曰く，中股一尺二寸．

術に曰く，大斜を列し，これを自し，小斜冪を加入して二千一百六十一寸を得る．内(うち)中斜冪を減じ，余り七百九十二寸を実と為す．大斜を列し，これを倍し，八尺六寸を得，法と為す．実法の如く而も一にして短股九寸を得る．これを自して得る数，以て小斜冪を減じ，余り一百十四寸，再び実と為す．開平方にこれを除し中股を得る．

「題術弁議之法」の解法は図 8 で AD(短股) の長さを求め，それをもとに中股 CD を求めている．自然な方法であるが，中股を直接求めずに，簡単に求められる短股を求めてから中股を求めているので，この解法は「権術」のなかの「断」であると「第術辨議之法」では断じている．解答が間違っているわけではない．

直接 CD の長さを直接求めるための方程式は，CD の長さを x とおき，今日の記号を使うと

$$\sqrt{b^2-x^2}+\sqrt{a^2-x^2}=c$$

と記される．これを

$$a^2-x^2=(c-\sqrt{b^2-x^2})^2$$

と変形し，整理すると

$$2c\sqrt{b^2-x^2}=c^2-a^2-b^2$$

を得，両辺を 2 乗することによって

$$4c^2x^2=4b^2c^2-(a^2+b^2-c^2)^2$$

を得る．三角形の面積を S とすると $S=cx/2$ であるので

$$16S^2=4b^2c^2-(a^2+b^2-c^2)^2 \tag{6.1}$$

となる．この式が，関孝和の訂正解で，図 7 の $\triangle ACD$ の面積として記されている公式である．この公式 (6.1) は実質的にヘロンの公式に他ならない．

なお，三角形の三辺から面積を求める問題は「大成算経」巻十三「求積」の 6 番目の問題に見ることができ，三角形の三辺と中股および面積との関係は「解伏題之法」の例題 2 に見ることができる．こうしたことから，関孝和が『楊輝算法』の編纂写本を作るときには，三辺が与えられた三角形の面積を求める公式は既知であり，それが「求積法曰」という表現になったものと思われる．

§ 7. 結論

(1) 関孝和は楊輝の『五曹算経』の解法の不完全な訂正を修正する過程で，2 未知数の連立方程式に遭遇し，未知数を消去して 2 次方程式を得て，それを解いたと推測される．

(2) (1) の未知数消去の過程は天元術を知らなかったとしても可能なレベルである．天元術を知っていたら，関孝和は傍書法へのヒントもあわせて得ていた可能性が高い．

(3) 関が『古今算法記』が刊行される以前に『楊輝算法』を読んだとすれば (その可能性はきわめて大きいと思われる),『楊輝算法』の解法の修正の過程で多未知数の方程式と未知数消去の必要性を初めて認識した可能性がある．

(4) 『楊輝算法』の編纂写本を作成した時点では，関孝和は三角形の三辺から面積を求めるヘロンの公式 (6.1) を得ていた．

(5) 『楊輝算法』田畝比類乗除捷法巻下の問題 14 と『算学啓蒙』巻下「解法釈鎖門」の問題 8 とによって，関孝和は少なくとも $-x^2+ax-S=0$, $a>0$, $S>0$ の形の 2 次方程式の根の公式を知っていたと推測される．

(6) 関孝和の解法には必要最小限のことしか記されておらず，一年半後に序文が記された『発微算法』の書き方に類似している．

謝辞

関孝和による『楊輝算法』の解法の関孝和による訂正の重要性を指摘された小林龍彦氏,「大成算経」巻十三「求積」の問題 6 の存在を指摘された長田直樹氏に感謝する．

参考文献

[1] 上野・小川・小林・佐藤著『関孝和論序説』岩波書店, 2008.