解説

創立70周年記念号 I

材料非線形性によるラム波高調波発生の理論解析

福井大学 松田 直樹　京都大学 琵琶 志朗

Theoretical Analysis of the Harmonic Generation of Lamb Waves Due to Material Nonlinearity

University of Fukui Naoki MATSUDA
Kyoto University Shiro BIWA

キーワード　非線形超音波法，ラム波，高調波，固有モード展開，相反関係，位相整合条件

1．はじめに

非線形超音波法による非破壊評価では，検査対象となる構造部材や欠陥が有する非線形超音波特性により発生する特徴的な周波数成分（高調波，和・差周波数成分，分調波など）に着目する。非線形超音波特性を発現するメカニズムは，非線形応力ーひずみ関係や転位運動など材料固有の非線形性（材料非線形性）と，閉口欠陥や界面の開閉口に起因する非線形性（界面非線形性）に大別できる。

平板やシェルなどの薄肉構造に対してガイド波を用いて材料非線形性を測定し劣化・損傷の非破壊評価を行おうとするとき，ガイド波が有する分散性，多モード性が非線形超音波特性に大きな影響を及ぼし得ることに注意する必要がある。例えば高調波発生に着目すると，材料非線形性を有する媒質中をある周波数の縦波が伝搬する場合，発生する高調波はもとの波（基本波）と等しい速度を持つため，高調波振幅は伝搬距離とともに累積的に増大する。一方，分散性を有するガイド波の場合，材料非線形性により発生する高調波は基本波と異なる速度を持つため，高調波振幅は累積的に増大しない。しかしながら，特別な伝搬モード，周波数を選択すると，基本波と高調波の位相速度が一致し，高調波振幅が伝搬距離に比例して増大することがある。ガイド波を用いた高調波計測ではこのような特徴をあらかじめ十分に理解しておく必要がある。

筆者らによる解説[1)]では，ガイド波の代表例であるラム波（平板を伝わるガイド波）に対して，分散性が高調波発生挙動に与える影響を説明するとともに，基本波と高調波の位相速度が一致する条件（位相整合条件）の理論的導出に関する研究成果を紹介した。位相整合条件を満たすように基本波のラム波モードと周波数を選択することにより，伝搬距離とともに高調波振幅が累積的に増大する測定条件で材料非線形性の評価を行うことができる。しかしながら実際の測定では検査対象となる構造材料に対して位相整合条件を厳密に満たす周波数を設定することは難しい場合が多い。位相整合条件を満たす周波数あるいはそこから外れた周波数においてラム波の高調波振幅が伝搬距離とともにどのように変化するかを知るには，材料非線形性を考慮したラム波伝搬の支配方程式を解析する必要がある。

材料非線形性を有する弾性平板を伝搬するラム波の高調波発生挙動に関してはこれまでに多くの理論解析が行われており[2)−6)]，その多くは発生する高調波をラム波固有モードの重ね合わせで表現し，ラム波モードの直交性や相反関係式[7)]に基づいて各モードの振幅を求める方法を用いている。本稿ではこの解析法を概説するとともに，これに基づいてラム波高調波発生挙動を解析した結果について紹介する。

2．ラム波高調波発生の理論

弾性平板を構成する物質粒子の基準配置（静止した無応力状態）における位置を表す直角座標を X_1，X_2，X_3 とする。平板は $-h < X_3 < h$ の領域を占め（平板の厚さは $2h$），中央面を X_1-X_2 面とする（**図1**）。物体力が作用しないとき，非線形弾性体（超弾性体）と仮定した平板の運動方程式および応力ーひずみ関係式は次式で与えられる[8)]。

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{U}}{\partial t^2} = \mathrm{Div}\, \boldsymbol{P} \quad \cdots\cdots (1)$$

$$\boldsymbol{P} = \rho_0 (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{H}) \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{E}} \quad \cdots\cdots (2)$$

ここで，ρ_0 は基準配置における密度，$\boldsymbol{U}$ は変位，$\boldsymbol{H}$ は変位勾配，$\boldsymbol{E}$ はグリーン・ラグランジュひずみ，$\boldsymbol{P}$ は第一ピオラ・キルヒホフ応力，Div は発散演算子，W はひずみエネルギー関数，$\boldsymbol{I}$ は恒等テンソルをそれぞれ表している。

ここで，平板をある伝搬モード（角周波数 ω_0，波数 κ_0）のラム波（基本波）が X_1 方向に伝搬し，材料非線形性により高調波（角周波数 $2\omega_0$）が発生する状況を考える。非線形性の効果は十分に弱く，基本波についてはラム波の線形理論[9)]で記述できると仮定し，摂動法により高調波の発生を解析する[2)−6)]。このため，平板の変位 $\boldsymbol{U}$ を以下のように基本波に対応する部分 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{L}}$ と非線形性による摂動部分 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{NL}}$ に分解する。

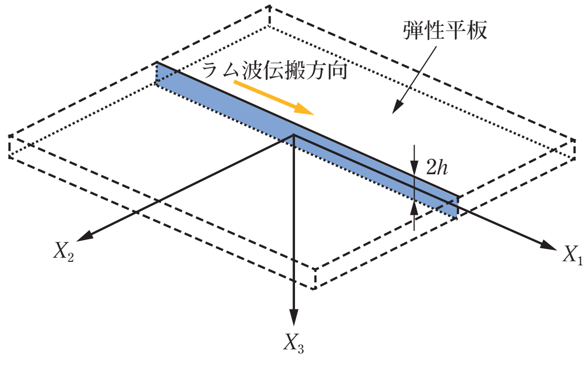

図1　弾性平板を伝搬するラム波

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{L}} + \boldsymbol{U}^{\mathrm{NL}} \quad \cdots\cdots (3)$$

ここで，非線形性により生じる変位 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{NL}}$ は基本波の変位 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{L}}$ に比べて十分に小さいと仮定する。

基本波の変位 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{L}}$ は式（１）で非線形性を無視した運動方程式

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{U}^{\mathrm{L}}}{\partial t^2} = \mathrm{Div}\, \boldsymbol{P}^{\mathrm{L}}\left(\boldsymbol{H}^{\mathrm{L}}\right) \quad \cdots\cdots (4)$$

および上下表面（$X_3 = h,\ -h$）を自由表面とする境界条件

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{L}}\left(\boldsymbol{H}^{\mathrm{L}}\right)\boldsymbol{N} = \boldsymbol{0} \quad \cdots\cdots (5)$$

に従う。ここで，$\boldsymbol{P}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{H}^{\mathrm{L}})$ は基本波の変位 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{L}}$ の勾配 $\boldsymbol{H}^{\mathrm{L}}$ に対応する応力 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}^{\mathrm{L}})$ の $\boldsymbol{H}^{\mathrm{L}}$ に線形な部分を表しており，$\boldsymbol{N}$ は上下表面における外向き単位法線ベクトルである。基本波の各物理量が X_2 に依存しない場合，以降の解析は X_1-X_3 面における二次元問題として扱うことができる。基本波（角周波数 ω_0，波数 κ_0 のラム波モード）の変位は複素数表示を用いて次式で表すことができる。

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{L}} = \mathrm{Re}\left[A_0 \bar{\boldsymbol{u}}^{(\kappa_0,\ \omega_0)}\left(X_3\right)\exp\left\{\mathrm{i}\left(\kappa_0 X_1 - \omega_0 t\right)\right\}\right] \quad \cdots\cdots (6)$$

ここで，$\bar{\boldsymbol{u}}^{(\kappa_0,\ \omega_0)}(X_3)$ はラム波の線形理論[9]で与えられる板厚方向変位分布であり，A_0 は基本波の振幅を表す定数である。なお，以下では複素数表示において実数部を取る表記（Re[･]）を省略する。

摂動解析（逐次近似）の考えに従うと，非線形効果により生じる変位 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{NL}}$ は，運動方程式

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{U}^{\mathrm{NL}}}{\partial t^2} - \mathrm{Div}\, \boldsymbol{P}^{\mathrm{L}}\left(\boldsymbol{H}^{\mathrm{NL}}\right) = \boldsymbol{G}^{\mathrm{NL}}\left(\boldsymbol{H}^{\mathrm{L}}\right) \quad \cdots\cdots (7)$$

および上下表面（$X_3 = h,\ -h$）での境界条件

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{L}}\left(\boldsymbol{H}^{\mathrm{NL}}\right)\boldsymbol{N} = -\boldsymbol{P}^{\mathrm{NL}}\left(\boldsymbol{H}^{\mathrm{L}}\right)\boldsymbol{N} \quad \cdots\cdots (8)$$

に従う。ここで，$\boldsymbol{P}^{\mathrm{NL}}(\boldsymbol{H}^{\mathrm{L}})$ は応力 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}^{\mathrm{L}})$ の非線形部分，すなわち $\boldsymbol{P}^{\mathrm{NL}}(\boldsymbol{H}^{\mathrm{L}}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}^{\mathrm{L}}) - \boldsymbol{P}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{H}^{\mathrm{L}})$ であり，また $\boldsymbol{G}^{\mathrm{NL}}(\boldsymbol{H}^{\mathrm{L}})$ はその発散を表す。式（７），（８）左辺の $\boldsymbol{P}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{H}^{\mathrm{NL}})$ は変位 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{NL}}$ の勾配 $\boldsymbol{H}^{\mathrm{NL}}$ に対応する応力 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{H}^{\mathrm{NL}})$ の $\boldsymbol{H}^{\mathrm{NL}}$ に線形な部分を表す。

式（７），（８）でわかるように，基本波にともなう応力の非線形部分 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{NL}}(\boldsymbol{H}^{\mathrm{L}})$ が変位 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{NL}}$ を生じる駆動力となっている。応力－ひずみ関係が変位勾配の二次の項を含む場合，この駆動力は二次高調波成分（角周波数 $\omega = 2\omega_0$）および直流成分（$\omega = 0$）からなるが，以下では二次高調波成分について考察する。このため，変位 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{NL}}$ の二次高調波成分 $\boldsymbol{U}^{2\omega_0}$ の複素数表示を $\bar{\boldsymbol{U}}^{2\omega_0}\exp(-2\mathrm{i}\omega_0 t)$，同様に応力 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{H}^{\mathrm{NL}})$ の二次高調波成分の複素数表示を $\bar{\boldsymbol{P}}^{2\omega_0}\exp(-2\mathrm{i}\omega_0 t)$ とすると，二次高調波成分を支配する方程式を以下の形に書くことができる。

$$\left(-2\mathrm{i}\omega_0\right)^2 \rho_0 \bar{\boldsymbol{U}}^{2\omega_0} - \mathrm{Div}\, \bar{\boldsymbol{P}}^{2\omega_0} = \bar{\boldsymbol{B}}^{2\omega_0}\left(X_3\right)\exp\left(2\mathrm{i}\kappa_0 X_1\right) \quad \cdots\cdots (9)$$

$$\bar{\boldsymbol{P}}^{2\omega_0}\boldsymbol{N} = \bar{\boldsymbol{t}}^{2\omega_0}\left(X_3\right)\exp\left(2\mathrm{i}\kappa_0 X_1\right) \quad \left(X_3 = h,\ -h\right) \quad \cdots (10)$$

ここで上式の右辺は式（７），（８）右辺の駆動力の二次高調波成分を表している。

３．固有モード展開による二次高調波振幅の導出

式（９）と（10）で示されているように，ラム波伝搬にともなう二次高調波を求める問題は，X_1 方向に沿って分布した振動外力による平板の応答を求める問題に帰着される。この問題についてはAuld[7]により相反関係式を利用した解法が示されており，ラム波高調波発生の解析にも多く用いられてきた。

本解析で用いる相反関係式は線形弾性体に対して以下のように表される。すなわち，複素数表示により物体力 $\bar{\boldsymbol{F}}^{(1)}$ による速度場 $\bar{\boldsymbol{V}}^{(1)}$，応力場 $\bar{\boldsymbol{P}}^{(1)}$ と，物体力 $\bar{\boldsymbol{F}}^{(2)}$ による速度場 $\bar{\boldsymbol{V}}^{(2)}$，応力場 $\bar{\boldsymbol{P}}^{(2)}$ を考え，これらがすべて $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$ の時間依存性を持つとすると以下の関係が成り立つ（変数の右上に付けたアスタリスクは複素共役を表す）。

$$\frac{\partial}{\partial X_j}\left(\bar{V}_i^{(2)*}\bar{P}_{ij}^{(1)} + \bar{V}_i^{(1)}\bar{P}_{ij}^{(2)*}\right) = -\bar{V}_i^{(2)*}\bar{F}_i^{(1)} - \bar{V}_i^{(1)}\bar{F}_i^{(2)*} \quad \cdots (11)$$

この関係式を用いると，外力のない場合のラム波伝搬モードに関する直交性の性質を導くことができる。すなわち，二つの波動場を角周波数 ω に対応する波数 κ_m，κ_n のラム波モードとして

$$\bar{V}_i^{(\alpha)} = \bar{v}_i^{(\kappa_p,\ \omega)}\left(X_3\right)\exp\left(\mathrm{i}\kappa_p X_1\right) \quad \cdots\cdots (12)$$

$$\bar{P}_{ij}^{(\alpha)} = \bar{\sigma}_{ij}^{(\kappa_p,\ \omega)}\left(X_3\right)\exp\left(\mathrm{i}\kappa_p X_1\right) \quad \cdots\cdots (13)$$

とおき（ただし $\alpha = 1$ のとき $p = m$，$\alpha = 2$ のとき $p = n$），式（11）を X_3 方向に積分して平板の上下表面が自由表面であることを用いると

$$\left(\kappa_m - \kappa_n^*\right)P_{mn} = 0 \quad \cdots\cdots (14)$$

$$P_{mn} = -\frac{1}{4}\int_{-h}^{h}\left[\bar{v}_i^{(\kappa_n,\ \omega)*}\bar{\sigma}_{i1}^{(\kappa_m,\ \omega)} + \bar{v}_i^{(\kappa_m,\ \omega)}\bar{\sigma}_{i1}^{(\kappa_n,\ \omega)*}\right]dX_3 \quad \cdots (15)$$

を得る。式（14）は,同じ角周波数に対応する二つのラム波モードについて，$\kappa_m \neq \kappa_n^*$ であれば $P_{mn} = 0$ が成り立つこと（ラム波モードの直交性）を示している。

相反関係式を用いたラム波高調波振幅の導出では，式（９），（10）の解が角周波数 $2\omega_0$ に対応するすべてのラム波モードの板厚方向分布 $\bar{\boldsymbol{u}}^{(\kappa_n,\ 2\omega_0)}(X_3)$ を用いて以下の重ね合わせで表されると仮定する。

$$\bar{\boldsymbol{U}}^{2\omega_0} = \sum_n A_n\left(X_1\right)\bar{\boldsymbol{u}}^{(\kappa_n,\ 2\omega_0)}\left(X_3\right) \quad \cdots\cdots (16)$$

ここで，相反関係式（11）に含まれる波動場 $\bar{\boldsymbol{V}}^{(1)}$，$\bar{\boldsymbol{P}}^{(1)}$ として式（16）と同様にラム波モードの重ね合わせで表現した速度，応力を用い，波動場 $\bar{\boldsymbol{V}}^{(2)}$，$\bar{\boldsymbol{P}}^{(2)}$ として角周波数 $2\omega_0$ のあるラム波モード（波数 κ_m とする）の速度，応力を用いると，式（14）を導くのと同様の計算により，次式を得ることができる。

$$\sum_n 4P_{nm}\left(\frac{d}{dX_1} - \mathrm{i}\kappa_m^*\right)A_n\left(X_1\right) = \left(f_m^{\mathrm{surf}} + f_m^{\mathrm{vol}}\right)\exp\left(2\mathrm{i}\kappa_0 X_1\right) \quad \cdots\cdots (17)$$

上式の右辺に含まれる f_m^{surf}，f_m^{vol} は

$$f_m^{\mathrm{surf}} = \left[\bar{v}_i^{(\kappa_m,\ 2\omega_0)*}\left(X_3\right)\bar{t}_i^{2\omega_0}\left(X_3\right)\right]_{X_3=-h}^{X_3=h} \quad \cdots\cdots (18)$$

$$f_m^{\mathrm{vol}} = \int_{-h}^{h}\bar{v}_i^{(\kappa_m,\ 2\omega_0)*}\left(X_3\right)\bar{B}_i^{2\omega_0}\left(X_3\right)dX_3 \quad \cdots\cdots (19)$$

で与えられ，それぞれ非線形性により二次高調波を励起する駆動力として与えられる表面力，物体力に対応する。

波数 κ_m が実数の場合（波数 κ_m のラム波モードが伝搬モードの場合），式（14）に示したラム波モードの直交性を用いると，式（17）左辺で $\kappa_n=\kappa_m^*=\kappa_m$ となる項以外は 0 となり，$n=m$ の場合のみが残る。すなわち

$$4P_{mm}\left(\frac{d}{dX_1}-\mathrm{i}\kappa_m\right)A_m\left(X_1\right)=\left(f_m^{\mathrm{surf}}+f_m^{\mathrm{vol}}\right)\exp\left(2\mathrm{i}\kappa_0X_1\right) \quad \cdots\cdots (20)$$

を得る。この常微分方程式を解くことにより式（16）で重ね合わせた各ラム波モードの振幅が得られる。特に，$X_1=0$ において $A_m(X_1)=0$ の条件を付して式（20）の解を求めると

$$A_m\left(X_1\right)=\tilde{A}_m\left(X_1\right)\exp\left(2\mathrm{i}\kappa_0X_1\right)-\tilde{A}_m\left(0\right)\exp\left(\mathrm{i}\kappa_mX_1\right) \quad \cdots\cdots (21)$$

$$\tilde{A}_m\left(X_1\right)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{i}\left(f_m^{\mathrm{surf}}+f_m^{\mathrm{vol}}\right)}{4P_{mm}\left(\kappa_m-2\kappa_0\right)} & \left(\kappa_m\neq2\kappa_0\right)\\[2ex] \left(\dfrac{f_m^{\mathrm{surf}}+f_m^{\mathrm{vol}}}{4P_{mm}}\right)X_1 & \left(\kappa_m=2\kappa_0\right)\end{cases} \quad \cdots\cdots (22)$$

となる。したがって，非線形効果により生じる角周波数 $2\omega_0$ の各ラム波モードのうち，波数 κ_m が基本波の波数 $2\kappa_0$ に対して $\kappa_m=2\kappa_0$ の関係（位相整合条件）を満たすモードについては式（21）右辺の第一項にある $\tilde{A}_m(X_1)$ が X_1 に対して比例的に増大し，高調波振幅が伝搬距離とともに増大する。

ラム波は分散性を有するため，基本波のラム波モードと高調波のラム波モードは一般に位相速度が異なり，位相整合条件は満たされない。微弱な高調波を測定する必要がある非線形超音波計測では，位相整合条件を満たすような基本波のラム波モードと周波数を選択することが重要となる。筆者らは等方弾性平板に対するラム波の分散関係式（レイリー・ラム周波数方程式）の解析に基づいて，位相整合条件を満たす基本波と高調波のラム波モードと周波数の組み合わせが四つの場合（ラメモード，縦波型対称モード，対称モードと反対称モードの交点，派生型レイリーモード）に整理できることを示した[1),10)]。これによれば，ラム波を用いた高調波計測に適した基本波のモード・周波数をあらかじめ知ることができる。さらに，式（21），（22）によれば位相整合条件を満たす周波数の近傍で高調波の振幅が伝搬距離とともにどのように変化するかを詳しく調べることができる。次章ではこれについて具体例を挙げて解析結果を紹介する。

なお，ここに示した解析法では，外力により加振される平板の速度場と応力場をともに式（16）の形の重ね合わせで表現するが，このとき応力－ひずみ関係は厳密には満たされていない。この点については最近，Zhang と Qu[11),12)] により詳しい検討と修正された解析法の提案が行われている。

4．ラム波高調波発生の周波数依存性

前章までの議論は実際には X_1，X_2 方向に均質な一般の異方性弾性平板を伝わるガイド波に対して成立するが，以下では均質・等方弾性平板を伝わるラム波について考える。等方弾性体に対するひずみエネルギー関数の具体形として，グリーン・ラグランジュひずみ $\boldsymbol{E}$ の三次の項までを含む形を考え，式（2）で与えられる応力で変位勾配の二次の項までを採用すると

$$P_{ij}(\boldsymbol{H})=P_{ij}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{H})+P_{ij}^{\mathrm{NL}}(\boldsymbol{H}) \quad \cdots\cdots (23)$$

$$P_{ij}^{\mathrm{L}}(\boldsymbol{H})=\lambda H_{kk}\delta_{ij}+\mu\left(H_{ij}+H_{ji}\right) \quad \cdots\cdots (24)$$

$$\begin{aligned}P_{ij}^{\mathrm{NL}}(\boldsymbol{H})=&\ \lambda\left(H_{kk}H_{ij}+\frac{1}{2}H_{kl}H_{kl}\delta_{ij}\right)\\&+\mu\left(H_{ik}H_{jk}+H_{ik}H_{kj}+H_{ki}H_{kj}\right)\\&+\frac{1}{4}A\left(H_{ik}+H_{ki}\right)\left(H_{kj}+H_{jk}\right)\\&+B\left\{H_{kk}\left(H_{ij}+H_{ji}\right)+\frac{1}{2}H_{kl}\left(H_{kl}+H_{lk}\right)\delta_{ij}\right\}\\&+CH_{kk}H_{ll}\delta_{ij}\end{aligned} \quad \cdots (25)$$

となる。ここで λ と μ は二次弾性定数（ラメの定数），A，B，C は三次弾性定数[8)]，δ_{ij} はクロネッカーのデルタ記号を表す。式（25）からわかる通り，応力の非線形部分 $P_{ij}^{\mathrm{NL}}(\boldsymbol{H})$ には材料非線形性に起因する項（A，B，C を含む項）に加え，変位－ひずみ関係に含まれる非線形性（幾何非線形性）に起因する項（λ，μ を含む項）も含まれている。

この応力－ひずみ関係を仮定し，厚さ 2mm のアルミニウム平板に対して，基本波としてラム波の S1 モードを仮定した場合の高調波発生挙動を前章の解析法によって調べた結果を以下に示す（S1 および以下で用いる S2，S0，A0 の記号はラム波モードの習慣的表記に従っている）。解析に用いた材料定数[13)] は**表 1** に示すとおりである。また，**図 2** に示すように，周波数 1.8MHz の S1 モードと周波数 3.6MHz の S2 モードの組み合わせは位相整合条件を満たす（筆者らの解析[10)] で「縦波型対称モード」として分類した場合に相当する）。そこで，二次高調波として特に S2 モードに着目し，このモードの振幅が基本波周波数 1.8MHz の付近で伝搬距離とともにどのように変化するかを解析する。

二次高調波振幅の尺度として，二次高調波のラム波モードの平板表面での X_1 方向変位振幅の，基本波のラム波モード（波数 κ_0）の X_1 方向変位振幅の二乗に対する比（以下では高調波

表 1　解析に用いた材料定数

ρ_0 (kg/m^3)	λ (GPa)	μ (GPa)	A (GPa)	B (GPa)	C (GPa)
2700	56.0	26.5	−408	−197	−114

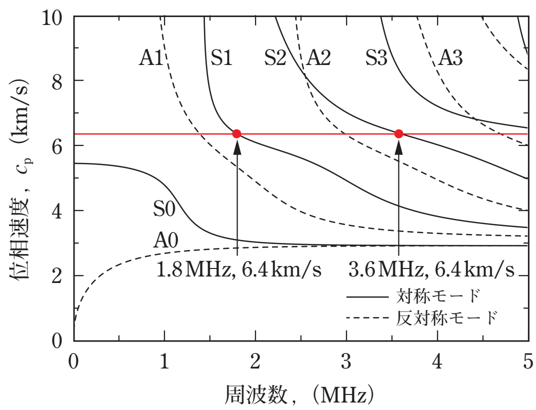

図 2　ラム波の分散曲線（厚さ 2mm のアルミニウム平板の場合）と位相整合条件を満たす基本波・高調波の例

解説

振幅比と呼ぶ）を次式で定義する。

$$R_m(X_1)=\frac{\left|A_m(X_1)\bar{\boldsymbol{u}}^{(\kappa_m,\,2\omega_0)}(h)\cdot\boldsymbol{e}_1\right|}{\left|A_0\bar{\boldsymbol{u}}^{(\kappa_0,\,\omega_0)}(h)\cdot\boldsymbol{e}_1\right|^2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (26)$$

ここで $\boldsymbol{e}_1$ は X_1 方向の単位ベクトルである。このとき，$R_m(X_1)$ は以下の因子の積として表すことができる。

$$R_m(X_1)=X_1 S_m T_m(X_1) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (27)$$

$$S_m=\left|\frac{f_m^{\mathrm{surf}}+f_m^{\mathrm{vol}}}{4P_{mm}}\right|\cdot\frac{\left|\bar{\boldsymbol{u}}^{(\kappa_m,\,2\omega_0)}(h)\cdot\boldsymbol{e}_1\right|}{\left|A_0\bar{\boldsymbol{u}}^{(\kappa_0,\,\omega_0)}(h)\cdot\boldsymbol{e}_1\right|^2} \qquad \cdots\cdots\cdots\ (28)$$

$$T_m(X_1)=\begin{cases}\left|\mathrm{sinc}\left(\dfrac{\kappa_m-2\kappa_0}{2}X_1\right)\right| & (\kappa_m\neq 2\kappa_0)\\ 1 \quad (\kappa_m=2\kappa_0) & \end{cases} \qquad \cdots\ (29)$$

式（28）の S_m は伝搬距離 X_1 に依存しない因子で，基本波から二次高調波へのエネルギー伝達の大きさを表す。一方，式（29）の $T_m(X_1)$ は二次高調波振幅の伝搬距離による増大を抑制する効果を表す。これはラム波の持つ分散性（波数と周波数が比例関係にないこと）に起因している。ただし例外的に $\kappa_m=2\kappa_0$ の場合（位相整合条件を満たす場合）は $T_m(X_1)=1$ であり，二次高調波振幅は伝搬距離 X_1 に対して比例的に増大する。

式（27）は，$\kappa_m\neq 2\kappa_0$ のとき

$$R_m(X_1)=R_m^{\max}\left|\sin\left(\frac{\kappa_m-2\kappa_0}{2}X_1\right)\right| \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\ (30)$$

$$R_m^{\max}=\frac{2S_m}{\left|\kappa_m-2\kappa_0\right|} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (31)$$

とも書ける。したがって，位相整合条件が満たされない場合，二次高調波振幅は伝搬距離とともに増大，減少を繰り返すが，そのときの上限値は式（31）の $R_m^{\max}$ で与えられる。

ラム波高調波発生挙動の解析結果に見られる分散性に特有の性質を明らかにするため，非分散性の波として縦波の二次高調波発生挙動について考えておく。式（23）～(25）の非線形弾性体中を縦波が X_1 方向に伝搬する場合，摂動解析により以下の解が得られる[8]。

$$\begin{aligned}U_1(X_1,\,t)&=A_0\sin\left\{\omega_0\left(\frac{X_1}{c_{\mathrm{L}}}-t\right)\right\}\\ &\quad+\frac{\beta}{4}\left(\frac{\omega_0 A_0}{c_{\mathrm{L}}}\right)^2 X_1\cos\left\{2\omega_0\left(\frac{X_1}{c_{\mathrm{L}}}-t\right)\right\}\end{aligned} \qquad \cdots\ (32)$$

$$c_{\mathrm{L}}=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho_0}},\quad \beta=-\left(\frac{3}{2}+\frac{2A+6B+2C}{2\rho_0 c_{\mathrm{L}}^2}\right) \qquad \cdots\cdots\ (33)$$

この場合の高調波振幅比を同様の因子に分解すると

$$R(X_1)=X_1 S T(X_1),\quad S=\frac{\beta}{4}\left(\frac{\omega_0}{c_{\mathrm{L}}}\right)^2,\quad T(X_1)=1 \quad \cdots\ (34)$$

となる。すなわち，非分散性の縦波では周波数によらず $T(X_1)=1$ であり，また基本波から二次高調波へのエネルギー伝達を表す S は周波数の二乗に比例する。したがって，ラム波では $T_m(X_1)$ の因子により位相整合条件を満たさない周波数に対して高調波振幅の増大が抑制されることが分散性特有の性質と言える。

S1 モードのラム波を基本波とし，基本波周波数を 1.6 MHz から 2 MHz の範囲で変化させたときの，S2 モードの二次高調波の R_m，S_m，T_m の計算結果を**図 3** に示す。なお，R_m と T_m については既報[6]よりも広い伝搬距離の範囲（$X_1=100$ mm，300 mm，1000 mm）に対して計算結果を示している。また，図 3（a）の $R_m^{\max}$ は式（30）からわかるように各基本波周波数に対する高調波振幅比 R_m の最大値を与えるため，異なる伝搬距離の結果に対して $R_m^{\max}$ が包絡線となっている。

図 3（a）からわかる通り，高調波振幅比 R_m がピークを取る

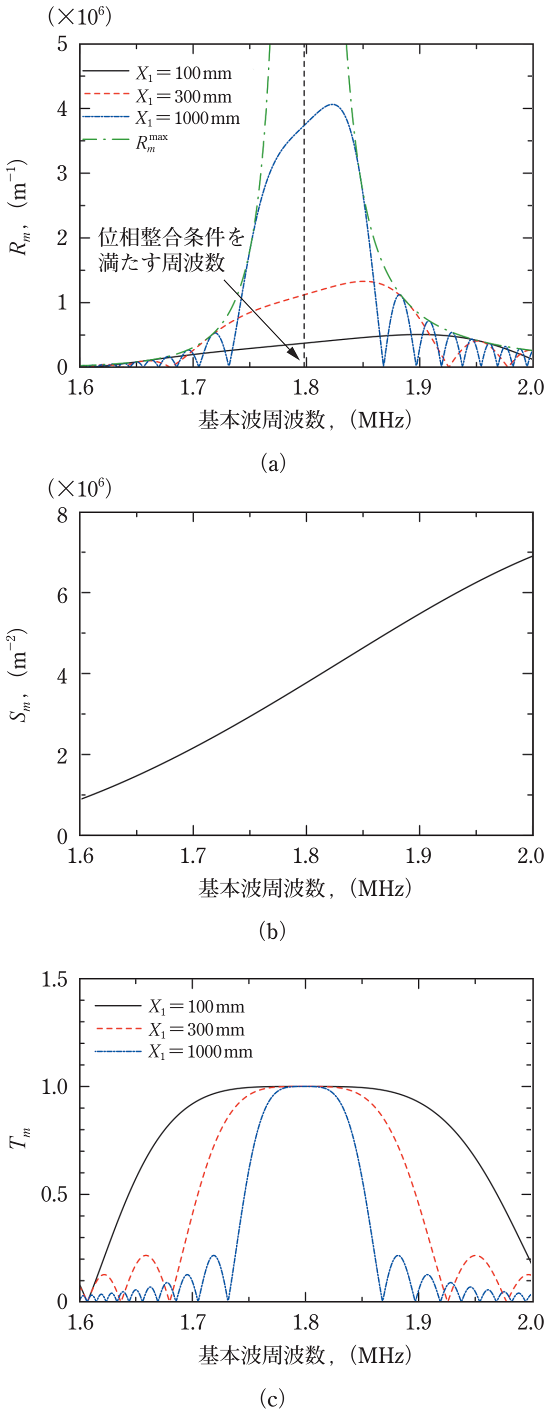

図 3　ラム波高調波振幅比の基本波周波数依存性

基本波周波数は伝搬距離によって異なり，また位相整合条件を満たす周波数（1.8MHz）とも一致しない。このことはS_m，T_mの因子を検討することにより理解できる。図3(b)に示すS_mは周波数に対して単調に増加する傾向を示しており，定性的には上に述べた縦波の場合にも対応する。図3(c)に示すT_mは位相整合条件を示す1.8MHz付近でほぼ1となっているが，そこから周波数が離れるにつれて減少しており，バンドパスフィルタ的な役割を果たしていることがわかる。このフィルタ効果には一定の周波数幅があるため，有限な伝搬距離においてはS_mの持つ単調増加な周波数依存性が効く結果，1.8MHzよりもやや高い周波数で高調波振幅比がピークを取っている。

このように，有限な伝搬距離においては位相整合条件を満たす周波数付近のある範囲において二次高調波振幅は伝搬距離とともに増大する。この特徴はラム波高調波計測を行う上で基本波周波数の設定に一定の許容範囲があることを意味しており，実用上も有用な知見である。なお，筆者らの解析[6)]では鋼についても解析を行っており，ここに示したアルミニウムと同様な傾向が示されている。また，筆者らは材料非線形性を考慮した弾性波伝搬解析のための時間領域有限差分法を定式化してラム波高調波発生挙動の数値解析を行い[14)]，これによる数値計算結果がここに示した理論解析の結果とよく対応することを確かめている。ただし，位相整合条件が満たされる場合であっても，実際には基本波から高調波にエネルギーが移ることにより基本波が次第に減衰するため，高調波の振幅増大には限界がある。この点については最近，KandaとSugiura[15)]により多重尺度法を用いた解析が行われており，材料の減衰特性の影響も調べられている。

5．おわりに

本稿では材料非線形性を有する弾性平板を伝わるラム波に対して固有モード展開と相反関係式による高調波発生挙動の解析法を解析例とともに紹介した。特に，直接的な数値計算を行うだけでは得られない知見として，ラム波の高調波発生挙動の周波数依存性を支配する因子について説明した。本稿では材料非線形性によるラム波の高調波発生挙動について考察したが，他のガイド波モードも含めた非線形伝搬特性やその非破壊検査への応用についての総説[16),17)]も発表されているので併せて参考にされたい。以下に，ラム波（ガイド波）の非線形特性に関して興味深いと思われるテーマを幾つか挙げて本稿の結びとする。

解説[1)]で示したように，位相整合条件を厳密に満たす基本波，高調波の周波数は特別な値に限定され，また高次モードのカットオフ周波数を超える場合が多い。これに対して，低周波数で分散性が弱いS0モードラム波を用いて高調波計測を行うことも検討されている[18),19)]。この場合，位相整合条件は近似的に満たされ，一定の伝搬距離までは高調波振幅が累積的に増大する。また，低周波数では伝搬モードがS0モードとA0モードに限定されることは測定面でも有利である。

位相整合条件が満たされる場合，基本波と高調波が同じ速度で伝搬するが，このことは入射波に含まれる測定系由来の高調波と材料非線形性により発生した高調波を分離するのが困難になることを意味している。この困難を解消できる測定原理として，異なる方向から異なる周波数のラム波（ガイド波）を伝搬させ，評価対象部で交差させた場合の和・差周波数成分の発生[20),21)]（周波数ミキシング）に着目する研究も行われている。

さらに，空間的に局在化した閉口欠陥では界面非線形性により高調波がより顕著に発生し得るが，この場合の高調波振幅は位相整合条件には必ずしも影響されない。一方，欠陥近傍での薄肉構造部材の共振によって高調波発生が増幅されることがあり[22),23)]，高感度な欠陥検出・評価への応用も期待される。

参考文献

1）琵琶志朗，松田直樹：ラム波の分散性と高調波発生挙動，非破壊検査，64(12), pp.554-559,（2015）

2）M. Deng：Cumulative second-harmonic generation of Lamb-mode propagation in a solid plate, J. Appl. Phys., 85, pp.3051-3058,（1999）

3）M. Deng：Analysis of second-harmonic generation of Lamb modes using a modal analysis approach, J. Appl. Phys., 94, pp.4152-4159,（2003）

4）W. J. N. de Lima and M. F. Hamilton：Finite-amplitude waves in isotropic elastic plates, J. Sound Vib., 265, pp.819-839,（2003）

5）A. Srivastava and F. Lanza di Scalea：On the existence of antisymmetric or symmetric Lamb waves at nonlinear higher harmonics, J. Sound Vib., 323, pp.932-943,（2009）

6）N. Matsuda and S. Biwa：Frequency dependence of second-harmonic generation in Lamb waves, J. Nondestruct. Eval., 33, pp.169-177,（2014）

7）B. A. Auld：Acoustic Fields and Waves in Solids, Vol. II, Wiley, pp. 151-162,（1973）

8）A. N. Norris：Finite-amplitude waves in solids, In: Nonlinear Acoustics, Academic Press, pp.263-277,（1998）

9）K. F. Graff：Wave Motion in Elastic Solids, Dover, pp.431-463,（1991）

10）N. Matsuda and S. Biwa：Phase and group velocity matching for cumulative harmonic generation in Lamb waves, J. Appl. Phys., 109, 094903,（2011）

11）P. Zhang and J. Qu：Forced guided waves in linearly elastic plates (I) - An examination of the normal-mode expansion, Ultrasonics, 108, 106231,（2020）

12）P. Zhang and J. Qu：Forced guided waves in linearly elastic plates (II) - A modified normal-mode expansion method, Ultrasonics, 108, 106232,（2020）

13）R. T. Smith, R. Stern and R. W. B. Stephens：Third-order elastic moduli of polycrystalline metals from ultrasonic velocity measurements, J. Acoust. Soc. Am., 40, pp.1002-1008,（1966）

14）N. Matsuda and S. Biwa：A finite-difference time-domain technique for nonlinear elastic media and its application to nonlinear Lamb wave propagation, Jpn. J. Appl. Phys., 51, 07GB14,（2012）

15）K. Kanda and T. Sugiura：Internally resonant guided waves arising from quadratic classical nonlinearities with damping, Int. J. Solids Struct., 216, pp.250-257,（2021）

16）V. K. Chillara and C. J. Lissenden：Review of nonlinear ultrasonic guided wave nondestructive evaluation: theory, numerics, and experiments, Opt. Eng., 55, 011002,（2016）

17）C. J. Lissenden：Nonlinear ultrasonic guided waves－Principles for nondestructive evaluation, J. Appl. Phys., 129, 021101,（2021）

18）X. Wan, P. W. Tse, G. H. Xu, T. F. Tao and Q. Zhang：Analytical and numerical studies of approximate phase velocity matching

based nonlinear S0 mode Lamb waves for the detection of evenly distributed microstructural changes, Smart Mater. Struct., 25, 045023,（2016）
19）W. Zhu, Y. Xiang, C.-J. Liu, M. Deng, C. Ma and F.-Z. Xuan：Fatigue damage evaluation using nonlinear Lamb waves with quasi phase-velocity matching at low frequency, Materials, 11, 1920,（2018）
20）M. Hasanian and C. J. Lissenden：Second order ultrasonic guided wave mutual interactions in plate: Arbitrary angles, internal resonance, and finite interaction region, J. Appl. Phys., 124, 164904,（2018）
21）Y Ishii, S Biwa and T Adachi：Non-collinear interaction of guided elastic waves in an isotropic plate, J. Sound Vib., 419, pp.390-404,（2018）
22）I. Solodov：Resonant acoustic nonlinearity of defects for highly-efficient nonlinear NDE, J. Nondestr. Eval., 33, pp.252-262,（2014）
23）T. Ye, S. Biwa and N. Mori：Second-harmonic generation of the lowest-order antisymmetric Lamb wave at a closed parallel crack, J. Acoust. Soc. Am., 148, pp.2073-2085,（2020）