RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B92(2023),167-180

関孝和と建部賢弘の円周率の近似計算についての注意 －関孝和314年祭に寄せて

Some Remarks on the approximate calculation of Pi by SEKI Takakazu and TAKEBE Katahiro −on the occasion of the 314th anniversary of SEKI Takakazu

真島秀行（お茶の水女子大学名誉教授）

MAJIMA, Hideyuki*(Professor Emeritus, Ochanomizu University)

Abstract

To activate the study on the history of Mathematics in Japan, the author proposed to organize some me morial events for the year 2022, the 314th year after his death of SEKI Takakazu(?-1708), the 300th anniversary of TAKEBE Katahiro's "Tetsujjutsu-Sankei", and so on. In this time,we give some remarks on the approximate calculation of Pi by SEKI Takakazu and TAKEBE Katahiro. Wealso mention the work of KAMATA Yoshikiyo on the same problem. , especially he gave the length of circumscribed. polygon with it of inscribedpolygon. We claim that Seki and Takebe used better method giving lower and upper bounds of Pi than Kamata did. In this point of view, we criticize some observation on given by hisitorian on science about mathematicians of Edo era. of Japan. From this episode, we learn a lesson on mathematics education: maticians should give explanation easy to nderstand on their works to the society and mathematics education should be done iin a reasonable way n the society.

要旨

数学，数学教育，数学史の教育・研究の活性化のために2022年に関孝和314年祭開催等を（建部賢弘が「綴術算経」の序文を書いてから300年の記念の年でもあり）提唱してい

Received November 30, 2022. Revised April 15, 2023.
2020Mathematics Subject Classification(s):01A27,01A45
*KeyWords:*History of JapaneseMathematics,Seki Takakazu,T akebe Katahiro, Pi

*退職しお茶の水女子大学所属ではないが名誉教授の称号を受けており慣例で所属とした.

email: majima.hideyuki@ocha.ac.jp

た. 今回は，関孝和と建部賢弘の円周率の近似計算に関するいくつかの注意を与えておく.
鎌田俊清が円周率の近似計算において内接正多角形の周長とともに外接正多角形の周長も与えられていることに言及し, 円周率の下界と上界を与えるよりよい方法を, 関や建部は使っていることを主張する. この観点から, ある科学史家の日本の江戸時代の数学者についての観察を批判する. この逸話から数学教育についての教訓を得る：数学者はその成果をわかりやすく社会に伝えるべきであり、社会ではある程度の数学力を備えるべく数学教育が必要である。

§1. はじめに

算聖関新助孝和先生が宝永 5 年 10 月 24 日（1708 年 12 月 5 日）に没してから節目の年に記念事業が行われてきた［10］. 筆者は 2007 年から，2008 年の関孝和先生没後 300 年の記念事業に関わった．その後，数学，数学教育，数学史の教育・研究の活性化のために 2014 年の建部賢弘生誕 350 年記念事業（以下で建部記念 2014 と略す）を提案するなどしてきたが，建部記念 2014 後は，2022 年の関孝和 314 年祭開催等を提唱した．314（円周率 3.14…の近似値の 100 倍）年目（315 年忌）となるのが 2022 年 12 月 5 日であり，2022 年はいろいろな記念の年でもあることが数学史等を調べて分かったからである［10］. 筆者は以前から関孝和と建部賢弘の円周率の近似計算についてその発想について論じてきたが, 今回は以前深く考えていなかった建部が「綴術算経」やその類書に書いている祖沖之への言及と, それに関係して「弧背截約集」上巻に書いている円周率の近似計算がなされた時期についての推察を述べる.
注目する建部の言及は次の箇所である（平仮名, 下線は講演者による）.

> 1）（以前から注目している）「綴術算経」では,「始関氏増約の術を以て定周を求る事を理會して一遍にして止む故に十三万千七十二角に到る截周を求て十五六位の真数を究め得たり」,「建部先生綴術真本」（東大本）では「二十許位の真数を究め」とある.「綴術算経（東北大学狩野本)」でも「二十許位の真数を究め」とある.
> 2）（以前は読み飛ばしていた）「綴術算経」では「嘗関氏円を砕抹して定周を求め零約の術を以て径周の率を造れり爾して後二十餘年を歴て隋志を観るに周数率数咸く邂逅に符号する者有り咨祖子也関子也邦を異にし時を殊にすと雖真理に会すること相同じ可謂妙なりと」,「不休綴術」等では「昔時関氏円を砕抹して定周を求め零約の術に依て径周の率を造れり二十余年の後にして始て隋志を観るに周数率数咸ク符号す嗚呼邦を異にし時を異にすと雖真理に会するときは相同じ可謂妙なりと」

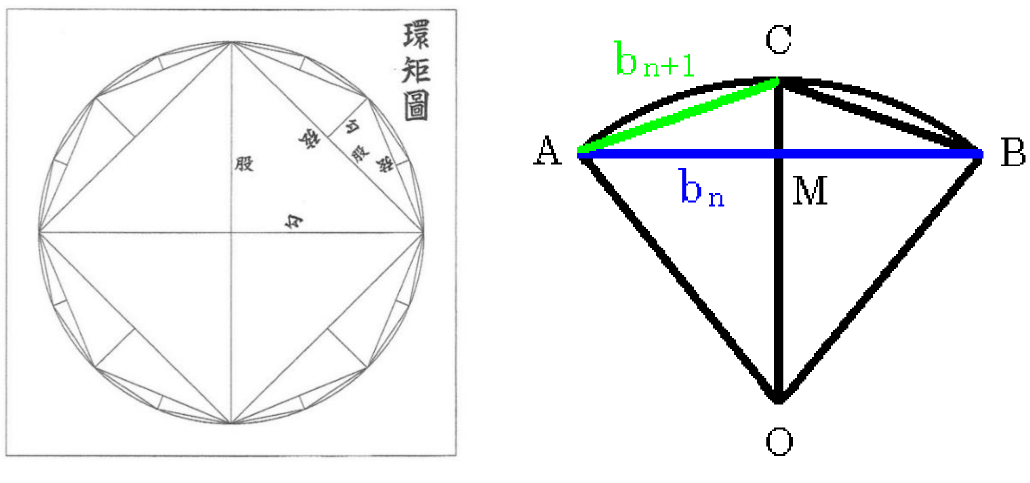
という部分の特に「二十年餘を経て」,「二十余年の後に」という時期がいつか, ということを「弧背截約集」の計算の時期に関わって推察してみた.
また, 以前から, 関孝和や建部賢弘が増約術によって与えた数値は円周率の上界あるいは

下界となると主張しているが,それに気付けない者が江戸時代も現代も少なからずいることにも注意をしておきたい.円周率の上界として分かりやすい外接正多角形の周の長さを与えることだけが唯一の方法ではなく,宅間流鎌田俊清の業績を過大評価すべきではない,ということを主張する.この主張には（現代数学を知っている者は当時の考え以上のことを類推してしまいがちだが）数学史の研究としては主張できないのではないか，との質問が研究集会の講演時に寄せられたので,これに対しても,『括要算法』亨巻の諸約之法の増約の意味と同書貞巻の円周率の近似計算において「定周」というものを導入していることを根拠として補足説明を行う.

§2. 関孝和の円周率の近似計算の復習

前に書いたことの繰り返しであるが，再度説明を加えると次の通りである：

関孝和の高弟建部賢弘著『研幾算法』(関孝和による跋文があり，天和 3 年秋刊行）では『数学乗除往来』で出題された問題に対する解答を与えているが，その第 4 問は円周率の近似分数をどうやって導くか，ということであり，凡例に師の関孝和の方法であるといい，「別書にこれを載す」と書くがこれが直ちに「出版される」とはならなかった．それは『括要算法』(正徳 2（1712）年正月刊行）貞巻に書かれている方法と推察され，次のようである（例えば［7］［8］).



図環矩図

第一（辺数等倍増加法）

（図（環矩図）のように）正四辺形から始めて，次々に辺数を倍増し正2^n角形($n = 2, \ldots, 15, 16, 17$)の周の長さ$L_n$を三平方の定理を利用して計算する．特に, $n = 15, 16, 17$, に対しては次の通りである（下線部は真値に一致している)：

- $\underline{3.14159264}$87769856708 弱
- $\underline{3.14159265}$23865913571 強

- 3. 1415926532889927759 弱

第二求定周

第一の数値から増約術の式を用いて次の計算を行い定周を定めた：

$$L = L_{16} + \frac{(L_{16}-L_{15})(L_{17}-L_{16})}{(L_{16}-L_{15})-(L_{17}-L_{16})}$$ （≒3. 1415926535897932476）

3. 14159265359 微弱を（ここでの）定周となした.

関孝和の求めた内接正多角形の周の長さの階差が単調減少して 1/4 に近づくことが数値的にすぐわかるが, 1/4 より大であり円周率の下界と上界が得られており

$$L_n + \frac{4\left(L_{n+1} - L_n\right)}{4-1} = L_{n+1} + \frac{\left(L_{n+1} - L_n\right)}{4-1} < \pi < L_n + \frac{\left(L_n - L_{-+1}\right)\left(L_{n+1} - L_n\right)}{\left(L_n - L_{-+1}\right) - \left(L_{n+1} - L_n\right)}$$

が成り立っている. また, 正しく計算すれば下界は単調増加なはずであり，上界は単調減少なはずであるが，関孝和の計算では，n =16 で逆になっていて間違っていることに気付いたと思われ，関は 17 桁，小数第 16 位まで円周率に一致する値を得ていたが，12 桁の 3. 14159265359 微弱を定周とした．正しく計算していれば，19 桁，小数第 18 位まで円周率と一致しており，おそらく関孝和は建部賢弘に再計算を委ねたのではないかと推察するが，建部賢弘は円弧の長さの問題とともに多くの時間をかけて研究することになる．後の議論のために，上界と下界の表を付ける.

表1. 関孝和の計算結果を使った円周率の上界と下界

n （角数)	上界	下界	一致する桁数
12（4096)	3. 14159265358980 23022（14桁一致)	3. 14159265358979 09763（15桁一致)	14
13（8192)	3. 1415926535897938066	3. 141592653589793 09888	16
14（16384)	3. 1415926535897932748	3. 1415926535897932308	17
15（32768)	3. 1415926535897932597	3. 1415926535897932525	17
16（65536)	3. 1415926535897932476	3. 1415926535897932488	17

表2. 計算機で行った数値からの上界と下界

n （角数)	上界	下界	一致する桁数
13（8192)	3. 1415926535897938047128	3. 1415926535897930968994	16
14（16384)	3. 1415926535897932738532	3. 1415926535897932296150	17

15 (32768)	3.1415926535897932406745	3.1415926535897932379096	17
16 (65536)	3.1415926535897932386008 (19桁一致)	3.1415926535897932384280 (20桁一致)	19

第三求円周径率

近似分数による円周率計算，3/1 から始めて上記の定周と比べて，小さければ分母分子に 1,4 を，大きければ分母分子に 1,3 を加えて，次々に古来から知られる近似分数を見いだし，355/113 まで至り，これがかなりよい近似分数として採用できることを確認.

「第三求周径率」の表に3/1は古法，22/7を率と書いているが通常は約率と呼ばれている. これは建部賢弘著「算学啓蒙諺解大成」総括，十丁表から裏にかけて「古法圓率」「劉徽新術」「冲之密率」の節があり，それぞれ3/1，157/0（＝314/100)，22/7と“円周率”を紹介している．「算学啓蒙諺解大成」下末，開方釋鎖門三十四問冲の第26問に，古円，密円，徽円が登場する問題があり，それぞれ，“円周率”を3/1，22/7，157/50＝314/100とした面積を持つ円とするものとしている．実は，原著「算学啓蒙」総括でこのように書かれている．明治前日本数学史第一巻ｐ390－ｐ391にも「これを見ると祖冲之の綴術の略率を密率とし，密率355/113は全然知らなかったのである.」とある.
これから，22/7を密率とする“誤解”が生まれたものと思われる. この段階で祖冲之が密率355／113，約率22/7を見つけて「綴術」という書物に書いていることを関孝和も建部賢弘も知らず22年程の後に隋志を観て知ることになる.
（明治前日本数学史第二巻ｐ299）では,

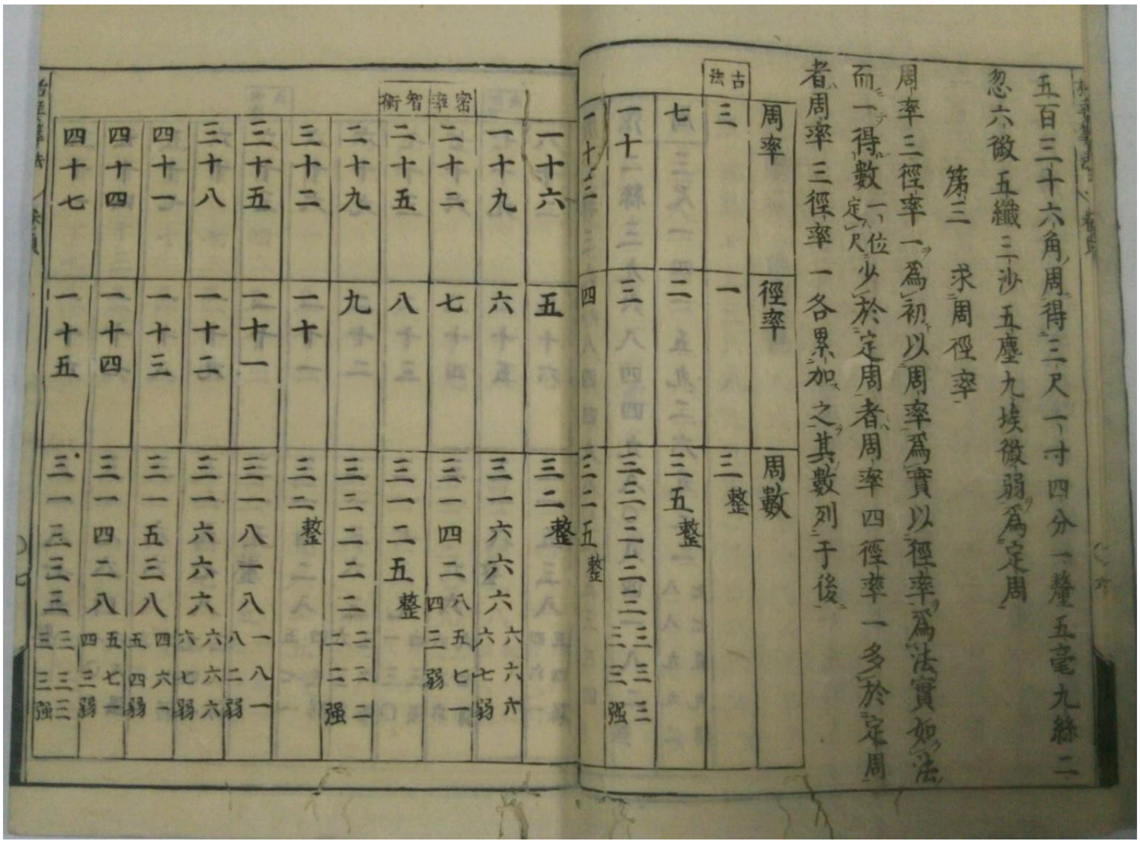
>（「綴術算経」では）「嘗関氏円を砕抹して定周を求め零約の術を以て径周の率を造れり爾して後二十餘年を歴て隋志を観るに周数率数咸邂逅に符号する者有り沓祖子也関子也邦を異にし時を殊にすと雖真理に会すること相同じ可謂妙なりと」

引用した後,

>「これによると孝和が零約術によって径周百十三，周率三百五十五を隋書の祖冲之の記事を全然知らずして得たように見える．しかし,数学乗除往来に祖冲之の名はないが355/113のことは記されているのである．あるいはこのことを目標に出したものか明らかでない.」

と藤原松三郎は書いているが，後者の見解が正しいだろう. すなわち，関は密率と呼ばれることを知らず「数学乗除往来」第四問にでてくる355/113をよい近似値として認められることを導くことを目標として円周率の近似計算を行った，と考えられる.

『括要算法』貞巻より近似分数の表



冒頭に引用したように建部賢弘が関は増約術を使ったと書いている．関の原稿が反映されていると考えられている『括要算法』亨巻の諸約之法の増約は，定数倍の数が次々に加えられ増える場合の等比数列の和，すなわち，極限を求める方法である．例題が2つあり公比が分数で与えられると，分母/（分母−分子）を原数に掛けるという計算をしている．

例題 110/(1−6/10)＝10∗10/(10−6)＝100/4＝25

例題 215/(1−2/5)＝15∗5/(5−2)＝75/3＝25

『括要算法』貞巻の「第二求定周」で書いている式はまさにこの書き方であり，増約術によると書いてはいないが，等比級数の和を求めている．従って，関は内接正2^n角形の周の長さL_nの階差の比が定数0.25に近いことを観察し，内接正2^n角形の周の長さの増分が公比 0.25 の等比級数とみなせると考えたからこそ，増約術を使った，と考えられる．文献上に残っていなくても，計算過程でそろばん上で周長の階差数列がほぼ公比 0.25 で単調減少であると観察したはずである．公比0.25で増約術を使わなかったのは，円周率の上界ではなく下界にしかならないからであろう（実は近似分数の導出にはこの数値を比較対照の数値でも同じ近似分数表ができるが，なぜ公比1/4を使うかの説明を書き加えておかなくてはならず，そこでの結論には不要なので書き込まなかった，と考えられる）．ただし，関は気付いたはずだが，少し計算ミスをしており，最後の数値で上界が下界より小で逆転している．

表1. 関孝和の計算結果を使った円周率の上界と下界

n	上界	下界	一致する桁数
13	3. 1415926535897938066	3. 1415926535897930988	16
14	3. 1415926535897932748	3. 1415926535897932308	17
15	3. 1415926535897932597	3. 1415926535897932525	17
16	3. 1415926535897932476	3. 1415926535897932488	17

そこで, 上界と下界を比較し小数第16位まで合っていると思われるが, 小数第13位までに限定すれば階差が正確に1/4になっており，その位までは正しい計算になっていると考え，その位までの数値を使って，小数第12位または第13位で繰上げして同じ数値が並ぶ結果となる数値 3. 14159265359 微弱を定周と確定したと考える．元々『数学乗除往来』の中で円周率の近似分数として355/113も現れ, どのように導出せるか当時課題となった．村松茂清は『算俎』（寛文 13（1663）年刊）において内接正2^n角形の周の長さL_nを$n=15$まで計算し，3. 14159264877698869248 弱を得たが,『算学啓蒙』に言及のあった祖冲之の22/7＝3. 41592657 餘と比べ, 3. 14 までは真の値と合っていると断言したが, 本当は3. 14159265 まで合っていた．355/113＝3. 1415929035…であり，村松の値と比較しても3. 141592 までは合っていることが分かるが，関孝和は内接正2^n角形の周の長さL_nを$n=17$まで計算し，3. 1415926532889927759 を得て 3. 141592653 まで合う値を得ているので，355/113 と 3. 141592 までは合うと主張できたはずで, 敢えて定周を定めそれと比較して近似分数を導いていく方法をとっている．定周は内接正 131072 角形の周の長さより精確な円周率の値として設定されたと思われ，数値の精確さを知るためには上に補足説明したように，上界と下界を見た上で判断したと推察される.

§3. 建部賢弘の円周率の近似計算について

建部賢弘は『研幾算法』の発刊（天和3（1683）年秋）前に関孝和の円周率の近似計算の方法を勉強したものと考えられる. その後，関に再計算を促されたか，あるいは自分自身の問題としてこの問題に取り組み，筆者の推察では,「算法大成」編集プロジェクトが天和3（1683）年夏に始り，関孝和の代数方程式関係の原稿を整理する一方で『発微算法演段諺解』を貞享2（1685）年に刊行し,「算法大成」の準備も兼ねて『算学啓蒙』を読み込み整理して,『算学啓蒙諺解大成』を発刊する. その時（元禄3（1690）年）前後から北條家の養子となり甲府藩小十人組御番として元禄5（1692）年に出仕するくらいまでに, 後に「大成算経」巻十二に掲載される円周率の近似計算を行ったものと考えられる（横塚啓之氏は「建部賢弘が累遍増約術を用いた計算をしたのは，建部賢明が「算法大成」が成ったという元禄中年であろう」としている［11］）. 冒頭にも引用した「綴術算経」では

「始関氏増約の術を以て定周を求る事を理會して一遍にして止む故に十三万千七十二角に到る截周を求て十五六位の真数を究め得たり今累遍増約の術を用る事を探り會して千二十四角に到る截周冪を求て四十餘位の真数を究む是亦首より増約累遍を用る事を察すへからす一遍の増約を用て後玄く探て累遍する事を會せり」

と書かれたように累遍増約の術を用いて正 1024 角形に至る截周冪を求めて，まず 25 桁くらいの円周率の近似値を得た．この段階では，小数第 40 位まで正しい円周率の近似値は計算できていないと考えられる．（なお，和田秀男，森本光生，小川束らの先行研究（例えば［1］［2］［3］参照）により，截周冪を使った計算では小数第 40 位まで正しい結果は算出できないことが知られ，下に見るように截周による計算を行い，截周冪のときも同じと見做し上記のように恍べた，と考えられている（横塚啓之[12][13]も参照）．（再度引用するが「綴術算経」「不休綴術」では）

嘗関氏円を砕抹して定周を求め零約の術を以て径周の率を造れり爾して後二十餘年を歴て隋志を観るに周数率数咸く邂逅に符号する者有り咨祖子也関子也邦を異にし時を殊にすと雖真理に会すること相同じ可謂妙なりと」，
「昔時関氏円を砕抹して定周を求め零約の術に依て径周の率を造れり二十余年の後にして始て隋志を観るに周数率数咸ク符号す鳴呼邦を異にし時を異にすと雖真理に会するときは相同じ可謂妙なりと」

関孝和の円周率の近似計算の原稿ができたと考えられる延宝 8（1680）年 7 月くらいから 20 年ほど後となる元禄 14（1701）年頃に関が勘定頭に差添られ，建部賢明が「この冬から一人で“算法大成”に詳しい註をつけ“大成算経”を編集し始める」年で，23 年後の元禄 16（1703）年に（関は致仕，病免），建部賢弘は北條家を去り建部実家に戻ってから納戸として甲府藩に仕えることになる年で，公務に空白ができ，円周率などの研究に時間を振り向けられたのではないか，と推察する．また，桁数の多い計算のできること，中国文献にも通じていること，そこに書いてあることよりもよい結果を得ていることなど，建部の優秀さを示し，北條家を離れて建部家に戻っても三男にも拘わらず引き続き出仕できるようになるためにも，研究を行ったのではないか，ということも考えられよう．いずれにせよ，暦算にも関わって隋志を観ることになり，祖冲之の存在を知り，「綴術」という書物に密率約率が書かれていることを知り，建部自身はそれ以上の結果を発展させた方法で行ったことになる．そして，さらに 20 年程後，享保 7（1722）年に序文を書き「綴術」という言葉の入った書，「綴術算経」や「不休綴術」を著すことになる．下に“隋志”，すなわち，**隋書卷十六**志第十一律曆上（隋書/卷 16-维基文库，自由的图书馆(wikisource.org)）を引用する：

古之九數，圓周率三，圓徑率一，其術疏舛．自劉歆，張衡，劉徽，王蕃，皮延宗之徒，各設新率，未臻折衷．宋末，南徐州從事史祖沖之，更開密法，以圓徑一億

為一丈，圓周盈數三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽，朒數三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽，正數在盈朒二限之間．密率，圓徑一百一十三，圓周三百五十五．約率，圓徑七，週二十二．又設開差冪，開差立，兼以正圓參之．指要精密，算氏之最者也．所著之書，名為《綴術》，學官莫能究其深奥，是故廢而不理

このように考えると，元禄 14〜16 年くらいに「弧背截約集」上巻に書かれている円周率の近似計算がなされ，小数第 40 位まで正しい数値」

まき

3.1415926535897932384626433832795028841971 2

を定周を求めようとした計算で得たと推察される．

実は，「綴術算経」には

3.14159265358979323846264338327950288419712 強

を定周とするとあり，「不休綴術」では

3.14159265358979323846264338327950288419712

を定周とするとある．横塚啓之氏が発掘した建部賢弘著と考えられる「「弧背截約集」上巻の十丁表に計算表の最後があり，十丁裏には 2 桁削って

3.141592653589793238462643383279502884197 強

を定周と定めており，「綴術算経」では記述を誤った，と考えられる．「不休綴術」でも計算表の最終結果をそのまま掲載してしまい確認を忘れたものと思われる．

弧背截約集」の上巻には円周率の計算表が掲載されている．関孝和の円周率の計算表と同様に正 131072 角形まで書く欄があるが，周の長さは，正 128 角形までは小数第 42 位まで，正 1024 角形までは小数第 41 位まで，正 2048 角形から正 8192 角形までは小数第 18 位まで，正 16384 角形では矢は小数第 41 位，周は単に 3.14 としか記しておらず，正 32768 角形，正 65536 角形では矢は小数第 12 位まで，周は空欄，正 131072 角形については全部空欄になっている．

正 1024 角形までの数値については横塚啓之[12][13]は検証し，正 8 角形の周の長さを計算間違いがあることを指摘した上で，円周率の小数第 41 位が 6 であることも念頭に，次のように述べている：

「記されているままの数値を用いて計算すると，
3.14159265358979323846264338327950288419711760･･･
となり，末位は「七一二弱」となるので，この点で「綴術算経」（内閣文庫本）の「強」とは異なる．その理由について，筆者は現時点では「弱」を「強」と誤っ

て記してしまったか，あるいは，もっと桁数を多くして計算すれば「七一二強」となるかのいずれかであろうと推測している」**後者であるかどうかは，正八角形における計算の誤りを復元し，桁数を増やして計算する必要がある．**」

さて, 以下で[7][8][9]に書いたように以前から問題としている, 関孝和の円周率の近似値について，建部賢弘が「綴術算経」では「十五六位の真数」，「不休綴術」等では「二十許位の真数」を究めたと述べていることに関わって，どこまで検証していたかについて議論する．

- 「弧背截約集」上巻に記載されている，正2048角形から正8192角形までは小数第18位までの周の長さは次の通りで．関孝和の数値の小数第18位までと同じである。

正2048角形の周の長さ3. 14159142151119997

正4096角形の周の長さ3. 14159234557011774

正8192角形の周の長さ3. 14159257658487266

上に掲げた上界と下界の表１から, 円周率の16桁，小数第15位まで正しい値を得ていたことを建部賢弘は再確認できたはずである．**すなわち,**「綴術算経」に書いている「十五六位の真数」が出てくることを確認できている. これ以上は今までに知られている文献にはないので,「不休綴術」等に書いてある「二十許位」は筆者の感覚では説明できないと思われるが, 16桁が20桁くらいとみなされれていることになる，関孝和の残した数値から17桁まで真数に合致していたことは天和3（1683）年頃に確認しているはずだが，その方法で再確認しただけかもしれない.

§4. 宅間流鎌田俊清の円周率の近似計算について

『明治前日本数学史』（第三巻ｐ408）では宅間流の第三代、鎌田俊清の円理をの研究を紹介している.『宅間流円理』の『平円周率起源』(1722)において,

円に内接する正2^{44}角形の周の長さを計算して

π>3. 14159265358979323846264336658

π<3. 14159265358979323846264341667

を出したこと（内接多角形と同時に外接多角形を考えてπを挟む数値を出したのは，和算ではこれ以外にはない）

と冒頭に、括弧書きで註付けても述べている．内接正n角形の一辺の長さをa，内接正$2n$角形の一辺の長さをb，外接正n角形の一辺の長さをAとすれば，相似関係から

$A=\dfrac{a}{1-2b^2}=\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}$ であることがわかり，従って，外接正n角形の周の長さ

$K_n = \dfrac{L_n}{\sqrt{1-\left(\dfrac{L_n}{2^n}\right)^2}}$ であることを使って計算していることを解説し,両者の平均値を均周と名付け,計算し四捨五入した値,3.1415926535897932384626434 をもってπの値とした,と結んでいる.

従って,正2^{44}角形の周長から小数第24位まで正しい値を得たことになる.鎌田が行っている方法は正しく,内接正n角形の計算をしておけば外接正n角形の計算は比較的容易で,それらを比べて何位まで円周率の真の値と一致しているかは確認できる.

しかしながら,極めて効率が悪く,関や建部は採用しなかった,と筆者は考える.内接正多角形の周の長さの計算しかしていないが,上で説明したように,辺の数を倍々にしていき単調増加列を作り,それから増約法で,円周率の上界と下界を計算することで,近似値が得られることを理解し,計算を実行していたと推察できる.

ところが,関や建部の真意をくみ取れず,『明治前日本数学史』(第三巻 p 408)の括弧書きの註にある「内接多角形と同時に外接多角形を考えてπを挟む数値を出したのは,和算ではこれ以外にはない」をもって,鎌田の業績のみを賞揚する科学史研究者の論文があり,さらには和算の論理的欠陥にまで結びつけている.

§5. 科学史の研究者による解説

中村邦光「江戸時代の日本における円周率の値の逆行現象」([6])は,1980年代,板倉聖宣氏との共著として日本科学史学会機関誌「科学史研究」に3本の論文として掲載されたものを中村氏が後に論文としてまとめ,さらに解説として講演記録を残したものである.いくつか論点があるが,ここでは,円周率の近似値計算のために内接及び外接多角形の周長を計算し同じ値となる位まで正しい値である,という推論法以外にも,関孝和や建部賢弘の用いた増約法により円周率の上界と下界を求める,という数学的推論法もあり,また関が実数の連続性の公理「上に有界な単調非減少列は極限を持つ」および「下に有界な単調非増加列は極限を持つ」ということを直観的に理解していたことに中村氏は気付かずにいることを指摘しておく.

『明治前数学史』で藤原松三郎が指摘したのはあくまでも直観的に分かりやすい内接多角形と外接多角形の周の長さで円周率を挟んで評価したことを書いたのは(彼が調査した限りで)和算では鎌田俊清のものだけである,と言っているだけで,それ以上は主張していないと思われるが,中村邦光氏は(上に説明したような関や建部の円周率についての業績の真意を理解せず)次の節に引用したように主張するのである:

> 「・・・25種の本のうち円周率を3.14…(円積率0.785としているものは10点,円周率を3.16…(円積率0.79)としているものは13点,同じ本で3.14…系の値と3.16…系の値の両方出てくるものが2点であった.
>
> すなわち,円周率の値を3.16…とする和算書が半数以上をしめていることが判明した.要するに,円周率の値に逆行現象がみられたのである.何故であろうか.

文政年間（1818〜30）といえば，村松茂清の『算俎』（1663）の出版から155〜163年も経っている．そして「円周率の値は3.16（$\sqrt{10}$）や3.162などではなく，3.14…である」ということが数学的に明らかにされてから，すでに相当の年月が経っている．いや，年月が経っているだけではない．日本における円周率の値は『算俎』（1663）の出版の年から10年ほどの間に一度はほとんどすべての和算書において3.14…に統一されたはずなのである．

それなのに，それから150年も後の円周率の値を3.16…とするものが過半数をこえたということは，どう理解したらよいのであろうか．

じつは，そのようなこととなった要因として，一つには18世紀以降の和算家は，17世紀の和算にみられた実用・実測的な問題への関心を失ったこと，そしてもう一つ重要な原因は，円周率の値を計算するに当たり，内接多角形の周の長さを計算して定量的精度のみを追求し，内接と外接とで挟む「数学的証明の概念」が欠如していたことである．

すなわち．そのために円周率の値3.14…の正しいことを当時の識者（儒学者など）に説得することができなかったためと思われる．

例えば，橘南谿（1756〜1816）の随筆『北窓瑣談』（ほくそうさだん：1829頃）には．

> 円法に到りては遂に算し極める事能わず．今に到り三一六或は三一四と色々に論ずれども，なお極め難き所あり，是円は陽にして動く物故，算数にかからざるものなるべし…

などという記述がある．また，荻生徂徠の孫弟子にあたる儒学者であった湯浅常山（1708〜81）の『常山楼筆餘』（じょうざんろうひつよ：1761〜1781頃）には．

> 平円の中へ方（四角）を容れたる時，方につかえたる余，孤田のかたちとなる．その方につかえたる余の一所を「兆」という．…凡そ天下の事，理とわざと二つあり．…わざにて円周をなすべけれども，理を以て視れば必ず十三万余の「兆」あり．その「兆」のおびただしき算数の及ぶべきに非ず．「中根元圭と物子（荻生徂徠）円率を論じて決せざりしはこのことなり」と春台（太宰春台）吾亡友石叔卿（井上蘭台，1705〜61）に語られしを…叔卿われに言いしなり（送り仮名を補い，平仮名交じり文に改めた）

などと記載されている．

すなわち，儒学者の荻生徂徠（1666〜1728）は，数学者の中根元圭（1662〜1733）と円周率についてもかなりたちいった議論をしていたのである．（（[6]） p44より，下線は講演者による）．」

…

「日本の数学・和算は，17世紀から18世紀初頭にかけて，まれにみる発展を遂げた．しかし，それはついに本格的な微積分学を生み出し得なかったこともよく指摘される．

そして，18世紀半ば以降には，数学を物理・技術的な問題と結びつけることに留意しなくなり，単なる遊芸と化したためにその発展が阻害されたのだ，ということもよく指摘されることである．たしかに17世紀の和算書には，産業や技術に関する問題がよく出てくるが，18世紀以降の和算書にはほとんど見られなくなる．しかし，江戸時代の数

学・和算の欠陥は，それよりももっと深いところにあったのではないだろうか，

すなわち，18世紀以降の「和算」は，それを趣味や娯楽の対象とし，いたずらに難問・奇問を追求するようになり，物理・技術的な事柄に対する関心を失うと同時に「教育・啓蒙」に対する関心も，また基礎から高度への「学としての論理的一貫性」（証明概念を含む）をも失っていったということであり，そのことは特に問題であったと思われる．

すなわち，和算における円周率の研究（円理）は，17〜18世紀の日本において定量的精度を追及して発展したといえる．そしてその際，数学的証明の概念のような定性的・論理的な追及は無視されたわけであり，そこに和算の限界があったといえよう．

18世紀初頭の日本において，せっかく宅間流の鎌田俊清がその独創的方法（πを内外から挟む考え方）によって円周率を算出していたのであるが，これはその後の日本ではまったく継承されなかったのである．そして，円周率の値3.14…は，その正しいことが全面的には理解されず，そのためにかなり多くの人が再び旧来の3.16…（$\sqrt{10}$）という値を採用することとなった．すなわち，円周率の値に「逆行現象」が生じたのである．

そして，宅間流の和算家，鎌田俊清の業績が当時の和算家たちに認められず，その後に継承されなかった一連の経緯は，和算の限界を端的に示すものであり，家元制度的な秘密主義と保守主義と，そして権威主義とが在野の独創性を無視し，結果的には学問の進歩を妨げることとなった事例の一つともいえると考える次第である．

以上、江戸時代の日本における円周率の正しい「理解」（3.14…）と「誤解」（3.16…）の間の試行錯誤の過程を紹介した（([6]) p47より，下線は講演者による）.」

§6. 教訓；数学研究者による一般社会への成果解説の重要性と一数学教育の大切さ

前節で引用したような“誤解”が生じる理由は，数学者による成果の分かりやすい説明がなかったということと,儒学者にも数学教育が行き届いておらず“極限概念”が理解されていないことによると考えられる．関孝和遺稿『括要算法』の記述はエッセンスのみであり解説はほとんどんく,建部賢弘「綴術算経」や「不休綴術」の記述は解説的であるが数学者向けで非数学者向けとは言えない．より分かりやすい解説が必要であった,と思われる．一方,儒学者たちも“極限概念”を受け付けず数学教育がなされていなかったと思われる．円に内接する正多角形の辺数を固定すれば円ではないが，辺数を大きくしていき限りなく一定の値に近づいていく，という極限の定義が理解されていない．このことは現代社会､現代数学教育でも同様の事情がある．数学がさまざまな問題解決に役立つことが認識され.数学が社会を支えている現代社会においては双方がより歩み寄る必要がある.数学者はより一般社会に成果をわかりやすく解説する必要があり，一般社会人もそれを理解可能であるような数学教育を受け入れなくてはならないだろう.

謝辞

研究集会代表者，編集者には発表の機会を与えて戴き，また，査読者には不備な点等をいくつか指摘を受け改訂に役立たせることができ感謝する次第である．

末筆ながら,筆者は小松彦三郎先生の論文[4] [5 に影響を受けたが小松先生が 9 月生まれで 2022 年正月に数え年で米寿を迎えらていることをお祝いする．また，森本光生先生が満年齢で傘寿を迎えられていることをお祝いする．両先生の数学史の研究に対するご貢献に感謝するとともにご健勝であられることを祈る次第である（残念ながら小松彦三郎先生は原稿執筆中にご逝去された.ここにご冥福をお祈りすると共に数学史の研究へのご貢献を讃えるものである.可能ならば 2022 年 12 月 5 日挙行の関孝和 314 年祭記念法要および円周率碑の除幕式にご出席を願い，関孝和先生の世界に先駆けた業績を讃えたかった.［11］）.

参考文献

［1］小川束，建部賢弘の円周率の計算円理の萌芽，数理解析研究所講究録 1019 巻,1997 年,pp1-39

［2］小川束，平野葉一，「数学の歴史一和算と西欧数学の発展，朝倉書店，(2003)

［3］小川束，佐藤健一，竹之内脩，森本光生，『建部賢弘の数学，共立出版，(2008)

［4］小松彦三郎，「綴術算経の異本と成立の順序」,数理解析研究所講究録 1130 巻,2000 年,pp229-244

［5］小松彦三郎，「綴術算経の異本と成立の順序補遺」,数理解析研究所講究録 1392 巻,2004 年,pp69-70

［6］中村邦光「江戸時代の日本における円周率の値の逆行現象」，計量史研究 =BulletinoftheSocietyofHistoricalMetrology,Japan38(1),42-48,2016，日本計量史学会 (江戸時代の日本における円周率の値の逆行現象|CiNiiResearchから文献検索可能)

［7］真島秀行，関孝和の円周率の計算についての注意，京都大学数理解析研究所講究録 1625，2009 年 4 月，pp192-199

［8］真島秀行，関孝和三百年祭に明らかになったこと，数学史研究第 200 号，2009 年 3 月，pp5-15

［9］真島秀行，建部賢弘の円周率の計算の発想について,2013 年 11 月 17 日の日本数学史学会研究発表会における発表資料

［10］真島秀行，日本の数学関係の周年事業について，京都大学数理解析研究所講究録別冊 B85，2021 年 7 月，pp183-186

［11］真島秀行，関孝和 414 年祭記念行事を終えて，数学セミナー2023 年 5 月号，2023 年 4 月，p50-53

［12］横塚啓之，「建部賢弘の著と考えられる『弧背截約集』について」，数学史研究 182, 2004，pp1-39

［13］横塚啓之，「弧背截約集」に記された建部賢弘の円周率の計算について，数学史研究第 209 号，2011 年 7 月，pp1-19