

大学における数学教育の問題点と工夫

大島利雄

TOSHIO OSHIMA

城西大学 理学部

FACULTY OF SCIENCE, JOSAI UNIVERSITY

1 はじめに

10年くらい前の研究集会の折かなにかであったと思うが、大学の数学の教員達が数人集まった中での雑談で、ある私大の先生が『数学の教師になりたい』とある学生が相談に来ましたが、その学生は九九も大きな数になると不確かで満足に出来ないのです』と嘆いていた。学生のレベルがあまり高くない大学だが、それにしても学生も非常識ではないかと私は思った。

6年前に私は東大を定年退職し、城西大理学部数学科に移った。城西大のキャンパスは埼玉県の坂戸市にあり、私が移った年に理学部数学科は学生定員を80名から120名に増やして、学生定員を60名ずつに分け、東京の紀尾井町に新築された建物に紀尾井町キャンパスの理学部数学科が創設された。私は紀尾井町キャンパスが主勤務先であったが、初年度は1年生のみだったので坂戸にも講義に通った。また大学院の講義は4年間は坂戸で開講した。紀尾井町での卒業生は一昨年が最初で、私は大学院に入学した内の2名の指導教員となり、その後の大学院の講義は紀尾井町で行った。

大学の数学教育は、線形代数と微積分が基本であるが、城西大ではそれらは必修で、キャンパス毎の定員60名を2クラスに分け、各クラスは線形代数、微積分共に週2コマ(=3時間)の講義(演習を含む)が1年次と2年次前半まで続く(微積は、2年後期までである)。実際の人数は、定員以上の入学があったり再履修生がいるので、1クラスは30名より多くなるが、他大学に比べると1クラスの学生数は少ない方であると思う(初年度は入学者数が200人越えて多かったが)。

城西大に移っての一週目の紀尾井町での講義は、まだ新築の建物の教室が使えなかったもので、別の建物の講堂で数学科新生全員への講演であった。私は「理学部の理は、ことわり、とも読み、理学部は、物事がなぜそうなるかのことわり—理屈・原理—の理解・解明を目標としています」と始め、いくつかの例を話した。しかし、このことの困難性を以降に痛感することになる。

なお、このノートは以下も含め、講演の予稿として提出したものに加筆をしたものである。

2 数学教育の実情

城西大に移った初年度の数学科入学生は200人越えてであり、卒業後に中高の数学の教師を希望するものが大半(百何十名か)であった。新入生の半分弱が紀尾井町キャンパス所属であった。それほど多くの者が希望を叶えることは不可能なのは明かであるが、九九や分数の計算で頭を悩ます学生はいないようなので、先ほどの私大に比べれば、よりレベルの高い教育が可能であろうと思った。

週2コマの線形代数のうち1コマは演習に当てることが多い。問題を出し、演習の時間に解答用紙に書いて提出する、という形式を多く行う。教科書などを見たり、分からないことを質問したりは

自由である。対称行列の積が必ずしも対称行列にならないことに注意してもらおうと考え、「対称行列の和は対称行列になりますか？」と問うた。「先生、こんな難しい問題は初めてです」と言われたので、「例で考えてみたら？」と言った（積の場合は、反例を挙げさせることを目指していたので）。しばらくすると「先生、これは証明ですか？」と言われたので、見てみると2行2列の各成分に具体的な数字を入れて対称行列になる例をひとつ書いていた。「この場合は、和は対称行列になりますね」と答えた。就任当初であって、（自分で考えて欲しいと思ったこともあり）それ以上アドバイスはしなかった。正解と言えることを書いた答案はなかった。今では、これが学生にとってとても難しい問題であることを理解しているので、よりよい助言が可能と思っている。

離散数学では、フィボナッチ数列や（線形の）3項間漸化式で与えられる数列の話を取り上げた。つがいの兎の話から、 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ の漸化式を導く説明をすると、「なるほど」と学生は納得するが、他の同様な問題では、自ら3項間漸化式を導くことが出来ない学生がほとんどであった。より簡単な漸化式で与えられる数列を与え、一般項を予想させ、それを数学的帰納法で証明する問題を試験に出した。学生は答のチェックをしないので、 $n = 1, 2, 3$ のときに正しいかどうかを確かめよ、という問もその後に入れた。案の定、間違っただけの一般項を書き、それを「数学的帰納法で証明」し、最後は $n = 1, 2, 3$ では成り立たない、と書いて平然と終わっている答案もあった。素直な学生が多いので、求められたことを素直に答える、という姿勢はある。「私は微分は嫌いです」とか「私は考えることは嫌いです」とか素直に言ってくる学生もいて、戸惑わされることもある。

線形代数で、逆行列を計算させる問題では、大半の学生が正しく答えを出す、その前に入れた問の「逆行列とは何か？」の正解は5%にも満たない（答えは白紙か、明らかに間違っただけの答ばかり）。今期行った解析学（2年後期）では、べき級数を扱い、試験では具体的に与えたべき級数の「収束半径を求めよ」という問と、その前に「べき級数の収束半径とは何か？」を問うた。収束半径は多くの者が正解を得たが、後者を正しく答えたのは（甘くみても）2名のみであった（詳しくは後ほど）。

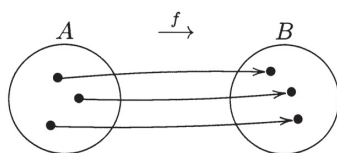
奇数を1から小さい順に n 個を並べて加えて $1 + 3 + \dots + (2n - 1)$ が n^2 になることを数学的帰納法で示せ、という問を多くのクラスで演習に出してみた。（分かっているかどうかは別として、甘くみて）正しい答えはクラスで2~3名程度であった（1年生と2年生）。あるクラスは、この演習の1週間前に、数学的帰納法の講義を受けていた、と後から聞いたが、現状はこのようである。

ウェブ上において、ある高校の数学の先生が「論理や数学的帰納法は入試には出題されないの、進学校では省いて教えない」と嘆いていた。またある塾の先生は「数学の問題は5分以上考えてはいけない。分からない場合は、答を見て覚えなさい」と述べていた。

成績が上位で勉強意欲の高い2名の学生を今年度修士で受け入れて指導している（現時点では修了。この項の記述は1年半近く前で、その後は次節）。2名には一緒に週3コマ（4.5時間）以上のセミナーを実施している。当初、数学的帰納法で示されていた定理を扱った。数学的帰納法の仕組みが理解できていないので、それを考えてもらい、帰納法の議論のみに3週程度かけ、やっと数学的帰納法が分かったように思う。最近では、線形空間 S と T があって、それぞれ2次元で具体的に基底を求め、 $f: S \rightarrow T$ および $g: T \rightarrow S$ という線形写像を与え、 $g \circ f$ と $f \circ g$ があるスカラー倍 C_α になることを示した（ここまでの計算はセミナーで院生が話した。 S と T は具体的な線形微分方程式の解空間）。その後「 C_α が0でないときは、この線形写像は線形空間の同型写像となり、0のとき

は、 f も g も零写像でない...」と書かれていた。この部分分からないようで、理解に11月末から1月末の学期が終わるまでかかり、まだ完全には終わっていない（少しずつ理解を深めている）。すなわち、単射とか全射という概念が理解できていないので、その理解にこの程度かかっているということである。院生は「...です」と話すので、私は「何が...なのですか?」と尋ねると、はっきり答えられないことが多い（90分のセミナー中に10回以上、この間を発していると思う。「てにをは」がおかしいなど、論理的な日本語の文章表現に学生は苦労している）。

まず、単射ということの理解がはっきりしていないようであったので、「集合 A から B への写像 f が単射あるいは一対一とはどういうことですか?」と聞いた。しばらく考えていたが何も返答がない。「式か文章で書いてください」などと聞いても駄目で、いろいろと尋ねてみると、「頭の中にはあるのですがうまく表現できない」との答であった。「では、どのような形でも良いからそれを書いてください」と言うと、以下のような図を書き



「単射とは図のように A の元と B の元が一対一に対応していることで、だから同型です」との答であった。そこで私は「今問題となっている2次元の線形空間には元がいくつありますか?」と尋ねた。その間に対して院生2人が相談しながら考え始め、何分かの後に2人が出した返事は「元は2個です」であった。私は「線形空間の元を2倍しても3倍してもその線形空間の元となるのではないのですか? 無限に元があるでしょう」と言った。それで線形空間の元が無限にあることを一応納得したようであるが、線形空間のような概念をある程度理解するには一朝一夕にはいかず、その後何週間かかかることになる。線形写像 f の核が $\{0\}$ であることと f が単射であることの同値性を示すまでにはかなりの時間を要した。これらのことは、学部1年次の線形代数で学んだことであり、学生も自分では知っているとしている事項であるが、実際は上のような理解の状況なので意味のある数学的な議論に持って行くのはなかなか難しい。

高校数学でも大学数学でもよいが、その中の一つでも卒業までに理解して欲しい、と思っているが、院生をみても、それがとても難しいことが分かる。初年度入学の紀尾井町の学生の中に1人だけ、数学は理解することが必要、と分かっていた学生がいたが、他はそうでなかった。大学院に入学してやっとそのことが分かってきたのが院生の2人で、大学4年間は無駄なことをしていた、と言っている。2017年度の4年生のセミナーでは8人を指導している。3名は高校教員志望、うち2名は4月から採用され、1名は浪人して教員を目指すとのことである。一昨年度の4年セミナーで指導した上記の院生より数学的能力は劣っていて、高校の数学が理解できると言える状況ではない。

学生は、数学を学ぶ、とは問題の解き方の手順を覚えて、与えられた問題を解くことと思っている。数学は解き方が一通りに決まっていて、考える必要がなくて覚えればよいから、苦手な国語や他の理系よりも易しい、という考えで入学したものが大半である。数学教師の仕事は、問題の解き方を覚えて学生にそれを教えることと考えていて、理解することが必要とは思わないので、誰でも、そのときに努力すればできると考えているようである（最初に挙げた、ある私大の例も同様と思う）。高

校で習った（はずの）数学の結果（定理や公式）について聞くと、忘れていたり分からない場合は調べて来るが、なぜそうなるか聞くと、それは習っていない、と学生は答える（それが真実かどうかは分からない）。

就任当初、古くからの城西大の教員（主任経験などのある教授の3人）からは以下のようなことを聞いた（面と向かって言われたので、私には衝撃で、返す言葉がなかった）。

- 「試験で、なぜなのかを問うてはいけない。答えられないから。もしそのような問題を出すなら、あらかじめその問題について、答を教えておく必要がある」
- 「後期の試験なので後期で教えたやり方でやらなくてはいけないのに、（試験範囲外の）前期に教えたやり方で解答している答案があった」
- 時間内に答えるのは無理な沢山の問題を出すこと「学生は解き方を覚えてきた問題しか手をつけない。覚えてきた問題を試験に出さなくて悪い成績をつけたら、意地悪な先生と思われる」
- 理解が困難な内容を教えていること「志村先生も、理解を求めるより、分からなくてもどんどん進めるのが効果的と書いている。易しくすれば、それに応じて学生が怠けるだけである」
- 文科省の指導に関して「役人はなにかに仕事をしなくてはいけないので、そういうことを指示するが、それが実際に可能とは役人も考えていない」
- 大学基準協会からの指摘に対して「あれは×××大学の一味がやっているもので、それに従うのはその一派の***大学くらいしかない」

2018年度の4年生のセミナーは3班に分けて行った。解析分野希望の1つの班では、志賀先生の「数学が育っていく物語」(cf. [1])の最初の2冊を輪講した(代数分野の班は5冊目)。「セミナーは高校の数学の授業のようなもので、話す者は先生、私やセミナーの参加者は生徒、という立場と考えて欲しい。分からないことがあれば生徒は質問をします」などと説明している。

2冊目「解析性」では、複素関数論の導入が扱われている。ある学生が「べき級数が収束円の内部で項別微分可能という定理の証明を話したい」と、それを話し始めた。「べき級数の収束半径を r とする」などと始めた。「収束半径とは何ですか」と聞くと「知りません」という答だった。「それでは困る」と伝えた。次週はそこを何とか説明した後、「収束円の内部では絶対収束する」とボードに書いたので「絶対収束とは何ですか」と聞くと「知りません」と同様の答えだった。先週に続いて同じような質問をしたこともあってか、以下を言われてしまった。

「先生は食事をするとき、その食事の材料がどのような分子でできているかを調べてから食べるのですか？」

「高校の先生の仕事は、問題の解き方を教えることです。どうしてそうするかを分かって説明している訳ではありません」

「自分が高校のとき先生にどうしてかを聞いても、何も答は返ってきませんでした」

私は「そういう先生もいるかもしれないが、このセミナーでは違う」として、その後のセミナーを続けた。

「べき級数の収束半径」は「計算の対象」であって「概念」として理解することはしないので、上の学生のような学び方をしている大部分の学生にとって「定義」の理解はとても困難となる。城西大の数学科では2年次の後期に「収束半径」を学ぶ。「収束半径とは何か？」などということを演習とか

小テストで出題しても多くは白紙の答となる（具体的にべき級数を与えて計算する問題は解答できても）。再度，期末試験に出題してもほとんど白紙だが，白紙でない，実際の答の例を，できるだけ正確に以下に採録する。

問. 整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径とは何かを述べよ。

答 1. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径を r とする。

$|a_n| < r$ ならば収束して， $|a_n| > r$ ならば発散するとなるようなものこと。

答 2. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径を r とする。

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = e.$$

答 3. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径を r とする。

$r < 1$ のとき絶対収束， $r > 1$ のとき発散するような r を収束半径という。

答 4. 整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径とは，収束する値を中心としたときに $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ がとりうる極値の値の範囲。収束半径が r の $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は $(-r, r)$ 内で極値をとる。

答 5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ または $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ にあてはめることで求められる値 r を収束半径という。

似たような以下の問題に対し，よく勉強してきたと思われる学生の答を載せる（多くは白紙答案）。

問. 収束するが絶対収束はしない無限級数の例を挙げ，無限級数の収束と絶対収束の違いを説明せよ。

答. 無限級数が収束するが絶対収束しない。すなわち

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a \quad (< 1) \text{ が存在するが } \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| = |a| \quad (\geq 1) \text{ であるものを上げればよい。}$$

よって $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} - 2^n$ のとき上の条件を満たす。

⊙ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} - 2^n$. コーシーの判定条件より $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} - 2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} e - 2$. $e - 2 < 1$ であるが $|e - 2| = e + 2 > 1$ である。よって収束するが，絶対収束しない。

これらの答案を見ると，問題の解き方についてよく勉強をしているが，なぜそのようなのか？について考えることをしない学生の勉強結果の特徴がよく表れていると思う。前の例を含め，これらの答案を書いた学生達は，学力が低レベルの層ではなく，全て合格点に達している。

4年セミナーで「解析性」を読んでいた別の学生は，無限等比級数の和の公式を収束条件を考慮せずに話していたので，「そこを丁寧に説明するように」ということで次週に再度繰り返すことになった。次週に議論を進めていくと

$$1 + r + r^2 + \cdots = \frac{1}{1 - r}$$

という式をホワイトボードに書いたので、「 r とは何ですか?」、「実数です」、「実数なら何でもよいのですか?」、「はい」というやりとりになる。そこで「 r は1でもよいのですか?」と尋ねると、ホワイトボードに「 $r \neq 1$ 」と書いて「 r は1以外です」と答える。「 $r = 2$ でもよいのですか?」などと聞いても、 $|r| < 1$ という収束条件が分からない。何度かのやりとりの後、私がまず $1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ という等式を示し、説明することになった。

このようなやりとりを通じて分かることは、この内容は高校や大学1年のときに習うことなので、その当時は「 $|r| < 1$ のときは収束し、 $|r| \geq 1$ のときは収束しない」ことを知っていた（覚えていたというのがより正確）。ただし、収束の意味や、なぜ $|r| < 1$ という条件なのかは、試験（含入試）で問われることはまずないので（あっても白紙答案で大丈夫）、関心をもたず考えることもしなかった。学生に「 $|r| < 1$ が収束条件でしょう」と言うと「忘れていました」という答になる。大学の数学科の3年以降にこのことを使う話が現れても、既に習ったことなので素通りして考えることはしない。4年にもなると収束条件があったことや、「 $|r| < 1$ が収束条件」ということを忘れてしまい、他にも多くのことを習ってきているので、ヒントを与えても思い出せない、ということになる。

この状況は大学院生についても同様で、無限積について説明を始めたら、無限和の収束の概念が分かっていないことに気づくことになった。院生は「無限和とは無限個足したものだ」と考えていた。TAからは「定義と定理の違いが分かる学生はまずいない」と以前から聞いていた。演習の小テストで「数学における定義とはどういうものか説明せよ」と聞いたことがあったが、「問題を解くときに役に立つ公式」というような答が多い。上の無限級数の和の「公式」も定義なのか定理なのか、そのような差を学生はほとんど認識していない。

最初からゆっくり説明し、学生に考えてもらわないと理解には近づかないので、城西大で私は大学初年度の教育、あるいはより個人的学修が可能なセミナーでの教育を希望してきた。

3 工夫

城西大での3年目（このとき、紀尾井町キャンパスでは3年次が最高学年）からは3年生の実解析を受け持つことになった（週1コマ、1年間）。従来は「ルベグ積分」が内容であった。1年次に学ぶテイラーの定理が分かる学生が皆無なことに鑑み、フーリエ級数を扱う講義に変えた（「ルベグ積分を講義すべき」という教員は複数いて（cf. [6]）、実際にもう一つの坂戸キャンパスで教えられている）。実解析では「関数の一次近似の誤差が二次微分で評価できる」ことの理解をまず目標とし（つまり、微分を理解して欲しい）、「近似」をテーマとした講義を1年間の $\frac{1}{3}$ 程度行った。高校で習う三角関数表や4桁常用対数表の意味についての講義や演習を行い、一昨年度からは計算尺の原理を話し、実際に学生がそれを作って自ら学ぶような授業を行った（cf. [9]）。これはある程度成功しているように思う。

実際の計算尺の作成方法は[8]に載せてある。私が高校時代に使ったヘンミのNo. P253という両面のものと目盛が同じものも作成できる。材料や接着剤に苦労したがそれについても記載してある（現実にはそこが重要）。ヘンミのNo. P253を知っているある大学の教員がいて「それより使いやすい」と言われたのには感激した。昨年は、小学生レベルの数学でも原理が分かる形で計算尺を作り、指数や対数の概念を理解してもらおうという教材も作成して実際に試みた。そこでは「複利」から導

入したが、最近はその知らない学生がいるのに驚いた（銀行の年利が限りなく 0 に近いため？）

ほとんど学生は理解しようという考えを持たずに講義に出席しているので、講義のみでは学生には何の理解も生じない。演習問題を解かせるとか上記のようなことを行わないと、学生にとっても教員にとっても時間の無駄と私は考えている（現実には、学生は出席すれば単位が、教員は講義をすれば給料がもらえる、という意味があるが）。近似については、 $\sin 1^\circ$ とか、 $\log 2$, $\log 10$ とかの値を実際に計算したりその誤差を評価することを講義でやり、演習でも出題した。常用対数表の作り方や使い方なども講義した。電卓程度は使えるとした。「 1° は何ラジアンですか？」とか「 $\sin x$ の定義は何ですか？」などという問題も演習でやった（ $\sin 31^\circ$ を近似計算してもらおうと、 $\sin x$ の展開式にそのまま入れて、数術の巨大な数を答えとする答案が続出する）。

「近似」の後はフーリエ級数やそれに関連する話題を取り上げ、最後は熱方程式や波動方程式について話した。これらはコンピュータを使って印刷した正確な図を配ったり、波の伝播ではパラパラ漫画として見られる PDF 形式にして、自分で時間変化が確かめられるよう工夫をした。計算尺などを含むこれら、あるいは以下に述べる教材は、すべて Risa/Asir のライブラリ [12]（400 個近い関数を含む）を開発することによって作成した。

最後の学期末試験では、前期の「近似」を 1 題入れたが、学生は前期に理解までに達しなかったのか、まともな答案はなかった。最後の試験で、成績トップの学生の答は以下のようであった。

問. $f(x) = \sin(30 + x)^\circ - \frac{1}{2}$ とおく.

- (1) $x \rightarrow 0$ のとき、 $\frac{f(x)}{x}$ の極限值 a を求めよ.
- (2) a のおよその値を求めよ（有効数字 1 桁でよい）.
- (3) $\frac{1}{2} + a$ と $\sin 31^\circ$ はどちらが大きいのか、理由をつけて答えよ。また、その差はどの程度になるかを求めよ（小数でおおよその値を求めること）.

$$\begin{aligned} \text{答 (1)} \quad \frac{180x}{\pi} = x \text{ ラジアンより} \quad \frac{180x}{\pi} &= 30 + x \\ x \left(\frac{180}{\pi} - 1 \right) &= 30 \\ x &= \frac{30 \times \pi}{(180 - \pi)} = \frac{30\pi}{180 - \pi} \end{aligned}$$

このとき $\frac{30\pi}{180 - \pi} = t$ とおく.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t - \frac{1}{2}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2t}. \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \rightarrow 0 \text{ より } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \text{ なので } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

$\underline{a = 1} \quad //$

$$(2) \quad \sin t = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(30 + x)^\circ - \frac{1}{2} \\ &= \sin\left(\frac{30\pi}{180 - \pi}\right) - \frac{1}{2} \quad \left(\frac{30\pi}{180 - \pi} = t\right) \\ &= \sin t - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

フーリエ級数の話に進む前に、三角関数 2~3 個の和で表せる関数 4 つとそれらのグラフ 4 つを示し、各関数のグラフがどれになるか、理由を書いて答えよ、という問題を印刷して演習の問題とした(演習なので成績には関係しない)。回収した答案を見ると、ある学生は 2 つを入れ違えて間違えていた。両方の理由を読むと、一方は違っていたが他方には「消去法」と書いてあり、私は一瞬何のことか分からなかった。「考えて欲しい」と思ってもなかなかうまくいかないこともある。

城西大に移った年に離散数学の講義を任された。内容は自由ということで、組み合わせ論とグラフ理論がよいかと思って始めたが、組み合わせ論の入門の部分でも学生には十分に難しかった。学生のレベルが分からなかったので、他の教員のシラバスを参考にした。しかしながら、公開が要請されているシラバスどおりのことが可能な大学は多くはないことを後から知った。

最初の講義の時間には、まず算数オリンピックで出題された以下の問題を考えてもらった。

問. ある整数を、0 より大きな整数で表す方法が何とおおりあるかを考える。表し方の順序のみが異なるものは区別せずにまとめて 1 とおりと考える。たとえば、6 を 3 個以下の 0 より大きな整数の和で表す方法は、 6 $5+1$ $4+2$ $3+3$ $4+1+1$ $3+2+1$ $2+2+2$ の 7 とおおりある。

(1) 50 を 3 個以下の 0 より大きな整数の和で表す方法は何とおおりありますか？

(2) 50 を 3 以下の 0 より大きな整数の和で表す方法は何とおおりありますか？

当初は、両者が同じ数になることに気づいてもらい、ヤング図形を使ってその理由を説明する計画であった。まず (1) をやってもらった。答を出すものはいるが、正しい答とはかけ離れていて、90 分以内に正解を得るものは現れそうもない状況であった。いくつかアドバイスをし、一人正しい数に到達したものが現れた時点で 1 回目の授業は終わった。2 回目の講義は、両者の答を解説し、順序立てて数えるために、3 回目は辞書式順序を講義することとなった。それ以降はヤング図形の説明、(ほとんどの者が知らないので) 2 進法の説明、数学的帰納法の説明、などと続くことになった。母関数を使って分割数やカタラン数などを扱おうと考えていたが、高校の教材の順列・組み合わせの数が理解できていないので、そのような数やフィボナッチ数列などを母関数を導入しながら説明する講義となった。最後には、カタラン数の話をした。試験では「カタラン数とはどういうものか説明せよ」という問を入れた。その問に対しては白紙答案ばかりで、唯一書かれていたのには「おつりを渡すときに役に立つ数」とあった。大学を移って移動先の学生の学び方を知るのは(情報が無いと)困難で時間がかかる。離散数学の講義のために用意した教材や、その翌年 2 年生に話した初等整数論の内容の一部とを合わせたものを整理し、本 [11] の形にして出版した。

城西大数学科の微積分学では、2 年生で多変数(主に 2 変数)の微積分が導入される。2 変数関数の(3 次元での)グラフ表示をホワイトボード(城西大の紀尾井町キャンパスの教室はホワイトボードで、黒板はない)に分かりやすく描くのは困難なので、コンピュータを使って描くことを考えた。与えられた点を通る曲線をうまく描く方法がすぐに分からなかったので、よく使われる 3 次ベジェ曲線(PDF でサポートされている)を利用することにして、自分で考えた。後になっていろいろ調べたが、具合が悪そうなので採用しなかった方法しか見つからず、考えた方法を使っている(cf. [2, 4])。ファイルサイズが小さく、どれほど拡大しても綺麗なグラフが得られる PDF ファイルが生成される。特異点や不連続点なども自動判定している。

この方法を話したところ、数学教材について共同研究をしている高遠氏から「 $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$ に対し、その曲線近似を用いて定積分を求め、正規分布の計算に利用したが、精度があまりでない」という質問を受けた。それは単純なプログラムミスであったが、定積分の数値計算に役立つのでは、ということでプログラムを作成して (cf. [12]) 試したところ、よい精度での定積分の近似計算プログラムとなることが分かった。曲線で囲まれた図形の面積計算では、曲線上の点を任意に複数与えることによって面積の近似値が求まる (密に沢山与えるほど精度が高まるのは当然だが、曲線の曲率の変化が大きいと想像される部分では自動的に曲線上の点を細かく取る、なども可能。回転不変な計算アルゴリズム)。

その後、不定積分や留数計算による複素積分の計算プログラムを作成した。教育用を念頭に置いているので、不定積分は単に結果を得るのではなく、大学の教養レベルで理解できるやり方の途中計算も示すものである。たとえば高遠氏から聞かれた例でやってみると、以下のようになった (PDF ファイルの形に出力して表示するところまで [12] の 1 つの関数がサポートしている)。

Risa/Asir 上で `os_md.integrate(((1-cos(x))/(1/2-cos(x)))^(1/2),x|dviout=2)$` と入力すると PDF ファイルが作成される。途中で生成された \TeX ファイルを以下に挿入すると

$$\begin{aligned}
 \int \left(\frac{-\cos(x) + 1}{-\cos(x) + \frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} dx & \quad (t = \tan(\frac{1}{2}x)) \\
 &= \int \frac{4\sqrt{\frac{1}{3t^2-1}}t}{t^2+1} dt \\
 & \quad \left(\sqrt{3}t = \frac{1}{\cos(s)} \right) \\
 &= \int \frac{-4}{3(\sin(s))^2-4} dx_1 \\
 & \quad (u = \tan(s)) \\
 &= \int \frac{4}{u^2+4} du \\
 &= 2 \arctan(\frac{1}{2}u) \\
 &= 2 \arctan\left(\frac{\frac{1}{2}\sin(s)}{\cos(s)}\right) \\
 &= 2 \arctan(\frac{1}{2}\sqrt{3t^2-1}) \\
 &= 2 \arctan\left(\frac{1}{2}\sqrt{3(\tan(\frac{1}{2}x))^2-1}\right)
 \end{aligned}$$

濱口氏、高遠氏とは 3D プリンターやタブレットなども活用した数学教材作成について共同研究をしている ([7, 10])。一例を挙げると、 $\frac{xy^2}{x^2+y^4}$ の原点での連続性の問題を演習で出題した際は、その 3D グラフの立体模型 (3D プリンターで作成したもの) を学生に回覧した。それを触って調べることによって不連続性を理解し、それを数学の証明の形にして書いた (優秀な) 学生がいた、というようなこともあった。

2 重積分の計算で、そのまま積分順序を交換しての計算との両方を課す問題があった。2 つの値が異なる結果が書いてあった。TA の院生は「2 つも答えが得られたから、どちらかは合うのではない

か、と学生は喜んだのでしょ」との話、それを聞いた古参の教員は「おらかな学生ですね」と好印象だった。別の同様な問題で、積分順序を交換して最初の積分結果が0となったら「0の積分は習っていないので分かりません」と質問された。このような学生がいることを念頭に講義を考えていく必要がある。

線形代数では、行列の行基本変形による簡約化を示すプログラムを作成した (cf. [3])。それを教育関係の研究集会で話したところ、問題を作成してくれるプログラムが欲しいという要望が出た。私は「そこまでやると教員がバカになってしまうのではないか？」などと言ったが、別の集会でも同じ要望が出たので、より作るのが難しい対角化や Jordan 標準形を求めるための問題作成のプログラムも作って共に公開した (cf. [5, 12])。数秒で何百題も作成できるので、数百題の問題とその答も含めて公開してある。行基本変形の例は、以下のようなものである (パラメータが入っている例)。

`os_md.mtouppler(mat([a,2],[a^2+a+2,6*a+2]),0|opt=5,step=1,dviout=1)$` とすると

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a & 2 \\ a^2+a+2 & 2(3a+1) \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{\text{line2} += \text{line1} \times (-(a+1))} \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & 4a \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{line1} \leftrightarrow \text{line2}} \begin{pmatrix} 2 & 4a \\ a & 2 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{\text{line1} \times = (\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ a & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{line2} += \text{line1} \times (-a)} \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & -2(a-1)(a+1) \end{pmatrix} \\ & \text{If } a = 1, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \text{If } a = -1, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \text{If } (a-1)(a+1) \neq 0, \xrightarrow{\text{line2} \times = (\frac{-1}{2(a-1)(a+1)})} \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{line1} += \text{line2} \times (-2a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

採点のために (別のやり方で、さらに途中で計算ミスがあったときに、どこで間違っ、またその後は正しく計算されているかどうかなどのチェック)、半自動の行列の基本変形も可能である。

演習や試験の答案を返したとき、「間違っている答えを消して書き直すのではなく、何が間違っているかを理解し、それを修正して再提出せよ」というような課題をよく出している。

私は、線形代数や微積分の教科書をより平易に書かれている定評があるものに変更した。「教科書を読める学生はほとんどいない」とTAは話していた。最近の大学の教科書は二色刷となっているものが多い。高校教育の経験のある同僚からは「二色刷の教科書にすると、学生は赤字で書かれた部分以外は大事でないと判断して、赤字の部分しか見ないので、二色刷はよくない」と言われた。

院生の1人の修論は、2次の正方行列2つの組 (A, B) の同時共役類を考える問題と関わっていた。2年目の最後に、「2次正方行列 A の固有値を λ_1 と λ_2 とするとき、 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ で B も λ_1 と λ_2 という固有値を持つなら、 $PAP^{-1} = B$ となる正則行列 P がある」という問題に出会うことになったが、それを自分で示すことができるようになるには、2ヶ月以上要したように思う。「固有値が異なれば対角化可能」であるから、と私が最初に話すと「分かりました」と答える。しかしより深い問題に進むのに必要なので、「なぜ対角化可能か」と聞くと答えられない。その後、勉強してきて

$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}$ という正則行列があることを示し、「よって元の問題が言える」と答えた。理解したかと思ってさらにどうしてかを尋ねると、同じ P を使って「 $PBP^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}$ だから」と答えるので、その先を変形させてみると $A = B$ が導かれてしまい、「それでよいのですか?」と私は言った。その後、いくつか誘導してやっと正解に導くことができた。

そのあと「『 $PAP^{-1} = B$ のとき、 A と B は同値であるという。この関係は同値関係となる』ということは知っていますか?」（このことは1年生で使った教科書に書いてある）と尋ねると「知っています」という返事で、さらに「最初の“同値”ということと“同値関係”の“同値”とは意味が違いますが知っていますか?」と尋ねると「知っています」という返事。しかし上のことと関係があることに気づいた様子がないので、聞いてみると“同値関係”がどういうことかについて理解はしていなかった。これは修士の最終回のセミナーでのことであつたが、最後に以下のようなことを言われた。

「先生に話しても理解してもらえないかもしれませんが、知っているとは、我々は上のようなことを言います」

学生は、このような意味での「知ること」と「問題の解き方を覚える」という学び方を大学以前から続けてきているので、それを大学入学後に修正することはとても難しい。院生の2人には常に注意し続けているので、分かっているようであるが（「今までの勉強が無駄だった。もう一度学び直したい」といつも言っていた）、学び方を変えていくのはなかなか難しい、というのが実情である。

上の院生は、高校の数学を理解していない教員志望のまわりの学生を見て、教員志望は止めたと言っていた。修士を修了してIT系の企業に就職した。もう一名の院生は中高の教員志望で、より数学を身につけてから教員になりたい、ということであつた。修士に入ってから数式処理を学び、Runge-Kutta法に関する理論的結果が修論になった。数式処理を教材作成に生かしたい、ということで、この先も勉強を続けてから教員になることを希望し、よりレベルの高い他大学の博士課程に進んだ（城西大の数学には博士課程がない）。2人とも（最初の者は私と共著で）修論を英文にして発表予定である。

4 おわりに

このノートでは、現状の理解の助けとするために、実際に行ってきた大学教育での事例を多く入れた。学生は総じて素直で真面目、という印象を持っている。講義や学生の勉強が無駄にならないようにしたい、と思うのだが、難しさを感じることが多い。修士では個人指導になるので、学生の数学能力の向上を助けることはより可能になるが、これも多大な労力と時間がかかった。理学部数学科でここに述べたような状況なので、他大学の理工系の数学ではより厳しい状況にあることは想像できる。

多くの大学では、理工系の学部があっても、書籍部には数学の専門書はない（売れないので）。理工系の学部の入試に数学を課さない大学もある。その大学の（数学が専門ではない）ある教員（工学部）は「『入試に数学がないから選んだのに、大学入学後に数学が必修なのはけしからん』と父母会で文句を言われた。『数学を進めるためではなくて論理的思考を身につけてもらうために数学をやっています』と答えた」と私に話してくれた。

学生の教育実習視察で中学高校へ行く機会が増えた。いろいろな学校があるが、生徒のレベルがと

でも低い小中一貫校（公立）で、アクティブ・ラーニングを効果的に実践しているのを実際に見て、校長先生の話をうかがうなど、私はとても参考になった。また、ある地方の公立中学で、一つの問題に対し様々な解き方を準備し、生徒からそれらをすべて引き出すような綿密な授業計画（1 回分）を、独自のストーリーに組み立てて実行しているのを見ることができて、感銘を受けたこともあった。大学教育においては、入学当初から、セミナーやグループなどでの少人数学修や e ラーニングなどをうまく取り入れていくことが必要ではないかと思っている。

参考文献

- [1] 志賀浩二, 数学が育っていく物語 (全 6 冊), 岩波書店, 1994.
- [2] 大島利雄, Risa/Asir による曲線と関数グラフの描画, 数式処理とその周辺分野の研究, 数理解析研究所講究録 **1955** (2015), 102–113.
- [3] 大島利雄, 【特別講演】大学の数学教育における数式処理と $\text{T}_\text{P}\text{X}$ の活用, 数式ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究, 数理解析研究所講究録 **1978** (2015), 1–11.
- [4] T. Oshima, Drawing curves, *Mathematical Progress in Expressive Image Synthesis III*, edited by Y. Dobashi and H. Ochiai, *Mathematics for Industry* **24** (2016), 95–106, Springer.
- [5] 大島利雄, 【特別講演】数式処理による線型代数や微積分の問題と解法の作成, 数学ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究, 数理解析研究所講究録 **2022** (2017), 1–9.
- [6] 藤田昌大, 飯田正敏, 花岡陽平, 安田英典, 数学科における情報科教科課程教育について, 城西大学数学科教職課程紀要 **1**(1) (2017), 1077–1086.
- [7] 濱口直樹, 大島利雄, 高遠節夫, 立体モデルおよびスライド・タブレットを併用した数学教材の開発, 城西大学数学科教職課程紀要 **1**(2) (2017), 2006–2013.
- [8] 大島利雄, 計算尺を作ろう, 2017.
<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~oshima/lecture/paperscale.pdf>
 中高生から : <http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~oshima/lecture/fourier18.pdf>
- [9] 大島利雄, 計算尺を使った数学教育, 数学ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究, 数理解析研究所講究録 **2067** (2018), 1–10.
- [10] 濱口直樹, 大島利雄, 高遠節夫, 多面体からできる回転体の教材作成とその利用について, 数学ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究, 数理解析研究所講究録 **2105** (2019), 19–25.
- [11] 大島利雄, 個数を数える, 数学書房選書 **7**, 数学書房, 2019.
- [12] 大島利雄, `os_muldif.rr`, 数式処理 Risa/Asir のライブラリ, 2008–2019.
<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~oshima/>