プラットフォームとしての教育数学

三重大学名誉教授　蟹江幸博 (Yukihiro Kanie)
Professor Emeritus, Mie University

目次

数学の教育について，きちんと論じるための場（プラットフォーム）が必要だと思っている．論議と実践は，一般に，表裏一体の関係にあるから，教育の観点から数学を論議する場は，同時に，教育を意識した数学の実践の場でもある．そうした場（プラットフォーム）として,「教育数学（Educational Mathematics）」は考えられた．

教育数学は，教育を明確に意識しながら，数学について論じ，実践しようとする営みの総称である．本稿では，教育数学のうち，数学について“論じる”営みについて焦点を当ててみたい．

1　論議のプラットフォームとしての教育数学

1.1　共同体と価値

教育を“意識”して論じ実践する数学は，そうではない数学と何かが違うのだろうか.(「教育や数学が厳密には何を意味しているか」という難問については，今は触れないことにする．同様に，この章で使用する言葉の多くは，人によって受けとる意味がさまざまであることは承知の上で,“定義”をせずに使うことにしたい.)

教育を，教える者と学ぶ者の間で成り立つ関係が中心にあるものと考えることにしよう．今，教育について，教える側から見てみる．第一に言えることは，人が他の人に何かを教えているとき，教えている内容は，何かしら相手にとって“価値（value）”のあるもののはずだということである.(実際に，その場で当事者たちが意識しているかどうかは別だが.)

教育という関係が成立しているということは，この“価値”が，教えている者と学んでいる者に共有されている（と，少なくとも教えている側は思っている）ということであって，つまり，教育は，抽象的で，漠然とした言い方になるが，共同体（community）のなかで成立するものになる．

共同体という抽象的な枠組みを前提として解釈するなら，教えている内容の“価値”が，教える側にも学ぶ側にも共同体で自明視されるようなものであるとき,“価値”の共有が当事者たちに意識されることはないかもしれない．こうしたとき，教育は，共同体を維持するための手段ということになる．また，教える側が初めて見つけたことや考えついたことなど，既存の共同体で共有されていない事柄を別の者に教えようとするようなとき，教育は共同体の変革の手段ということになる．

いずれにしても，当事者がどの程度意識しているかは別として，教育の基盤には共同体の構成員が共有する（あるいは共有すべき）“価値”が横たわっているはずであり，教育的な実践はその“価値”の実体化のためのものであるはずだということになる．

それでは，最初の問いにもどろう.「教育を意識して論じ実践する数学は，そうではない数学と何かが違うのか」という問いである．今，答えを端的に言えば，教育を意識して実践される数学は，その教育を規定する“価値”に束縛されているのに対し，そうではない数学の方はそうした束縛を受けていないということになる.(「数学は自由である」というゲオルグ・カントールの有名な言葉があるが，教育を意識して実践する数学は，自由ではな

いということになる．もちろん，教育とは別種の“価値”に束縛されている数学の実践は，他にいくらもあるだろうが.）

1.2　二種類の「標準」

教育的な営みが“価値”に束縛されているのなら，それを論じ実践する際に，その背後にある“価値”を具体化した“標準（standard）”があると便利である．この“標準”には，大きく二つの種類が考えられる．

ひとつは，その“価値”を体現する教育内容自体を表現するもので，いわば模範（モデル）の役割を果たす“標準”になる．もうひとつは，個々の内容がその“価値”に則っているかどうかの判断を援けるもので，こちらは，いわば判定条件集（クライテリア）とでもいうべき“標準”である．

数学の教育についていえば,「教科書」の類（たぐい）は典型的なモデル型の“標準”というべきだろう．クライテリア型の“標準”の方は，あるいは，日本の初等・中等教育における「学習指導要領」などが例になるかもしれない[1].

いずれにしても，実際の“標準”の例について，これはモデル型の標準なのか，それとも，クライテリア型の例なのか，あるいは，そもそも“価値”をちゃんと体現しているのか，といった問題は，答えるのが難しい．例えば，教科書はすべてモデル型標準というわけでもない．一冊の教科書がモデルになることもあれば，同じ教科書が実際の授業を実践するためのクライテリアになることもある．実際，同一の教科書は，あるクライテリアに対応するモデルであると同時に，モデルとしてのある授業のクライテリアとしてのテキストでもありうる．つまり，モデル型とかクライテリア型というのは，具体的な事象を区分するものではなく，使い方であるとか見方といったものを表現していると思ったほうが良いことになる．

しかし，個々の事象をモデル型とクライアント型にきちんと二つの組に分けること（厳密な意味で,「類別する」こと）が無理であっても，こうした“モデル型とクライアント型からできている標準”という枠組は，現実に存在しているかどうかとは別の意味で必要だし，また，役に立つ．したがって，そうしたものに，きちんと名前をつけて，使い方を決めておこうというのが，教育数学の方法の要のひとつである[2].

1.3　教育を意識しながら数学を論じること

本稿の冒頭で,「教育数学とは，教育を明確に意識しながら，数学について論じ，実践しようとする営みの総称である」と述べた．

教育を意識しながら数学を“実践”することとして，わかりやすい例を挙げれば,“標準”となる教科書を作成することや，教科書を使って行われる数学の授業などが考えられる．それでは，教育を意識しながら数学を“論じる”ということは，何を意味しているのだろうか．

[1]ただ,「学習指導要領」のような現実的な話題になると，その背後にある共同体をどう思うか等々，やっかいな問題が多く現れる．

[2]「枠式の方法」，あるいは，より詳しく「枠式と型式の方法」と呼んでいる．

実際の例を，いくつか挙げてみる.（「教育数学」は，筆者たちが考案した言葉である．したがって，これから挙げる例は，“教育数学”の名の下で営まれたものではない．いわば，教育数学の先駆ということになる.）

最初の例は，フェリックス・クラインの『高い立場から見た初等数学』([10]）という著作の，特に第1巻である．クラインは19世紀後半から20世紀初頭にかけて活躍したドイツの指導的な数学者で，当時のドイツの数学教育の革新運動を主導した人物でもある.（クラインと数学教育との関わりについては，例えば，文献[4]を参照願いたい.）

『高い立場から見た初等数学』は，ギムナジウムの数学教員などを集めて開催した講義の記録がもとになった著作で，学問としての数学の立場や，数学の歴史的な変遷の経緯，あるいは，教育心理学的な見解などにもとづいて，現行の学校数学の内容の批判や，あるべき形について“論じた”ものである.（クラインの議論の前提となった学校数学の現状については，やはり，講義をもとに,『高等学校における数学の教育に関する講義』([9]）という著作にまとめられている.）

また，クラインは，学校教育における数学について“論じた”だけではなく，具体的な教育課程についての提案もしている．さらに，クライン自身が著したものではないが，彼の指導の下で，ギムナジウムの数学用教科書である『現代的原理にもとづく数学の教科書(*Lehrbuch der Mathematik nach modernen Grundsätzen*)』が作成されている．なお，この教科書は，1914年に，文部省から『新主義数学』という表題で日本語訳が出版されており，その影響は，今の中学や高校の数学にまで及んでいる．

次に挙げたいのは，藤澤利喜太郎の『算術條目及教授法』([1]）という著書である．藤澤は，明治のはじめ，ドイツ留学を通じて，当時の学問の最前線にあった数学を日本にもたらした人物である．藤澤は，日本に帰国後，数学教育にも熱意をもって取り組んだが，その成果のひとつが，この書物に結実している.（藤澤も，クライン同様，教員対象の講習会を開催しており，その講義録『数学教授法・講義筆記』([3]）も出版されている．なお，藤澤の『算術條目及教授法』については，文献[6]も参照されたい.）

クラインが力を注いだのは中等教育における数学教育の問題であり，藤澤の『算術條目及教授法』も,（今の日本の教育過程から消えてしまったため，わかりにくくはあるが）中等教育における“算術”について論じたものである．藤澤は，こうした“論”にもとづいて，自分自身で『算術教科書』([2]）を著している．

クラインが『高い立場から見た数学』で，藤澤が『算術條目及教授法』で，行ったことは，ひとことで述べれば，学校数学の現状の不適合な諸点についての検討を通じて，より適合的な形態に向かおうとすることであった.（“現行の学校数学の不適合”のうち，最大のものは，クラインにとっては“エウクレイデス的な論証数学”だったし，藤澤にとっては“理論流儀算術”であった.）

いずれにしても，ここで挙げたクラインや藤澤の著作は，教科書という意味での“標準”ではない．また，必ずしも，それ自体が教科書を執筆するための直接的なクライテリアを与えるといったものでもない.（クライテリアというなら，むしろ，学校数学を論じるために，より“高い”立場にあるクライテリアを用いているといった方が良いかもしれない.）

筆者は,「教育数学」の名の下で，クラインや藤澤が実行した“論じること”を，より組

織的に行いたいと考えている．

1.4 論議の規準

一般に，組織的に論議（argument）を行うためには，さまざまな規準（regulations）が必要だと考えている．そうした“規準”は，以下のような種類に分けられると便利である[3]．

1. **論点型**（Arguing Point Type）

   議論の場を限定して整序し，論じることの方向性を見出すための観点となるもの.（2.1節を参照のこと.）

2. **論法型**（Reasoning Type）

   これは，さらに，**帰納型**（Epagoge Type）と**推論型**（Syllogism Type）に分れる．

   「帰納」とは，実践の場と論議の場を関係づける鍵となるもので，実践によって得られた経験を，一般化（共同体で共有）するために，論議の場に提示することをいう．

   一方,「推論」の方は，ある見解から別の見解を導出することである．ある見解がしかるべき論拠から推論によって得られることが，通常，“分析”であるとか，“理解”や“解明”という言葉が意味するところの本質であると考えられる．

3. **論拠型**（Premise Type）

   見解の妥当性を推論によって示すための根拠となる見解群のこと.（その実体については，脚注28を参照のこと．）

論議の規準は，さらに，**汎用型**（Generic Type）と**特用型**（Specific Type）に分けることができる．

なお，それぞれ型がどういうものであるかについて，本稿では，次章の具体例で説明に替えることにして，詳細については別の機会を俟つことにことにしたい．

2 「学校数学」を論じる

本章では，教育数学における論議の“見本”を提示してみたい.（この“見本”は，模範の方ではなく，ショーウインドウに飾る方のものである.）取り上げる素材は,「学校数学」である．ここで,「学校数学」は，主として，初等中等学校の教科としての「数学」を指す．日本の場合なら，教科名としては「算数」も含まれる．なお，以下の論は，多くの場面で，高等教育にも適用可能である．

[3]正確には，“種類に分ける”というより，“枠式”と考えるべきである．なお，枠式については，2.3節を参照のこと．

2.1 論点型規準の役割

まず注意しておきたいことは，筆者は，本章で，多様な要素を複合的かつ重層的に包含する「学校数学」が抱える様々な問題を，総体的に論じようとするわけではない．

ここで筆者が試みようとしていることを，問題解決という方向から述べれば，ある問題について，その問題に関係する事象群の多様性を適当な観点から整序することで，問題の持つ本質的な性格を単純化して表現し，そこから解決に向かう方向性を見出す指針を取り出そうということにある．

なお，ここでいう“観点”は，第1.4節でいう“**論点型規準**”である．論点型規準は，このように，論議を整序する役割をもつことになる．

例えば,「学校数学」について，しばしばなされる非難に,「学校で習った数学など，社会に出てから一度も使ったことはない」というものがある[4]．こうした見解には,“多様な”立場から反論ができるし，実際になされている．しかし，ここで，これから行いたいのは，この見解について直接論じるのではなく，この見解をより広い状況のなかに組み込み，その状況を上で述べたように整序することで,“解決法”を探ることである．

2.2 課題の設定 —“原理”という論点

論議を始めるにあたり，引用の便を考え，先に述べた“非難”の代表として，次の“見解”を提示しておこう．

[見解 A] :「仕事で数学を使う立場からは，学校で教えている数学は役に立たない.」

次に,“舞台を拡げる”ため,「学校数学」について，巷間しばしば耳にする，批判的というより，むしろ好意的とも思われる立場からの，次の二つに代表されるような見解も提示しておこう.（こうした見解は，試験の公平性を必要とする各種競争試験や，公平性や説明責任を強調する教育制度にあって,「数学」が好まれる理由のひとつになっている.）

[見解 B] :「数学の問題は，順を追ってゆけば，誰でもわかるように解ける.」

[見解 C] :「数学の問題は，採点者の主観と関係なく，答えの正誤が決まる.」

本章の具体的な課題は，上述の“見解”の妥当性について検討し，その上で，特に，見解Aの“非難”を回避し得る解決法を求めることである．

ここで，本章の論議の流れを見ておくことにしよう．

まず，諸見解の妥当性の検討について，筆者は,「学校数学」に関連する事象群に,“単原理型と複原理型”からなる枠組（この枠組を「原理の枠式[5]」と呼んでいる）を導入するこ

[4]高等教育における同工異曲に,「基礎教育として数学者が教える数学は，工学部では役に立たない」といった類のものもある．

[5]“枠式”という用語を使うとき，この枠組を構成する「単原理型」と「複原理型」といったそれぞれの要素は，一般に,“型式”と呼ばれる．

とで，その枠式に対応する観点に限定されたものではあるが，なぜこうした見解が出てくるかを明確化できると考えている．なお，この“原理”という“（汎用型の）論点”が，ひとつの**論点型規準**ということになる．

結論として，2.6 節では,「見解 B は，学校数学を単原理型と見ている」ことのあらわれであり,「見解 C は，単原理型と見なす立場から，学校数学と学校教育の適合性が高い」ことを，そして,「見解 A は,（主張する人の）仕事で使用している数学が複原理型の特性を強くもっている」ことのあらわれと“解される”ことになる．

そして,「なぜか」がわかれば，見解 A のような否定的な意見についても,「それでは，役に立つようにするには，どうすれば良いか」と問い直し，さらにその解決法を探すことに貢献できるだろうとも考えている（2.7 節）.

それでは，次の技術的な補足節を挟んで，2.4.1 節以降に，こうした“論議”の輪郭を示してみたい．

2.3 「枠式」について補足

単原理型や複原理型といった型式[6]は，前節で，数学や教育を「～と見なしている」，数学や教育が「～の特性を強くもつ」等々と述べたように，数学なり教育なりといった考察の対象としている事象群の，ある観点から焦点をあてたい特性を組として取り出し，対比的な差異を強調するように抽象化して名称を付したものである．したがって，型といっても，いわゆる類型でない．つまり，数学の全体が単原理型のクラスと複原理型のクラスに排反に分割できる，といったことを主張しているわけではない[7]．以上の了解のもとで，以下では，簡単のため,「～と見なしている」,「～の特性を強くもつ」といった言い方をせず，単に,「単原理型の数学」であるとか,「複原理型の教育」という言い方をすることも多い．

ところで，次節からの説明では,「原理の枠式」が本章の問題を解決するために導出されたように見えるかもしれない．しかし，これは，説明の便宜のためで，本来，こうした枠式は，個々の問題を超えて準備されたものであり，様々な状況に適用可能な汎用性の高いものとして設定されていることを強調しておきたい.（例えば,「学校数学」についてであっても，別種の課題であれば，別の枠式を適用することになる．逆に，枠式を適用することは，新たな課題を発見するために用いることもできる.）同様に，最も汎用性が高いものとして，今，筆者が仮に運用している枠式の一覧を付録に掲載しておいた．

それでは，これから,「学校数学」についての 2.2 節の課題をめぐる，“見本”としての論議を開始することにしよう．

[6]脚注 5 を参照のこと．
[7]詳しくは，文献 [8] を参照されたい．

2.4 「原理の枠式」について

2.4.1 二種類の「数学」

現代日本の数学者にとって,「数学」の最も重要な特徴は,“公理的演繹体系の体裁”にあるといっても良いだろう．ここで“体裁”と言っているのは，公理系が実際どのようなもので，それが無矛盾だとか完全だとかの厳密な話ではなく,「数学」がそういう体系であるべきだという意識が共有されているといった意味合いにおいてである[8].

他方，古来から,「数学」とは「公式とその適用法の集成」であるといった見方もある．この数学観は,“公式”を“モデル”と読み替えれば，現在においても，工学系を含む多数の数学の使用者（ユーザー）にとっての標準的なイメージといって良いのではないだろうか.

「数学」を“一種の公式集”とみたときに，例えば，古代の「数学」では，特に求積関係の公式は，経験から導かれた（と推測される）法則を含んでいることも珍しくなかった．実際，円周率として複数の値[9]が併用されている場合[10]も，そうした“値”の採用は，計測の精度との関係等々で決定されたであろうことが推量される．つまり，この数学観では，形式的な整合性という“原理”[11]だけではなく，経験との整合性といった別の“原理”が併用されていると思うことができる[12].

2.4.2 理論と実践

前節で述べた二種類の数学観は，端的に,“理論型”と“実践型”と呼ぶことができる．例えば，クラインの著名な『19 世紀における数学の発展についての講義（Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert）』におけるガウスについての評を参照してみよう.（以下，引用は,『クライン：19 世紀の数学』 Felix Klein 著，彌永昌吉 監修，足立恒雄・浪川幸彦 監訳，石井省吾・渡辺弘 訳,（1995）共立出版株式会社，による.）

クラインは，ガウスが小惑星パラスの軌道を決定しようとした際の挿話に関連して，次のように述べている.

> さてガウスはどのような方法でこれらの重要な結果を導いたのであろうか．彼以前のすべての数学者や天文学者と同様に，彼も無限三角級数を利用する．しかしその変数は目的に合わせて選択され，一方，その係数は定積分の数値的評価（機械的求積法）によって得られる．ところでガウスは1812年の超幾何級数に関する研究の中で，初めて精密な収束判定条件を設定した人だから，有限個の級数項だけを用いる際に生じる誤差を評価したであろうと想像するなら，ある種の失望を禁じ得ないであろう．そうした慎重さは見られないのである．そ

---

[8] 後述するように，こうした数学観を，異なる数学観と対比的に,「単原理型」ということにする（2.4.3 節を参照）.

[9]近似値という概念がありそうでもなく，したがって，唯一の値としての円周率という概念自身がないように思える.

[10]今の日本でも，初等教育での円周率の近似値が 3.14 だったり 3 だったりするが.

[11]“公理的演繹体系”は,”形式的な整合性”の形態のひとつである.

[12]脚注 8 と対比的に,「複原理型」ということになる.

> れどころかガウスは，もっと後の測地学の計算でもそうであるが，各項が十分小さいと見れば，すぐにそこで級数を打ち切ってしまう昔からの習慣にしたがっているのである．

続けて，クラインは，「厳格な収束判定法の創始者たるガウスが，実際の場合と理論の場合とではこのようにまったく異なった態度をとるのをみる[13]と，おそらく今日の純粋に抽象的な学派の数学者は驚くであろう」と述べ，「なぜなら上述のような方法は，それが論理的に十分基礎づけられていないため，場合によってはまったく間違った結果を導く可能性があることは明らかだからである」と説く．

そして，クラインは，この“矛盾”を，人間の「設定した目的の達成に有効なものだけが関心のまとになる」という「心理的説明によってのみ解明」できるとし，次の二種を区別する．

まず，一方は，「純粋数学者（reinen Mathematiker）」である．クラインによれば，

> 純粋数学者にとっての目的は，選んだ主題が提起するあらゆる可能性を大局から秩序づけ，研究し尽くした完全な体系である．その際，個々の場合を論理的に厳密に分離して整理することが，彼の本質的な手段である．したがって，人為的につくった除外例も，自然なものほどではないにしても，同じくらいに彼の興味をひく．実際的な応用の可能性は，おそらく後者の方が高いであろうが，彼のまったく関知するところではないのである

とされる．他方は，「計算本位の実用家（rechnenden Practikers）」である．

> 計算本位の実用家が目指すところは，数値的な結果を得ることである．したがって，自分の方法を緻密な論理で正当化することには無関心である．だから多かれ少なかれ無意識に自分の数学的本能に頼ることになる．この本能は彼に必要な仮定 — ここではたとえば項の符号が交代に変わることやそれらの和がいくらでも小さくなることなど — を暗黙のうちに採用するように命ずる．とにかく前進するために彼がとらざるを得ないこうした手続きに対する，理屈というより感覚的な正当性は，観測結果と絶えず比較することによって証明される．

以上の説明によって，前節の終わりに述べた「形式的な整合性」という“原理”のみに従う“理論家”としての純粋数学者と，それだけでなく「経験との整合性」という別の“原理”を併用している“実践家”の姿勢が，明瞭に描き出されていることがわかる[14]．

---

[13] in praxi sich solchermaßen ganz anders vorhalten zu sehen als in der Theorie（原文）．

[14] 理論家と実践家が，ガウスというひとつの人格に併存し得るというわけである．つまり，人間の集合を，理論型と実践型に“類別”することはできないことになる．“枠式と型式”という筆者の用語を用いるなら，こうした事態は，理論型の型式と実践型の型式が，どちらもガウスという人物に適用可能であるということにすぎない．

2.4.3 単原理型と複原理型 — 「原理の枠式」の導入

“理論と実践”という上述の二種類の数学を区分する“枠式”を導出するために，“公理的演繹体系”を生み出した古代ギリシアにおける知的営為の“枠組み”を参照枠としてとることにする．その代表として，アリストテレスを取り上げよう．

アリストテレスは，オンタ（万象）を,「別のありかたを許容しないアルカイ（archai ouk endechomenon kai allōs echein）」を有するものと,「別のありかたを許容するアルカイ（archai endechomenon kai allōs echein)」を有するものに二分する[15]．前者のものがテオレティケー（理論，観照）の関与する対象であり，後者がプラクティケー（実践）のものである[16]．なお，ここで「アルカイ (archai)」は「アルケー（archē)」の複数形であって，この「アルケー[17]」は，後代，“principium”（複数形“principia”）とラテン語訳されることになる．したがって，筆者は，アルケーを“原理”，複数形のアルカイを“原理系”と呼ぶことも考えたが，単数と複数を峻別しない日本語の性格と，語調の簡潔さのため，アルカイとアルケーを区別せず,「原理」という言葉を充てることにした．

“原理（アルケー，アルカイ）”が何を意味しているかについては，枠式・型式の性格からして，明確に表現することはできない．数学の場合であれば，演繹の規則を含めた公理系なども“原理”のひとつの形であるし，人間生活のある種の局面であれば，法体系もそうであろうし，明文化されていない慣習の集まりなどもそうであろう．興味の対象である事象群にあって，それなりのまとまりをもって，そのありかたを規定する言明群とでもいったものを考えてみる[18]．それらのうち，他がそれから“導かれる”ような基本的な言明群を組としたものが，大雑把に言って，“原理”ということになる[19]．

---

[15]例えば,『ニコマコス倫理学』第 6 巻第 1 章.

[16]「学ぶ（マンタノー）こと」と「単原理性」との深い相関は，アリストテレスの強調するところであった．これは，また，ヘ・マテマティケーの語源についての逍遥学派の説の由来でもあったように思われる．

[17]「アルケー」が何を意味するかについて，アリストテレスの『形而上学』第 5 巻（第 Δ 巻）第 1 章によれば，次のようになる（引用は，岩波文庫による）;「事物のアルケーというのは，まず,（1）当の事物が第一に〔最初に〕そこから運動し始めるところのその部分〔運動の始まり，出発点〕を意味する．つぎには,（2）なにごとがなされるのにもそれからなされ始めれば最も善くそのことがなされるであろうところのそれ〔最善の出発点〕を意味する、さらにまた,（3）事物が第一にそれから生成し且つその生成した事物に内在しているところのそれ〔すなわち事物の内在的構成要素〕のことをもその事物のアルケーという、なおまた,（4）そこから生成したその事物のうちには内在していないで，しかもそこからこの事物が第一に生成し来り，そこから第一にこの事物の運動や転化が自然的に始まるところのそれ〔転化の外的始動因〕をも意味する、さらにまた,（5）動かされるものどもがそのように動かされ，転化するものどもがそのように転化するのは或る者の意志によってであるとき，この或る者がまたアルケーと呼ばれる、さらに,（6）対象事物がそれから第一に認識されるに至るところのそれ〔認識の第一前提〕がまた，その事物のアルケーと言われる、— さて，これらでみると，これらすべての意味のアルケーに共通するのは，それらがいずれも当の事物の「第一のそれから」であること，すなわちその事物の存在または生成または認識が「それから始まる第一のそれ」であることである」.

なお，訳者の出隆氏は,「日本語「原理」では，これらの意義をことごとく表わすことは不可能．原語は日本語の「もと」（本．元，原，素）の意に近く多くの含みをもっていた．その含みは本文の「アルケー」をまず日本語の「もと」のつもりで読んで察知されたい」と注している．

[18]一般に，そうした言明群の存在は自明ではない．人間の営みに関するものの場合，それに関係する人々のなす共同体を特徴づけるもの，つまり，共有する世界観を表示するものとみることもできる．実際の共同体から出発するとき，そうした言明群を明確化することについては，文献 [8] を参照されたい．

[19]つまり，何がしかの形式化がなされていて，“推論”が機能していることが前提ということになる．もちろん，“原理”に相当する言明群は，推論を通じて一組に整理できるとは限らず，互いに矛盾する言明を含む複数組の言明群（原理）に分かれることもある．

前節の終わりに述べた“理論家”は,「形式的な整合性」に奉仕する“単一の原理”[20]に従うわけであるし,“実践家”の方は，この原理に併せて,「経験的な整合性」という「形式的な整合性」とは無関係な（ときには矛盾し得る）“原理”にも従うことになる.

一般に，矛盾した複数個の原理を併用している場合，営みの実際的な場面では，どちらの原理に従うかを「行為の主体の自由意思にもとづいて選択」しなければならない．このことが,“理論”と“実践”の本質的な相違である．つまり，単一の原理に従う“理論”的な場合に（理念的には）主体の自由意思の介在する余地がない．これと対比的に,“実践的営み”は常に「自由意思による選択」を必要とする.

いずれにしても，このようにして,「理論型」と「実践型」という型式を組とする枠式を取ることができる．ただ,“理論と実践”は多様な意味に使用されすぎているため，ここでは，原義にかえって,「単原理型（Single Principle Type）と複原理型（Multiple Principles Type)」と呼ぶことにした[21]．また．両者を組とした枠式が，付録に掲げた「原理の枠式（Morphic Frame for Principle)」である[22].

2.5 「原理の枠式」の「教育」への適用

今，我々は,「学校教育」に興味があるのだが，ここで,「教育」に関与する事象群を枠式によって区画することを試みる.

まず,「学校教育」の特性をどのように捉えればよいのか考えてみたいのだが，これは，なかなかに困難であることがわかる[23]．そこで，学校教育と対比的な“教育”として,「徒弟教育」を採り上げてみることにする．ここで，徒弟教育を，職能を用いた職業的営みを行いながら教育的な成果を得るものと思うことにする[24]．そして，その上で,「原理の枠式」の適用を考えてみる.

徒弟教育では,「教育的成果の獲得」を目的とする原理と,「職業的成果の獲得」のための原理の両者が併存していると想定して問題はないだろう．さらに，この二種の原理は，本来的に独立であって，互いに矛盾するような規範を含んでることは当然なことである．こ

---

[20]より正確には,“「形式的整合性」という目的の達成に適合的なもののみからなる原理”といった意味である．しばしば，この“目的”を“ラベル”として,「形式的整合性の原理」等と略述することがある.

[21]人間の実際の営みにおいて，単原理型と複原理型の差異を意識することは，非常に困難である．何より，単原理型の範型である公理的演繹体系についての理解が不可欠の前提だろう．このことは，古代ギリシアの哲人がこうした区分を捉え得たことと，エウクレイデス的なギリシア数学の発明が深く関係していることを想定させる．実際，単原理型の範型についての記述とみなせるアリストテレスの『分析論後書』において，扱われる事例が上述の“ギリシア型数学”に題をとったものであることはよく知られている.

[22]枠式であることの特徴として，同一事象に異なる適用の仕方が可能なことが挙げられる．例えば,「公式とその適用法の集成」という体裁の典型である古代の算経型テキストにしても，そのテキストの構造を「計算部＋適用部」をみれば,「単原理型＋複原理型」と見なせるし，適用部まで含めて知識技法の集成と見れば「複原理型」ということになる．実際，通常，算経型のテキストの冒頭部に説かれる“数の計算”は,「前提から結論がただ一通りに導出されること」に由来する,“正しさ”や“確かさ”といった人類史的なイメージを共有している.

[23]例えば，今,「学校」という言葉からイメージされる「(複数の机と椅子が並べられた）教室」は，そうした特性として役立つのだろうか．文献から垣間見られる古バビロニア期の“書記学校（粘土板の家）”が今の教室のイメージに近いのに対し，時代的にははるかに近くても，そうしたイメージに合致しない例はいくらもある.

[24]古今，洋の東西を問わず，非常に広汎に行われた教育の形態である．最近の On the Job Training なども，この一種と見なせるだろう.

れと対比的に見れば，学校教育は「教育的成果の獲得」のみを問題にすると見なしても良いだろう．つまり，徒弟教育が「複原理型」であるのに対して，学校教育は「単原理型」に評定[25]されることになる．

2.6 「学校数学」の構造の解明 — 論拠と論法

「学校教育」について，前節までに述べたことをまとめておくと,「原理の枠式」という**論点型規準**を適用することで，数学にも教育にも複原理型と単原理型のものがあり,「学校」は単原理型の教育と考えられるということになる[26]．

以下,「学校教育」のこの基本的な位置づけを前提として，2.2 節の課題を解決するため,「学校数学」の“構造”について論じてみたいのだが，そのためには，以下に見るように，今までの論点型規準だけではなく，**論拠型規準**と**論法型規準**が必要となることを留意しておきたい，

ここで，これからの論議のため，学校教育や学校数学における単原理型の実質的表現のひとつ[27]として,「単原理型の営為では，すべてのことが規範的ないくつかの規則から明示的な手続きを通じて導出されることに最高の優位性が認められる」という“見解”を採っておく．この“見解”が，ここの論議で使用される**論拠型規準**ということになる[28]．

それでは，以上の準備の下で，2.2 節で提示した三つの見解 A，B，C の解釈について考えてみよう．

まず，見解 B から始める．見解 B は,「数学の問題は，順を追ってゆけば，誰でもわかるように解ける」というものであり，ほぼ，このまま,「学校数学」が単原理型であることを述べたものになっている．

次に，見解 C について考えてみよう．見解 C は,「数学の問題は，採点者の主観と関係なく，答えの正誤が決まる」というものであった．これ自体は「学校数学」の性質についてのものであるが,“採点者”という言葉から,“評価”の問題を背景に見ることができる．

ここで，学校教育が単原理型であること，つまり,「学校教育に関する主要な要素は単原理型の性格を強くもつ（理念的には，完全にもつ）」ことから,「学校教育における学習成果の評価方式が単原理系型である」ことが含意されるという“推論”を使用することにしよ

[25]「評定」,「適用」という言葉は，付録に掲げた「同化と調節の枠式」の用語を援用している．

[26]枠式・型式は，事象の特徴的なものに対比的に焦点をあてたものであった．実際の「学校」には，複原理型の営みがいくらも含まれているだろう．ただ,「学校」の名を冠していても，その主たる機能が複原理型であるようなものは，ここで述べている「学校」とは別のものと考えることになる．

[27]正確には，型式としての単原理型の実質型領域への適用のひとつ．

[28] 共同体に論拠型規準の実体は，その共同体における“共有見解”と考えられる．なお，この“共有見解”とは，その“言葉”を共にしている共同体の，全員ないし大多数に共有されている見解，あるいは，共同体のなかで権威をもっている（知者，専門家等の）部分共同体が共有している見解，といった類のものということになる．これは，アリストテレスの『トピカ』の一節,「エンドクサとは，すべての人に，あるいは大多数の人にそう思われていること，あるいは知者たちにそう思われてることであるが，知者たちに思われている場合には，すべての知者か，大多数の知者か，最も著名で評判の高い知者たちに思われている場合がそうである」を援用したものである．

う．なお，この“推論”は，**論法型規準**のひとつを使用している[29].

この“推論”の結論として得られる「単原理型の評価」は，いくつかの規則から明示的な手続きによって“必然的”に導出されるものであるとして良いから，そこに，評価者の主観によらないという意味での公平性や，説明責任の担保といった性格が付随する（推論される）ことになる．

こうして，見解Bは,「単原理型の学校数学は，単原理型の評価システムと“単原理性”としての適合性が高い」ことの，ひとつの側面を述べたものになっていると思うことができる．

最後は，見解Aの「仕事で数学を使う立場からは，学校で教えている数学は役に立たない」である．これは，上の二つの見解と異なり，“学校における数学”についての批判であり，そこに聴くべきものがあるのなら，改善をはかる契機を与えるものでもある．

さて，“妥当と判断できる見解A”は，こうした見解を主張する者の「仕事で使用する数学」が“複原理型”であることに起因すると考えることが相当と思える．同工異曲の「社会に出てから，学校で習った数学を使ったことはない」という見解も，一般的な成人が日常生活で使用する数学が，主として，消費活動に関連するものであることを思えば，これも“複原理型”であると思うことができる．

今，職業的なものでも，日常生活的なものであっても．こうした見解の主張者にとっての「数学」は（おそらく当人たちは気づいていないだろうが）従うべき複数の原理をもつことになる．そのうち，学校数学と共通な原理を「形式型原理」，職業活動や消費活動に伴う別種の原理を「実質型原理」と呼ぶ[30]ことにすると，結局のところ，Aのような見解は,「複原理型の数学の使用者にとって，形式型原理のみの学校数学は実質型原理への配慮を含んでおらず，そこが役に立たないように見える」ことを意味していると“推論”することができる[31]．したがって，そういう意味での主張であるとするなら，見解Aは妥当といっても良いだろう．

2.7 「学校数学」の設計

それでは，見解Aの妥当性を前節のように“解する”として，その批判にどう答えれば良いのかを考えてみる．ひとつの答えは,「学校数学は形式型原理のみに従うものであるから，実質型原理に対して役に立つことを期待することは，そもそも間違えている」というものだろう．もちろん「役に立たないことを教える学校は不要である」等々の反論もあるだろうが，結局のところ，こうした解答の妥当性は，学校教育，あるいは，学校数学に関

[29]正確には，より一般的な「論法型規準」(「全体が成立すれば，部分も成立する」）の適用と見なすべきである．上で述べた「論拠型規準」についても同様だが，本稿は，論議の“見本”として，論拠型規準や論法型規準の“必要性”を示すことが目的であるため，この点について深入りすることは避けることにする．

[30]正確には,“原理”群に「認知の枠式」を適用したもの．さらに議論を進めるには，付録の一覧にある「原理の認知的細分枠式」を使用することになる．なお，形式型原理の領域と実質型原理の領域の，表層的な特徴のひとつを述べれば,「(抽象的な）数の世界」と「(単位を備えた）数量の世界」ということができるかもしれない．

[31]ここにも，しかるべき**論法型規準**の適用を見ることができる．

する事象群を“目的-手段関係[32]”で整序してみないと，判定できない．

ここでは，そうした議論に深入りすることは避けることにする．そして,「学校教育の下で,（形式型原理だけでなく実質型原理を含む）複原理系型数学にも役立つように教えるにはどうすれば良いか」を直接的に扱うのではなく，より基本的で,“良し悪し”という価値観を含まない,「複原理型の数学の単原理型教育における扱い方には，どのようなものがあるのか」という問題について考えてみよう．

この問題の“解”として，大きくは，次の二つが考えられる．ひとつは「単原理型教育のなかに，疑似的に複原理型教育を“構築”すること」であり，もうひとつは「複原理数学の複数の原理のうち，形式型原理のみに限定して教育の対象とすること」である．以下，前者の解決法を「疑似型方法」，後者を「限定型方法」と呼ぶことにしよう．

そもそも単原理型は型式という“形式”であるから,“実質”としての「学校」に単原理型の影響が及ばない部分領域を作りだすことは可能である[33].「疑似型方法」は，このことに着目した方法である．一般に，さまざまな“形式”を組み合わせて,“実質”としての「学校」や「学校数学」のありかたを規定することを,「学校・学校数学のコンセプト・デザイン」，あるいは，単に「学校・学校数学の設計」と呼んでいる．

なお，この方法を採用するときには，数学の内容だけではなく，例えば学習成果の評価についても，単原理型とは異なるものを構築する必要があることに留意しておこう．実際,“複原理型の営みに必然的に伴う自由意思による選択[34]”の評価を“単原理”に従わせることは，本質的には不可能である．

次に,「限定型方法」について考えてみよう．この方法の適用は，日常生活のような，学習者の全員に関わるものである場合には，妥当であろう．問題になるのは，現状，多数の学校において，学習者たちが学業を終えた後に就く職業が，学習の過程では未決であることにある．限定型方法で教育すべき“数学的内容”は，一般には，職能共同体ごとに存在する．したがって，制限すべき「形式型原理」に伴う数学的内容を，どのように決定すれば良いのかが問題となる．これについても,“目的”に依存することになるだろうが，学習量という観点からの効率を優先するなら，求められるべきは，職業ごとの“数学”の「合併」ではなく,「共通部分」であるべきだろう．

もちろん，上で述べたことは,「学校数学の設計」のための“方針”にすぎない．例えば，後者の方法の適用の場合，職種ごとの“数学”は，一般に，異なる“言葉”を使用しているから,「学校数学」として採用するためには，しかるべく再構成する必要がある．このあたりを実務的に実現することも，教育数学の課題ということになるだろう．

[32]正確には，付録の一覧の「意味の枠式」の適用，ということになる．また，これは，新たな論点型規準の導入ということになる．なお，以下の論議において，こうした“規準”についての指摘は省略することにする．

[33]“現実”は常に複合的である．例えば，数の計算を主とする単原理型の「計算科」と，消費活動に題材をとる複原理型の「消費科」という二つの教科を設けるといったことも可能だろう．

[34]複原理型の営みと自由意思の関係については，2.4.3 節の 11 ページあたりの該当箇所を参照されたい．

2.8 本章の補足

本章は，“教育数学における論議”についての概説が目的であったため，理解を容易にするための議論の簡易化がなされている．以下では，ここまでの議論で触れられなかった重要な話題について補っておく．

まず,「原理の枠式」の適用では，前節までに述べた“（成人の）職業や日常生活”だけが問題になるのではない．はじめて数学を学ぶ（言語の比喩では，第一言語習得に相当する）場合は，常に形式と実質の双方が必要であって，複原理型の適用可能性[35]が前提となる．

実際，優れた数学の教育実践は，常に複原理型と単原理型の双方を使用しているはずであって,「こういう手順でやれば，必ずこうなる」式の（つまり，単原理型の）思考・方法のみで成功することはありえない．こうした優れた教育実践を活かすためにも，学校における単原理型システム，ことに，評価システムの反省なり再考が必要になるだろう．

また，ここではまったく触れられなかったが，共同体的な視点からみると,「学校共同体の自己保存という“原理”が強くなりすぎると，学校制度の過度の“単原理型化”とでも呼ぶべき弊害が生じる」といった“分析（推論）”を行うこともできる．

[35]詳しくは，付録の一覧の「同化と調節の枠式」の適用可能性と，それに関連しての「原理の枠式」の適用というべきだが．

参考文献

[1] 藤澤利喜太郎 『算術條目及教授法』 丸善・三省堂 (1895).

[2] 藤澤利喜太郎 『算術教科書』 上・下 大日本図書 (1896).

[3] 藤澤利喜太郎 『数学教授法・講義筆記』 大日本図書 (1900).

[4] 蟹江幸博，佐波学 『エアランゲン就任講演にみるクラインの数学観について – 試論 – 』 三重大学教育学部紀要， 第 60 巻， 教育科学 (2009), 219-236.

[5] 蟹江幸博，佐波学 『数学と教育の協同 — ハイマン・バスの挑戦 —』， 数理解析研究所講究録 1657 巻（RIMS 共同研究『数学教師に必要な数学能力形成に関する研究』報告集）, (2009)， 23-73.

[6] 蟹江幸博，佐波学 『教育数学から見た「算術條目及教授法」』， 数理解析研究所講究録 1828 巻（RIMS 共同研究『数学教師に必要な数学能力に関連する諸問題』報告集）, (2013), 1 - 49.

[7] 蟹江幸博 『数学の多様性と普遍性 — 教育数学の試み』， 数理解析研究所講究録 2021 巻 （RIMS 研究集会『教育数学の一側面 — 高等教育における数学の規格とは — 』報告集）, (2017), 1 - 50.

[8] 蟹江幸博，佐波学 『『幾何的直観と対称性』の教育観と数学観 （I） — 教育数学における「方法」の探求 — 』， 数理解析研究所講究録 2072 巻 （RIMS 共同研究『数学教師に必要な数学能力を育成する教材に関する研究』報告集）, (2018), 1-41.

[9] Klein, F. , Schimmack, R. : *Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen. Teil I. Von der Organisation des mathematischen Unterrichts*, Leipzig (1907).

（日本語訳）『独逸に於ける数学教育』（林鶴一，武邊松衛訳） 大日本図書 (訂正再版 1922).

[10] Klein, F. : *Elementarmathematik vom hoheren Standpunkt aus* (3 Bande), B. G. Teubner, Leipzig 1908, 1909, Springer Berlin 1928. （日本語訳） F. クライン：『高い立場からみた初等数学 1 — 4 』 (遠山啓 監訳) 東京図書 (1959/1960/1961/1961)

付録　汎用枠式群

A　第一種汎用枠式群（基礎となる枠式）

意味の枠式（*Morphic Frame for Sense*）

- 目的型 (*Purpose Type*)
- 手段型 (*Means Type*)

原理の枠式（*Morphic Frame for Principle*）

- 複原理型 (*Multiple Principles Type*)
- 単原理型 (*Single Principle Type*)

量の枠式（*Morphic Frame for Quantity*）

- 単一型 (*Unity Type*)
- 数多型 (*Plurality Type*)
- 全体型 (*Totality Type*)

媒体の枠式（*Morphic Frame for Medium*）

- 記憶型 (*Remember Type*)
- 記録型 (*Record Type*)

認知の枠式（*Morphic Frame for Cognition*）

- 形式型 (*Formal Type*)
- 実質型 (*Material Type*)

遷移の枠式（*Morphic Frame for Transition*）

- 能力型 (*Competent Type*)
- 活動型 (*Active Type*)
- 所産型 (*Produced Type*)

時間の枠式（*Morphic Frame for Time*）

- 通時型 (*Diachronic Type*)
- 共時型 (*Synchronic Type*)

B　第二種汎用枠式群（他の枠式から導出される枠式）

「量の枠式」から導出される枠式

協同の枠式（*Morphic Frame for Association*）

- 共有型 (*Communal Type*)
- 個有型 (*Individual Type*)

「認知の枠式」から導出される枠式

判断の枠式（*Morphic Frame for Judge*）

- 反映型 (*Reflect Type*)
- 規定型 (*Dictate Type*)

「時間の枠式」×「判断の枠式」の細分枠式

同化と調節の枠式（*Morphic Frame for Assimilation and Accommodation*）

$$\left\{\begin{array}{l}\text{通時型}\\ \text{共時型}\end{array}\right. \times \left\{\begin{array}{l}\text{反映型}\\ \text{規定型}\end{array}\right. = \left\{\begin{array}{ll}\text{抽象型 } (Abstract\ Type) & 〔=\text{通時型反映}〕\\ \text{実化型 } (Realize\ Type) & 〔=\text{通時型規定}〕\\ \text{評定型 } (Evaluate\ Type) & 〔=\text{共時型反映}〕\\ \text{適用型 } (Apply\ Type) & 〔=\text{共時型規定}〕\end{array}\right.$$

「認知の枠式」の原理群への適用（細分）から導出される「原理の枠式」の細分枠式

原理の認知的細分枠式（*Cognitive Morphic Refinement Frame for Principle*）

・・・「認知の枠式」の原理群への適用（細分）から導出される「原理の枠式」の細分枠式

- 双原理型 (*Dual Principles Type*)
- 単形式原理型 (*Single Formal Principle Type*)
- 単実質原理型 (*Single Material Principle Type*))

（注） 双原理型は，形式原理と実質原理の二種の原理からなる．