

非可換確率論における自己分解可能分布

名古屋市立大学大学院理学研究科 佐久間紀佳

Noriyoshi Sakuma

Graduate School of Science,

Nagoya City University,

本稿は非可換確率論における自己分解可能分布の研究について、前島信氏との共同研究 [9] および野場啓, 植田優基, 長谷部高広らとの共同研究 [8] で得た結果を手短かに解説することを目的とする。

1 非可換確率論における自己分解可能分布の定義とこれまでの結果

本稿では確率論, 非可換確率論双方で 1 次元分布のみを扱う. (非可換) 確率変数 X に対して $\mathcal{L}(X)$ で X の (解析的) 確率分布とする. 通常の独立性 (単に独立, あるいはテンソル独立という) と比較しながら, 自由独立, ブール独立, 単調独立の 3 つの独立性を考える.

通常の確率論における自己分解可能分布については Sato [15] が, 非可換確率論の基本的なことについては Nica and Speicher [13], Mingo and Speicher [10], Muraki [12] や長谷部 [3] などが参考になる.

自由独立, ブール独立, 単調独立それぞれの独立性のもとで与えられた 2 つの分布からそれぞれに従う独立な確率変数の和の分布を生成する演算である畳み込みが定義できる. 畳み込み, 自由畳み込み, ブール畳み込み, 単調畳み込みをそれぞれ $*$, \boxplus , \boxtimes , \boxtriangleright で記す.

分布の計算, 特に独立な確率変数の和の分布を考える際, 確率論ではフーリエ変換を用いて考える. すなわち, $\hat{\mu}(t) = \int e^{itz} \mu(dx)$ とすると, $\log(\widehat{\mu * \nu}(t)) = \log(\hat{\mu}(t)) + \log(\hat{\nu}(t))$ をみたすこととフーリエ逆変換から具体的な分布を計算する. これの非可換類似が確立されている. まずその道具立てを導入する. $G_{\mu} := \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{z-x} \mu(dx)$ を確率分布 μ のコーシー変換, $F_{\mu}(z) = 1/G_{\mu}(z)$ を逆数コーシー変換という. これらは \mathbb{C}^+ で定義され, 良い性質を持つ. スティルチェス逆変換公式と呼ばれる解析的変換から分布への逆変換公式も存在する. 確率分布 μ の逆数コーシー変換 $F_{\mu}^{-1}(z)$ が上半平面の無限遠近傍で定義でき, それから確率分布 μ の自由キムラント変換 $C_{\mu}(z) = zF_{\mu}^{-1}(1/z) - 1$ が定義できる. また, $K_{\mu}(z) = z - F_{\mu}(z)$, $\eta_{\mu}(z) = 1 - zF_{\mu}(1/z)$ を確率分布 μ のエネルギー関数, エータ変換とそれぞれ呼ぶ. これらに対して,

$$C_{\mu \boxplus \nu}(z) = C_{\mu}(z) + C_{\nu}(z), \quad K_{\mu \boxplus \nu}(z) = K_{\mu}(z) + K_{\nu}(z), \quad F_{\mu \boxtriangleright \nu}(z) = F_{\mu}(F_{\nu}(z))$$

が成り立つ. ここで z の定義域は逆数コーシー変換やエネルギー関数は \mathbb{C}^+ で良いが, 自由キムラント変換に対してのみ逆数コーシー変換 $F_{\mu}^{-1}(z)$ が定義されるような適当な下半平面の領域を取る必要があることを注意する.

確率変数 X が自己分解可能分布に従うとは任意の $c \in (0, 1)$ に対して X と独立なある確率変数 Y_c が存在して

$$X \stackrel{d}{=} cX + Y_c, \quad (\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(cX) * \mathcal{L}(Y_c))$$

と書けることをいう。独立性を非可換確率論の枠組みで「自由独立」、「ブール独立」、「単調独立」に置き換えても自己分解可能分布は定義できる。それらをそれぞれ自由自己分解可能分布, ブール自己分解可能分布, 単調自己分解可能分布と呼ぶ。自己分解可能分布, 自由自己分解可能分布, ブール自己分解可能分布, 単調自己分解可能分布をそれぞれの独立性のもとでの畳み込み記号を用いて, $L(*), L(\boxplus), L(\boxplus), L(\triangleright)$ で記す。

確率論において自己分解可能分布は (1) 極限定理による特徴付け, (2) レヴィ測度による特徴付け, (3) 自己相似過程による特徴付け, (4) 確率積分による特徴付けなどが知られている。

自由自己分解可能分布については [6, 14, 1] で確率論における自己分解可能分布の特徴付け (1),(2),(4) に対するものは示された。(3) については Fan [5] が部分的な解決をしていたが, 不十分なものであった。

[7] で次の解析的な特徴づけを与えた。(5) $\mu \in L(\boxplus)$ であることと μ の自由キュムラント変換 C_μ は $z \in \mathbb{C}^-$ で $\text{Im}(C'_\mu(z)) \leq 0$ をみたす解析関数 $C_\mu: \mathbb{C}^- \rightarrow \mathbb{C}$ へ解析接続可能であることが同値である。この定理は Bercovici と Voiculescu が与えた自由無限分解可能分布に対する解析的な特徴付けをより狭いクラスである自由自己分解可能分布に対応するものに改良したものである。すでに知られている結果だがこれにより自由自己分解可能分布が自由無限分解可能分布のサブクラスであることも従う。重要な帰結として、これにより正規分布が自由自己分解可能であることが示された。

最近, 単調自己分解可能分布については [4] において極限定理や自由自己分解可能分布のクラスとの関係性の観点から深く調べられ, 確率論, 自由確率論の自己分解可能分布とは大きく様相が異なることが判明した。特に (1) 極限定理における対応が成立しない。

2 ブール自己分解可能分布について

まずブール畳み込みを考えると全ての確率分布がブール無限分解可能となる。そして η 変換を通してレヴィヒンチン型表現を持つ: すなわち, 確率分布 μ に対して $a_\mu \geq 0, \gamma_\mu \in \mathbb{R}$ レヴィ測度 ν_μ による $(a_\mu, \nu_\mu, \gamma_\mu)$ の三つ組が一意に定まり,

$$\eta_\mu(z) = a_\mu z^2 + \gamma_\mu z + \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{1-zt} - 1 - zt \mathbf{1}_{[-1,1]}(t) \right) \nu_\mu(dt), z \in \mathbb{C}^-$$

と書ける。

ブール自己分解可能分布については (1),(2),(4) が成り立つはずである。厳密にいうと (1) については [2] では独立同分布のケースしか扱っておらず, 同分布でない一般の自己分解可能分布に対する極限定理の場合を確認する必要がある。しかしこれは [14] と同じやり方でできるであろう。(2), (3) については Bercovici-Pata 全単射を用いて [1, 9] の通りすべて同じ類似の結果が成り立つはずである。

ブール自己分解可能分布の (2) についてももう少し考えてみる。確率分布 μ がブール自己分解可能分布であればそのレヴィ測度が $\nu_\mu(dx) = \frac{k_\mu(x)}{|x|} dx$ と書けることとなることが既存の結果から簡単にわ

かる. ここで $k_\mu(x)$ は 0 でモードを持つ非負値関数. このレヴィ測度 $\nu_\mu(dx)$ の絶対連続部分 ν_μ^{ac} に $|x|$ を乗じたもの, すなわち, $k_\mu(x) = |x| \frac{d\nu_\mu^{ac}}{dx}$ に対応する部分を計算する方法を見つけた [8]:

$$k_\mu(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\pi|x|} \operatorname{Im}[F_\mu(x + i\varepsilon)], \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

これにより多くの例が計算できるようになった. 特に面白いと思われるのは次である:

定理 1. (1) 平均が 0 であるような正規分布は全てブール自己分解可能分布である.

(2) |平均/標準偏差| が一定値を超えると正規分布がブール自己分解可能分布でなくなる.

これは自己相似性に関連する類似性を否定する結果となっている. 証明のキーポイントは μ が正規分布の場合

$$G'_\mu(z) = 1 - zG_\mu(z), \quad z \in \mathbb{C}^+.$$

という形でそのコーシー変換が満たす微分方程式が得られ, そのコーシー変換を微分方程式の解として表現することができる. それから上の公式を適用することになる.

3 自由自己分解可能分布と自己相似性について

[9] で以下のことを示した. 自由自己分解可能分布については確率論同様, H -自己相似性自由加法過程の周辺分布は自由自己分解可能分布に従うことは示されていた. 今回, この命題の逆を示した:

定理 2. 自由自己分解可能分布に対してそれを時刻 1 の分布として持つ H -自己相似性自由加法過程が一意に存在する

あるモーメント条件を持つレヴィ過程 $\{Z_t\}_{t \geq 0}$ による非ランダムな関数の確率積分で作られる確率変数 $X = \int_0^\infty e^{-t} dZ_t$ は自由自己分解可能分布に従うことが知られている. この $\{Z_t\}_{t \geq 0}$ をバックグラウンド自由レヴィ過程と呼ぶ. 今回得られた $\mu \in L(\text{田})$ を時刻 1 の分布としてもつ H -自己相似自由加法過程 $\{X_t\}_{t \geq 0}$ による確率積分 $Z_t = \int_1^{e^t} u^t dX_u$ で作られる確率過程 Z_t から $X_1 = \int_0^\infty e^{-t} dZ_t$ をみたくバックグラウンド自由レヴィ過程を求めることができることを示した. これらは確率論とパラレルな結果である. この表現から $\mathcal{C}_{\mathcal{L}(X_1)}(z) = z\mathcal{C}'_{\mathcal{L}(Z_1)}(z)$ が X_1 の分布の自由キュムラントになることがわかった. これにより [7] の自由自己分解可能分布のキュムラントになるために条件が, $\mathcal{L}(X_1)$ が自由無限分解可能になるための条件となっていることが判明した. 詳細と例は [9] を参考.

謝辞

本研究課題は JSPS 科研費 19H01791, 19K03515, JPJSBP120209921, JPJSBP120203202 の助成を受けたものです.

参考文献

- [1] O. E. Barndorff-Nielsen, S. Thorbjørnsen, Classical and free infinite divisibility and Lévy processes. Quantum independent increment processes. II, 33–159, *Lecture Notes in Math.*,

- 1866, Springer, Berlin, 2006.
- [2] H. Bercovici and V. Pata, Stable laws and domains of attraction in free probability theory, *Ann. Math.*, **149**, (1999) 1023–1060.
- [3] 長谷部高広, 非可換確率論における独立性と無限分解可能分布. *数学* **70**, no. 3, (2018), 296–320.
- [4] U. Franz, T. Hasebe, S. Schleißinger, Monotone increment processes, classical Markov processes, and Loewner chains. *Dissertationes Math.*, **552**, (2020), 119 pp.
- [5] Z. Fan, Self-similar of free stochastic processes, *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **9**, (2006) 451–469.
- [6] G. P. Chistyakov and F. Götze, Limit theorems in free probability theory. I. *Ann. Probab.*, **36**, (2008), 54–90.
- [7] T. Hasebe, N. Sakuma, S. Thorbjørnsen, The normal distribution is freely self-decomposable. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (2019), no. 6, 1758–1787.
- [8] T. Hasebe, K. Noba, N. Sakuma, Y. Ueda, On Boolean selfdecomposable distributions. arXiv:2206.04932.
- [9] M. Maejima and N. Sakuma, Selfsimilar free additive processes and freely selfdecomposable distributions. *J. Theoret. Probab.*, online first.
- [10] J. Mingo and R. Speicher, *Free probability and random matrices*. Fields Institute Monographs, **35**. Springer, New York; Fields Institute for Research in Mathematical Sciences, Toronto, ON, 2017. xiv+336 pp.
- [11] W. Młotkowski, N. Sakuma, Y. Ueda, Free self-decomposability and unimodality of the Fuss-Catalan distributions. *J. Stat. Phys.*, **178**, (2020), no. 5, 1055–1075.
- [12] N. Muraki, The five independences as natural products. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **6** (2003), no. 3, 337–371.
- [13] A. Nica and R. Speicher, *Lectures on the combinatorics of free probability*. London Mathematical Society Lecture Note Series, **335**. Cambridge University Press, Cambridge, 2006. xvi+417 pp.
- [14] N. Sakuma, Characterizations of the class of free self-decomposable distributions and its subclasses. *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **12**, (2009), 51–65.
- [15] K. Sato, *Lévy processes and infinitely divisible distributions*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 68, Cambridge University Press, Cambridge, 2013. Translated from the 1990 Japanese original; Revised edition of the 1999 English translation.