

# Stability of the phase transition and critical behavior of the Ising model against quantum perturbation

上島芳倫 (Yoshinori KAMIJIMA)\*      坂井哲 (Akira SAKAI)†

## 1 導入

1920年にLenz [10] は今日 Ising 模型と呼ばれる強磁性体のモデルを提出した。これは1925年にIsing [8] が, アップおよびダウンの二方向のみを取る磁気モーメント鎖のモデルとして取り扱って以来, 強磁性・常磁性相転移を記述するモデルとして長きに亘って研究されて来た。具体的には,  $d$ 次元グラフ  $(\Lambda, \mathcal{E})$  上のスピン配置  $\sigma \in \{-1, +1\}^\Lambda$  を考えたとき, 物理系のエネルギーに依存するような或る確率測度に従ってその配置  $\sigma$  がランダムに実現される, というモデルである。二個から成るスピンの組  $\{\sigma_x, \sigma_y\}$  に対して, エネルギーは方向が揃うときに下がるように  $-J_{x,y}\sigma_x\sigma_y$  ( $J_{x,y} > 0$ ) と与えられる。これを本稿では古典Ising 模型と称する。Ising モデルに対して, 例えば, 帯磁率 (磁気感受率)  $\chi(\beta)$  は臨界逆温度  $\beta_c$  の近傍で  $\chi(\beta) \asymp |\beta_c - \beta|^{-\gamma}$  と振る舞う<sup>1)</sup> ことが予想されている。ここに現れた指数  $\gamma$  を臨界指数と呼ぶ。特に, 相互作用係数  $J_{x,y}$  が鏡映正値性 [4] を満たす場合, 次元  $d > 4$  かつ高温相に於いて平均場の値  $\gamma = 1$  に退化することが厳密に証明されている。鏡映正値性が成り立つためには相互作用係数に強い対称性を課す必要がある為, より広いクラスの相互作用係数に対して平均場臨界現象を示すには別の手法が求められる。その一つがレース展開 [11, 12] であり, 十分高次元で鏡映正値性を仮定せず平均場臨界現象が示されている。

以上の説明ではスピンを単なる  $\pm 1$  を取る変数として扱った一方で, 量子力学的な観点からはスピンを作用素として扱う方が適切である。二方向のみを取るスピンは Pauli 行列によって記述される。しかしながら, 単にスピン変数  $\sigma_x$  を Pauli 行列に置き換えるのみでは, 次節で見ると古典 Ising 模型に一致してしまうので, 強度  $q > 0$  の横磁場を印加する。それによって, 古典 Ising 模型とは異なり, 量子効果が現れる。このモデルを量子 Ising 模型 (或いは横磁場 Ising 模型) と称する。量子 Ising 模型では温度のみならず横磁場の変化によってもスピンが取り得る状態がゆらぐ。その結果, 古典とは異なる種類の相転移が起こる。

我々はこの横磁場の強さ  $q$  を古典 Ising 模型からの摂動と見做したときに, 高次元に於け

\* Mathematics Division, National Center for Theoretical Sciences, Taiwan (國家理論科學研究中心數學組), <https://orcid.org/0000-0003-3037-8250>

† 北海道大学大学院理学研究院, <https://orcid.org/0000-0003-0943-7842>

1)  $x \rightarrow a$  のとき  $f(x) \asymp g(x)$  とは,  $\exists \delta, C_1, C_2 \in (0, \infty)$  s.t.  $\forall |x - a| \leq \delta, C_1 g(x) \leq f(x) \leq C_2 g(x)$ .

る量子 Ising 模型の臨界現象が果たして古典のそれから変わるのか否かについて興味がある。この問題について、相互作用係数  $J_{x,y}$  が一様な最近接強磁性モデル  $J_{x,y} = J\mathbb{1}_{\{\|y-x\|_1=1\}} \geq 0$  の場合に対しては、Björnberg [2] が関連する結果を得ている。即ち、逆温度  $\beta$  を固定したとき、組  $(q_0, J_c(q_0))$  が存在して象限  $\{(q, J) \mid q > q_0 \ \& \ J < J_c(q)\}$  の中では

$$\left. \begin{array}{l} d > 4 \text{ かつ } \beta < \infty \\ d > 3 \text{ かつ } \beta = \infty \end{array} \right\} \Rightarrow \chi(\beta, q) \asymp \|(q, J) - (q_0, J_c(q_0))\|_2^{-1} \quad (1)$$

と為ることが示されている (図1の青色の領域)。しかし、我々の扱いたい問題は古典系からのずれなので、むしろ  $(q, J)$  を固定し  $\beta$  を変化させたときに、或いは  $(\beta, J)$  を固定し  $q$  を変化させたときに、帯磁率が如何なる挙動をするのかについて知りたい (図1の緑線)。これらは上の象限の範囲から外れている。それに加えて、[2] では鏡映正值性によって赤外評価 (下記の (12)) を得た上で (1) を証明している。量子 Ising 模型に対するレース展開を導出することによって、我々はより広い相互作用係数のクラスで赤外評価を証明したい。

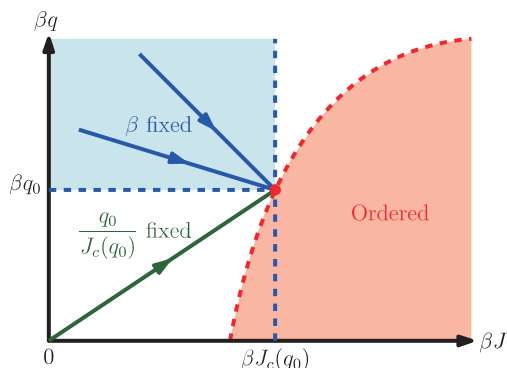


図1: 量子 Ising 模型の相図.  $\beta J_c(q)$  の形は数値計算に依る予想である。

本稿では、レース展開に基づく解決方策によって、上記の問題について得られた結果を解説する。現在までにレース展開の導出は出来ており、今後は先行研究での赤外評価に於ける  $\omega^2$  と  $\|k\|_2^2$  の係数を修正すること (古典極限  $q \downarrow 0$  との整合性の為) に取り組む予定である。また、レース展開は臨界点の漸近評価をも与える (例えば [6] を参照) ので、本研究で確立した手法は臨界逆温度  $\beta_c(q)$  の形を決定するのもにも活用できることが期待される。

## 2 モデルの定義

量子 Ising 模型の定義を述べる前に、テンソル積に関する記法を導入する。原点  $o = (0, \dots, 0)$  を含む  $\mathbb{Z}^d$  内の有限部分グラフを  $(\Lambda, \mathcal{E})$  とする。Pauli 行列

$$S^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

に対して、それらと単位行列  $I$  によるテンソル積を

$$S_x^i := \underbrace{I \otimes \cdots \otimes I}_{|\Lambda| \text{ 個}} \otimes \overbrace{S_x^i}^x \otimes I \otimes \cdots \otimes I \quad (i = 1, 3, x \in \Lambda) \quad (2)$$

と書く。このとき、量子 Ising 模型の Hamiltonian と分配関数を次のように定義する。

**定義 1** 量子 Ising 模型の Hamiltonian 作用素とはテンソル空間  $(\mathbb{C}^2)^{\otimes \Lambda} = \bigotimes_{x \in \Lambda} \mathbb{C}^2$  上の作用素

$$H := - \sum_{\{x,y\} \in \mathcal{E}} J_{x,y} S_x^3 S_y^3 - q \sum_{x \in \Lambda} S_x^1 - h \sum_{x \in \Lambda} S_x^3 \quad (3)$$

である。ここで、 $(J_{x,y})_{\{x,y\} \in \mathcal{E}} \subset \mathbb{R}$  を相互作用係数、 $h > 0$  を外部磁場の強さ、 $\delta > 0$  を横磁場の強さと呼ぶ。また、逆温度  $\beta \in (0, \infty]$  と作用素  $A: (\mathbb{C}^2)^{\otimes \Lambda} \rightarrow (\mathbb{C}^2)^{\otimes \Lambda}$  に対して、行列のトレースによって分配関数  $Z_\Lambda$  と  $A$  の期待値  $\langle A \rangle_{\beta, \delta, h; \Lambda}$  を

$$Z_\Lambda(\beta, q, h) := \text{Tr}[e^{-\beta H}], \quad \langle A \rangle_{\beta, q, h; \Lambda} := \frac{\text{Tr}[e^{-\beta H} A]}{Z(\beta, q, h)}$$

と定義する。

**注意 2** 以下では有限格子  $\Lambda$  に周期境界条件を課してトーラスと見做す。相互作用係数には次の性質を仮定する。即ち、

**並進対称性**  $\forall \{x, y\} \in \mathcal{E}, J_{y-x} := J_{o, y-x} = J_{x, y}$ .

**$\mathbb{Z}^d$  対称性**  $\forall x \in \mathbb{Z}^d, J_x$  が鏡映変換および  $90^\circ$  の回転変換に関して対称。

**可総和性**  $\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} J_x < \infty$ .

**既約性**  $(J_{x,y})_{x,y \in \Lambda}$  をグラフの隣接行列と見做したとき、既約行列の条件を満たす。

**強磁性**  $\forall \{x, y\} \in \mathcal{E}, J_{x,y} > 0$ .

また、 $J > 0$  に対して、相互作用係数が  $J_{x,y} = J \mathbb{1}_{\{\|x-y\|_1=1\}}$  で与えられる<sup>2)</sup>とき、これを最近接モデルと呼ぶ。

**注意 3** Pauli 行列  $S^3$  の固有ベクトルを

$$|+1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \xleftrightarrow{\text{転置共役}} \quad \langle +1| = (1 \ 0), \quad \langle -1| = (0 \ 1)$$

と表したとき、ベクトルの組  $\{|\vec{\sigma}\rangle := \bigotimes_{x \in \Lambda} |\sigma_x\rangle \mid \sigma_x \in \{-1, 1\}, x \in \Lambda\}$  はテンソル空間  $(\mathbb{C}^2)^{\otimes \Lambda}$  の基底に為る。行列のトレースが基底との内積の和で表されることと、固有値方程式

2)  $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d$  に対して、 $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^d |x_i|$  である。 $\mathbb{1}_{\{\cdot\}}$  は指示関数であって、 $\cdot$  が真ならば 1 を取り、偽ならば 0 を取る関数として定義される。

$S_x^3|\vec{\sigma}\rangle = \sigma_x|\vec{\sigma}\rangle$  とを用いれば、特に  $q = 0$  のとき、

$$\begin{aligned} Z_\Lambda(\beta, q, h) &= \sum_{\vec{\sigma} \in \{\pm 1\}^\Lambda} \left\langle \vec{\sigma} \left| \exp \left( \beta \sum_{\{x,y\} \in \mathcal{E}} J_{x,y} S_x^3 S_y^3 + \beta h \sum_{x \in \Lambda} S_x^3 \right) \right| \vec{\sigma} \right\rangle \\ &= \sum_{\vec{\sigma} \in \{\pm 1\}^\Lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\langle \vec{\sigma} \left| \left( \beta \sum_{\{x,y\} \in \mathcal{E}} J_{x,y} S_x^3 S_y^3 + \beta h \sum_{x \in \Lambda} S_x^3 \right)^n \right| \vec{\sigma} \right\rangle \\ &= \sum_{\vec{\sigma} \in \{\pm 1\}^\Lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \beta \sum_{\{x,y\} \in \mathcal{E}} J_{x,y} \sigma_x \sigma_y + \beta h \sum_{x \in \Lambda} \sigma_x \right)^n \langle \vec{\sigma} | \vec{\sigma} \rangle \\ &= \sum_{\vec{\sigma} \in \{\pm 1\}^\Lambda} \exp \left( \beta \sum_{\{x,y\} \in \mathcal{E}} J_{x,y} \sigma_x \sigma_y + \beta h \sum_{x \in \Lambda} \sigma_x \right) \end{aligned}$$

と為る。これは古典 Ising 模型の分配関数に一致する。

本稿では帯磁率の臨界現象を取り扱う。量子 Ising 模型の（熱力学的極限での）帯磁率を

$$\chi(\beta, q) = \int_0^1 \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \langle S_o^3(0); S_x^3(t) \rangle_{\beta, q, 0} dt \stackrel{\text{高温相}}{=} \int_0^1 \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \langle S_o^3(0) S_x^3(t) \rangle_{\beta, q, 0} dt$$

によって定義する<sup>3)</sup>。ここで、 $S_x^3(t) = e^{-\beta t H} S_x^3 e^{\beta t H}$  および  $\langle A; B \rangle = \langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle$  と置いた。2番目の等号では、高温相で  $\langle S_o^3 \rangle_{\beta, q, 0} = 0$  が成り立つことを用いた [1, 5]。帯磁率に関して、臨界点  $\beta_c$  と臨界指数  $\gamma$  を

$$\beta_c = \inf \{ \beta \in (0, \infty) \mid \chi(\beta, q) = \infty \}, \quad \chi(\beta, q) \underset{\beta \uparrow \beta_c}{\sim} (\beta_c - \beta)^{-\gamma} \quad (4)$$

によって定義する。

**注意 4** 古典 Ising 模型では臨界点が上限で定義される一方で、(4) では下限で定義した。これは量子 Ising に於いて一般に  $\partial \chi(\beta, q) / \partial \beta > 0$  を示すのが難しい為である（ $\beta$  を増加させたときに一旦無限大に発散してから減少して再度無限大に発散する可能性を排除できない）。逆温度  $\beta$  ではなく、相互作用係数  $J_b$  と横磁場の強さ  $q$  に関してはそれぞれ単調増加と単調減少であることが知られている [2, Lemma 3.1]。これらの微分係数の間には関係式

$$\frac{\partial \chi(\beta, q)}{\partial \beta} = \sum_{b \in \mathcal{E}} J_b \frac{\partial \chi(\beta, q)}{\partial J_b} - q \left( -\frac{\partial \chi(\beta, q)}{\partial q} \right)$$

が成り立つので、右辺の第一項と第二項とを比較する必要がある。同様の問題を下記の命題 5 が孕んでいる。微分不等式 (6) から不等式 (7) を得る為には、 $\forall \beta \geq \beta_c(q), \chi(\beta, q) = \infty$  であることを使う。命題の仮定  $q \ll 1$  は微分不等式の下界が正になる為に課している。

3) 統計力学の枠組みに則れば、本来は自由エネルギーの 2 階微分で帯磁率を定義するべきである。しかしながら、作用素  $A(\alpha)$  に対して成り立つ公式  $\frac{\partial}{\partial \alpha} e^{A(\alpha)} = \int_0^1 e^{tA(\alpha)} \frac{dA(\alpha)}{d\alpha} e^{(1-t)A(\alpha)} dt$  を使い、かつ熱力学的極限を適切に取れば、 $\beta$  の因子を除いてこれらの定義は一致する。詳しく書くと、古典 Ising 模型に対して成り立つ相関不等式が量子 Ising 模型でも成り立つこと [1] によって、古典 Ising 模型に対する極限交換の操作 (例えば [7] を参照) をそのまま量子 Ising 模型に移植できる。本稿では紙面の都合上、等号成立の議論について割愛し、便宜的に上の表式を定義として採用する。

### 3 準備

レース展開について説明する前に、臨界指数が平均場の値を取る為の十分条件、Lie-Trotter の積公式による離散時空間表現、およびランダムカレント表現について説明する。以下では、長さ 1, 格子幅  $1/l$  のトーラスを  $T_l = \{0, \frac{1}{l}, \dots, \frac{l-1}{l}\}$  と記す。

#### 3.1 微分不等式

任意の  $(\omega, k) \in 2\pi\mathbb{Z} \times [-\pi, \pi]^d$  に対して、関数  $f \in L^1([0, 1] \times \mathbb{Z}^d, \mathbb{R})$  の Fourier 変換を

$$\hat{f}(\omega, k) = \int_0^1 \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} f(t, x) e^{i\omega t} e^{ik \cdot x} dt \stackrel{\text{区分的連続}}{=} \lim_{l \uparrow \infty} \frac{1}{l} \sum_{\tau \in T_l} f(\tau, x) e^{i\omega \tau} e^{ik \cdot x} \quad (5)$$

と定義する。二番目の等号では Riemann 和を使って離散化した。また、時空間のバブルを

$$\tilde{B}_{q,J} := \int_0^1 \sum_{\{x,y\} \in \mathcal{E}} \langle S_o^3(0) S_x^3(t) \rangle_{\beta,q,0} \frac{J_{y-x}}{\hat{J}_0} \langle S_o^3(0) S_y^3(t) \rangle_{\beta,q,0} dt$$

と定義する。このとき、帯磁率に対して、次の不等式評価が成り立つ。この命題によって、或る条件下では  $\gamma = 1$  であることがわかる。多少改良があるものの、証明は [5] で示されている他、著者らの以前の RIMS 講究録 [9] で示した為、本稿では詳しく解説せずにレース展開の説明に紙面を割く。

**命題 5 (上島, 坂井)** 注意 2 の仮定を満たす量子 Ising 模型に於いて、 $q \ll 1$  とする。 $\beta \in (0, \beta_c(q))$  に対して、

$$\frac{\hat{J}_0 \chi(\beta, q)^2}{1 + \beta \hat{J}_0 \tilde{B}_{q,J}} \left( 1 - 2q \frac{1 + 5\beta \hat{J}_0 \tilde{B}_{q,J}}{\hat{J}_0} - \frac{2\tilde{B}_{q,J}}{\chi(\beta, q)} \right) \leq \frac{\partial \chi(\beta, q)}{\partial \beta} \leq \hat{J}_0 \chi(\beta, q)^2 \quad (6)$$

が成り立つ。 $\tilde{B}_{q,J} < \infty$  のときにこの不等式の両辺を積分すると、逆温度とバブルにのみ依存する定数  $C_1(\beta), C_2(\beta, \tilde{B}_{q,J}) \in (0, \infty)$  が存在して、

$$\frac{C_1(\beta)}{\beta_c - \beta} \leq \chi(\beta, q) \leq \frac{C_2(\beta, \tilde{B}_{q,J})}{\beta_c - \beta} \quad (7)$$

が成り立つ。従って、 $\gamma = 1$  が帰結される。

#### 3.2 離散時空間表現

$d$  次元量子 Ising 模型は次の意味で  $d+1$  次元古典 Ising 模型に翻訳できる。

**命題 6 ([13])** 有限格子  $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$  上の量子 Ising 模型の分配関数  $Z_\Lambda$  に対して,

$$Z_\Lambda(\beta, q, h) = \lim_{l \uparrow \infty} \left( \frac{1}{2} \sinh \frac{2\beta q}{l} \right)^{l|\Lambda|/2} \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^{T_l \times \Lambda}} e^{-\beta \mathcal{H}^{\text{ST}}(\sigma)} =: \lim_{l \uparrow \infty} \left( \frac{1}{2} \sinh \frac{2\beta q}{l} \right)^{l|\Lambda|/2} Z_{T_l \times \Lambda}^{\text{ST}} \quad (8)$$

が成り立つ. 但し,  $K_l = (2\beta)^{-1} \log \coth(\beta q/l)$  と置いたとき,  $T_l \times \Lambda$  上の古典的な Hamiltonian 関数を次のように定義する:

$$\mathcal{H}^{\text{ST}}(\sigma) = - \sum_{(\tau, \{x, y\}) \in T_l \times \mathcal{E}} \frac{J_{x, y}}{l} \sigma_{\tau, x} \sigma_{\tau, y} - K_l \sum_{(\tau, x) \in T_l \times \Lambda} \sigma_{\tau, x} \sigma_{\tau + \frac{1}{l}, x} - \frac{h}{l} \sum_{(\tau, x) \in T_l \times \Lambda} \sigma_{\tau, x}.$$

格子の空間  $\Lambda$  に新たに座標軸を加えた  $T_l \times \Lambda$  を時空間と称する. 時空間のスピン配置を  $\sigma = (\sigma_{\tau, x})_{\tau \in T_l, x \in \Lambda} \in \{-1, +1\}^{T_l \times \Lambda}$  とすると, 量子 Ising 模型の期待値は

$$\langle S_\sigma^3(0) S_x^3(t) \rangle_{\beta, q, 0; \Lambda} = \lim_{l \uparrow \infty} \left\langle \left\langle \sigma_{0, o} \sigma_{\frac{lt}{l}, x} \right\rangle \right\rangle_{\beta, q, 0; T_l \times \Lambda} := \lim_{l \uparrow \infty} \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^{T_l \times \Lambda}} \sigma_{0, o} \sigma_{\frac{lt}{l}, x} \frac{e^{-\beta \mathcal{H}^{\text{ST}}(\sigma)}}{Z_{T_l \times \Lambda}^{\text{ST}}}, \quad (9)$$

$$\chi(\beta, q) = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \lim_{l \uparrow \infty} \chi_{T_l \times \Lambda}(\beta, q) := \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \lim_{l \uparrow \infty} \frac{1}{l} \sum_{(t, x) \in T_l \times \Lambda} \left\langle \left\langle \sigma_{0, o} \sigma_{\frac{lt}{l}, x} \right\rangle \right\rangle_{\beta, q, 0; T_l \times \Lambda} \quad (10)$$

などと, 古典 Ising 模型の期待値  $\langle \cdot \rangle$  で表せる.

### 3.3 ランダムカレント表現

時間と空間の組  $(x_0, x) \in T_l \times \Lambda$  を太字で  $\mathbf{x} = (x_0, x)$  と記す. 先ず, 時空間の点  $\mathbf{x} = (x_0, x)$ ,  $\mathbf{y} = (y_0, y) \in T_l \times \Lambda$  に対して, 改めて翻訳した先の古典 Ising 模型の相互作用係数を

$$\mathcal{J}_{\mathbf{y}-\mathbf{x}} := \mathcal{J}_{o, \mathbf{y}-\mathbf{x}} = \mathcal{J}_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} := \begin{cases} \frac{J_{x, y}}{l} & [x_0 = y_0 \ \& \ \{x, y\} \in \mathcal{E}], \\ K_l & [|y_0 - x_0| = \frac{1}{l} \ \& \ x = y], \\ 0 & [\text{otherwise}] \end{cases}$$

と置く. 次に, 時空間のボンド全体を  $\mathbb{B} = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \subset (T_l \times \Lambda)^2 \mid \mathcal{J}_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \neq 0\}$  と書く. このとき, 例えば, 二点相関関数  $\langle \sigma_{\mathbf{x}} \sigma_{\mathbf{y}} \rangle_{\beta, q, 0; T_l \times \Lambda}$  は重みを  $w(\mathbf{n}) = \prod_{b \in \mathbb{B}} (\beta \mathcal{J}_b)^{n_b} / n_b!$  として,

$$\langle \sigma_{\mathbf{x}} \sigma_{\mathbf{y}} \rangle_{\beta, q, 0; T_l \times \Lambda} = \frac{\sum_{\mathbf{n}: \partial \mathbf{n} = \{\mathbf{x}\} \Delta \{\mathbf{y}\}} w(\mathbf{n})}{\sum_{\mathbf{n}: \partial \mathbf{n} = \emptyset} w(\mathbf{n})} =: \sum_{\mathbf{n}: \partial \mathbf{n} = \{\mathbf{x}\} \Delta \{\mathbf{y}\}} \frac{w(\mathbf{n})}{Z_{T_l \times \Lambda}^{\text{ST}}} \quad (11)$$

と表せる. これをランダムカレント表現という. 但し,  $\mathbf{n} = (n_b)_{b \in \mathbb{B}} \in \mathbb{Z}_+^{\mathbb{B}}$  をカレント配置と呼び,  $\partial \mathbf{n} = \{\mathbf{v} \in T_l \times \Lambda \mid \sum_{b \in \mathbb{B}: b \ni \mathbf{v}} n_b \text{ が奇数}\}$  を源泉と呼ぶ<sup>4)</sup>.

ランダムカレント表現によって, 古典 Ising 模型の相関関数を視覚的に捉えることが可能になる. 例えば, スピン  $\sigma_{\mathbf{x}}$  と  $\sigma_{\mathbf{y}}$  の相関を「 $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  が連結である」というパーコレーションの言葉に翻訳できる. 詳しくは [7, 付録 A] などを参照されたい.

4) 非負整数全体の集合を  $\mathbb{Z}_+ = \{0\} \cup \mathbb{N}$  と記す. また,  $A \Delta B$  は集合  $A$  と  $B$  の対称差を表す.

## 4 主結果

最近接強磁性量子 Ising 模型の場合, Schwinger 関数  $G_{\beta,q}(t, \mathbf{x}) := \langle S_o^3(0)S_x^3(t) \rangle_{\beta,q,0}$  に対して, 次の赤外評価 [2, 3] が成り立ち<sup>5)</sup>, 故に  $\tilde{B}_{q,J} < \infty$  が導かれる:

$$d > 2 \quad \text{かつ} \quad \beta < \infty \implies 0 \leq \hat{G}_{\beta,q}(\omega, k) \leq \frac{48/\beta}{\omega^2/(2q) + 2dJ \sum_{j=1}^d (1 - \cos k_j)}. \quad (12)$$

これは一般に鏡映正値性が成り立つ相互作用係数のクラスにまで拡張できる. しかし, 鏡映正値性の条件は制限が強い為, 並進対称性が成り立つクラスまでは赤外評価をそのままの手法を以て証明できない. 次のレース展開はこの問題に対する一つの解決策を与える.

**定理 7 (上島, 坂井)** 強磁性量子 Ising 模型に於いて,  $T_l \times \Lambda$  上の非負値関数  $(\pi_{T_l \times \Lambda}^{(N)})_{N=0}^\infty$  と  $(\xi_{T_l \times \Lambda}^{(N)})_{N=0}^\infty$  が存在して, 任意の  $\mathbf{x} \in T_l \times \Lambda$  と  $M \in \mathbb{Z}_+$  に対して第  $M$  項までの交代和を

$$\Pi_{T_l \times \Lambda}^{(M)}(\mathbf{x}) = \sum_{N=0}^M (-1)^N \pi_{T_l \times \Lambda}^{(N)}(\mathbf{x}), \quad \Xi_{T_l \times \Lambda}^{(M)}(\mathbf{x}) = \sum_{N=0}^M (-1)^N \xi_{T_l \times \Lambda}^{(N)}(\mathbf{x}) \quad (13)$$

と置けば

$$G_{\beta,q;T_l \times \Lambda}(\mathbf{x}) = \Pi_{T_l \times \Lambda}^{(M)}(\mathbf{x}) + \left( \Xi_{T_l \times \Lambda}^{(M)} * G_{\beta,q;T_l \times \Lambda} \right)(\mathbf{x}) + (-1)^{M+1} R_{T_l \times \Lambda}^{(M+1)}(\mathbf{x})(\mathbf{x}) \quad (14)$$

が成り立つ. 但し,  $T_l \times \Lambda$  に於ける畳み込みを  $*$  で記した. さらに, 剰余項  $R_{T_l \times \Lambda}^{(M+1)}(\mathbf{x})$  は

$$R_{T_l \times \Lambda}^{(M+1)}(\mathbf{x})(\mathbf{x}) \leq \left( \xi_{T_l \times \Lambda}^{(M)} * G_{\beta,q;T_l \times \Lambda} \right)(\mathbf{x})$$

と評価される.

極限  $M \rightarrow \infty$  で交代級数 (13) が絶対収束すると仮定し, その極限値を  $\Pi_{T_l \times \Lambda} = \lim_{M \rightarrow \infty} \Pi_{T_l \times \Lambda}^{(M)}$  および  $\Xi_{T_l \times \Lambda} = \lim_{M \rightarrow \infty} \Xi_{T_l \times \Lambda}^{(M)}$  と記す. このとき, 剰余項は  $R_{T_l \times \Lambda}^{(M+1)}(\mathbf{x}) \rightarrow 0$  と収束する. レース展開 (14) の両辺の離散 Fourier 変換を取り, 有限体積での帯磁率が  $\chi_{T_l \times \Lambda}(\beta, q) = \hat{G}_{\beta,q;T_l \times \Lambda}(0, 0)$  と表されることに注意して  $\hat{G}_{\beta,q;T_l \times \Lambda}(\omega, k)$  について解くと,

$$\begin{aligned} \hat{G}_{\beta,q;T_l \times \Lambda}(\omega, k) &= \hat{\Pi}_{T_l \times \Lambda}(\omega, k) + l \cdot \hat{\Xi}_{T_l \times \Lambda}(\omega, k) \hat{G}_{\beta,q;T_l \times \Lambda}(\omega, k) = \frac{\hat{\Pi}_{T_l \times \Lambda}(\omega, k)}{1 - l \cdot \hat{\Xi}_{T_l \times \Lambda}(\omega, k)} \\ &= \frac{\hat{\Pi}_{T_l \times \Lambda}(\omega, k)}{\frac{\hat{\Pi}_{T_l \times \Lambda}(0, 0)}{\chi_{T_l \times \Lambda}(\beta, q)} + \underbrace{l(\hat{\Xi}_{T_l \times \Lambda}(0, 0) - \hat{\Xi}_{T_l \times \Lambda}(\omega, 0))}_{\asymp \omega^2} + \underbrace{l(\hat{\Xi}_{T_l \times \Lambda}(\omega, 0) - \hat{\Xi}_{T_l \times \Lambda}(\omega, k))}_{\asymp \|k\|_2^2}} \end{aligned} \quad (15)$$

5) Börnberg は  $d > 1$  かつ  $\beta = \infty$  の場合も証明しているものの, 本稿の記法と相性が悪いので割愛する.

を得る．今の場合，離散 Fourier 変換に  $1/l$  の因子が含まれる為，余分な因子  $l$  が現れることに注意されたい．あとはレーズ展開係数  $(\pi_{T_l \times \Lambda}^{(N)})_{N=0}^{\infty}$  と  $(\xi_{T_l \times \Lambda}^{(N)})_{N=0}^{\infty}$  を評価することによって，この式から赤外評価 (12) が得られる．

## 5 レーズ展開の導出

紙面の都合上，展開の第一段階のみを示す．この節では，曖昧さが生じない限り，期待値  $\langle \cdot \rangle$ ，分配関数  $Z^{\text{ST}}$ ，二点相関関数  $G$  の添字を省略する．また， $\{x\} \triangle \{y\}$  を  $x \triangle y$  と略記する．総和の範囲も集合全体の場合は省略する．導出を述べる前に必要な記号を定義する．

**定義 8** カレント配置を  $\mathbf{n} = (n_b)_{b \in B} \in \mathbb{Z}_+^B$  とし，時空間の点を  $x, y \in T_l \times \Lambda$  とする．

1. 或る部分集合を  $A \subset T_l \times \Lambda$  とする． $x = y \in A$  のとき，または  $\nu \in \mathbb{N}$  と自己回避経路  $(\omega_0, \dots, \omega_\nu) \subset A$  が存在して， $\forall i \in \{1, \dots, \nu\}$ ,  $n_{\{\omega_{i-1}, \omega_i\}} > 0$  かつ  $\omega_0 = x$  かつ  $\omega_\nu = y$  を満たすとき， $x \xleftrightarrow{\mathbf{n}} y$  in  $A$  と書く． $A = T_l \times \Lambda$  の場合は単に  $x \xleftrightarrow{\mathbf{n}} y$  と書く．
2. カレント配置  $\mathbf{n}$  に依存する事象  $E$  とボンド  $b \in B$  を与えたとき， $E$  off  $b$  とは， $\mathbf{n}$  の内  $n_b$  を 0 にして得られるカレント配置に対して  $E$  が起こることをいう．これを用いて， $\tilde{C}_{\mathbf{n}}^b(x) = \{v \mid x \xleftrightarrow{\mathbf{n}} v \text{ off } b\}$  と定義する．
3. 有向ボンド  $b = (\underline{b}, \bar{b})$  が連結  $x \xleftrightarrow{\mathbf{n}} y$  に関してピボタルであるとは， $x \xleftrightarrow{\mathbf{n}} \underline{b}$  off  $b$  かつ  $\bar{b} \xleftrightarrow{\mathbf{n}} y$  in  $\tilde{C}_{\mathbf{n}}^b(x)^c$  が成り立つことをいう．もしカレント配置  $\mathbf{n}$  の下，連結  $x \xleftrightarrow{\mathbf{n}} y$  がピボタル・ボンドを使わずに起こるならば，特に  $x \xleftrightarrow{\mathbf{n}} y$  と書く．
4. 或る部分集合を  $A \subset T_l \times \Lambda$  とする． $A$  に両端点が含まれるボンド全体から成る集合を  $B_A$  とする． $A \ni o, x$  のとき， $A$  内に制限された二点相関関数を

$$G_{\beta, q; A}(x) = \sum_{\sigma \in \{\pm 1\}^A} \sigma_o \sigma_x \frac{e^{-\beta H^{\text{ST}}(\sigma)}}{Z_A^{\text{ST}}} = \sum_{\substack{\mathbf{n}: \partial \mathbf{n} = o \triangle x \\ (\mathbf{n}|_{B \setminus B_A} = 0)}} \frac{w(\mathbf{n})}{\tilde{Z}_A^{\text{ST}}}$$

と定義する．簡単のため， $G_A = G_{\beta, q; A}$  および  $G = G_{T_l \times \Lambda}$  と略記する．

**主結果の証明の要旨** 二点相関関数の表現 (11) から， $o \neq x$  のときには必ずこれら二点を結ぶ  $n_{\{\omega_{j-1}, \omega_j\}}$  が全て奇数であるような経路  $(\omega_j)_j$ ——以降このような経路を便宜的に奇経路と称する——が存在することに注意する．その経路をピボタル・ボンド ( $o$  から  $x$  に至る何れの経路も必ず通過するボンド) が含まれる場合と然らざる場合，さらに後者は最初のピボタル・ボンドを境に二つのクラスターに分離する：

$$G(x) = \sum_{\partial \mathbf{n} = o \triangle x} \frac{w(\mathbf{n})}{\tilde{Z}^{\text{ST}}} \mathbb{1}_{\{o \xleftrightarrow{\mathbf{n}} x\}}$$



$$\begin{aligned}
&= \underbrace{\sum_{\partial \mathbf{n}=\mathbf{o} \Delta \mathbf{x}} \frac{w(\mathbf{n})}{\tilde{Z}_{\text{ST}}} \mathbb{1}_{\{\mathbf{o} \leftrightarrow \mathbf{x}\}}}_{=:\pi^{(0)}(\mathbf{x})} + \sum_{\mathbf{b}} \sum_{\partial \mathbf{n}=\mathbf{o} \Delta \mathbf{x}} \frac{w(\mathbf{n})}{\tilde{Z}_{\text{ST}}} \mathbb{1}_{\{\mathbf{o} \leftrightarrow \mathbf{b} \text{ off } \mathbf{b}\}} \mathbb{1}_{\{n_{\mathbf{b}} \text{ が奇数}\}} \mathbb{1}_{\{\bar{\mathbf{b}} \leftrightarrow \mathbf{x} \text{ in } \tilde{c}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{b}}(\mathbf{o})^c\}} \\
&= \pi^{(0)}(\mathbf{x}) + \underbrace{\sum_{\mathbf{b}} \tanh(\beta \mathcal{J}_{\mathbf{b}}) \sum_{\partial \mathbf{n}=\mathbf{o} \Delta \{\underline{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{b}}\} \Delta \mathbf{x}} \frac{w(\mathbf{n})}{\tilde{Z}_{\text{ST}}} \mathbb{1}_{\{\mathbf{o} \leftrightarrow \mathbf{b} \text{ off } \mathbf{b}\}} \mathbb{1}_{\{n_{\mathbf{b}} \text{ が偶数}\}} \mathbb{1}_{\{\bar{\mathbf{b}} \leftrightarrow \mathbf{x} \text{ in } \tilde{c}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{b}}(\mathbf{o})^c\}}}_{(*)} .
\end{aligned}$$

この最右辺の  $\mathbb{1}_{\{n_{\mathbf{b}} \text{ が偶数}\}}$  は常に 1 なので省略できる。実際、 $\mathbf{o} \leftrightarrow \mathbf{b}$  および  $\bar{\mathbf{b}} \leftrightarrow \mathbf{x}$  それぞれに奇経路が存在するので、 $\{\underline{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{b}}\}$  が源泉である為には  $n_{\mathbf{b}}$  が偶数でなければならない。クラスター  $\tilde{c}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{b}}(\mathbf{o})$  で条件付けることによって、上式の第二項のカレント配置を二つに分ける：

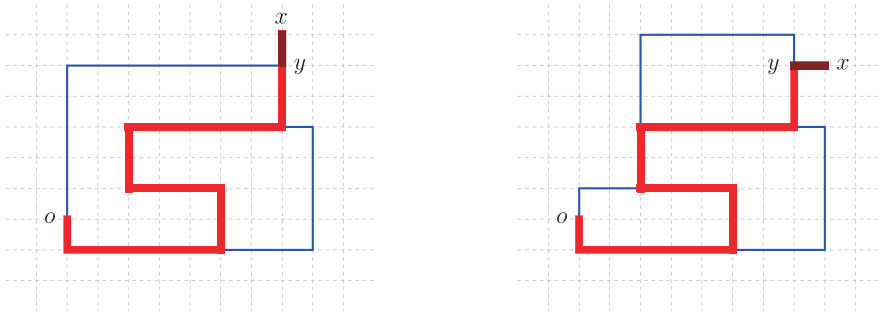
$$\begin{aligned}
(*) &= \sum_{A \subset T_1 \times \Lambda} \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}'=\mathbf{o} \Delta \underline{\mathbf{b}} \\ (\mathbf{n}'|_{\mathbb{B}_{A^c}} \equiv 0)}} \left( \prod_{e \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{B}_{A^c}} \frac{(\beta \mathcal{J}_e)^{n'_e}}{n'_e!} \right) \frac{\tilde{Z}_{A^c}^{\text{ST}}}{\tilde{Z}_{\text{ST}}} \mathbb{1}_{\{\mathbf{o} \leftrightarrow \mathbf{b} \text{ off } \mathbf{b}\}} \mathbb{1}_{\{A=\tilde{c}_{\mathbf{n}'}^{\mathbf{b}}(\mathbf{o})\}} \\
&\quad \times \sum_{\substack{\partial \mathbf{n}''=\bar{\mathbf{b}} \Delta \mathbf{x} \\ (\mathbf{n}''|_{\mathbb{B}_{A^c}} \equiv 0)}} \left( \prod_{e \in \mathbb{B}_{A^c}} \frac{(\beta \mathcal{J}_e)^{n''_e}}{n''_e!} \right) \frac{1}{\tilde{Z}_{A^c}^{\text{ST}}} \mathbb{1}_{\{\bar{\mathbf{b}} \leftrightarrow \mathbf{x} \text{ in } A^c\}} \\
&= \sum_{\partial \mathbf{n}=\mathbf{o} \Delta \underline{\mathbf{b}}} \frac{w(\mathbf{n})}{\tilde{Z}_{\text{ST}}} \mathbb{1}_{\{\mathbf{o} \leftrightarrow \mathbf{b} \text{ off } \mathbf{b}\}} G_{\tilde{c}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{b}}(\mathbf{o})^c}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{b}}). \tag{16}
\end{aligned}$$

最初の等号では  $\mathbf{n} = \mathbf{n}' + \mathbf{n}''$  と為ることに注意されたい。同様に、二番目の等号では  $\tilde{Z}_{A^c}^{\text{ST}}$  から出て来るカレント配置と  $\mathbf{n}'$  とを重ね合わせた。これを元の式に代入すると、

$$\begin{aligned}
G(\mathbf{x}) &= \pi^{(0)}(\mathbf{x}) + \underbrace{\sum_{\mathbf{b}} \tanh(\beta \mathcal{J}_{\mathbf{b}}) \sum_{\partial \mathbf{n}=\mathbf{o} \Delta \underline{\mathbf{b}}} \frac{w(\mathbf{n})}{\tilde{Z}_{\text{ST}}} \mathbb{1}_{\{\mathbf{o} \leftrightarrow \mathbf{b} \text{ off } \mathbf{b}\}} G(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{b}})}_{=:(\xi^{(0)*} G)(\mathbf{x})} \\
&\quad - \underbrace{\sum_{\mathbf{b}} \tanh(\beta \mathcal{J}_{\mathbf{b}}) \sum_{\partial \mathbf{n}=\mathbf{o} \Delta \underline{\mathbf{b}}} \frac{w(\mathbf{n})}{\tilde{Z}_{\text{ST}}} \mathbb{1}_{\{\mathbf{o} \leftrightarrow \mathbf{b} \text{ off } \mathbf{b}\}} (G(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{b}}) - G_{\tilde{c}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{b}}(\mathbf{o})^c}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{b}}))}_{=:R^{(1)}}
\end{aligned}$$

を得る。 □

**注意 9** 本稿で述べた量子 Ising 模型に対するレース展開は古典 Ising 模型に対するそれ [11] とはレース展開係数  $(\xi^{(N)})_{N=0}^{\infty}$  の定義が異なる。具体的には、古典の場合の展開をそのまま適用すると、(14) に於いて  $\Xi$  を  $\Pi * \tanh \mathcal{J}$  で置き換えた展開式を得る。証明の (16) に於いて “off  $\mathbf{b}$ ” を消してもそれらは等号で結ばれる（もし  $\mathbf{b}$  を使って  $\mathbf{o} \leftrightarrow \mathbf{b}$  が実現されたとすると  $\bar{\mathbf{b}} \in \tilde{c}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{b}}(\mathbf{o})$  が成立し、制限された二点相関関数は 0 に為る）ので、 $\pi^{(0)}$  に一致する。しかし、この表式では離散 Fourier 変換を施した後  $l \rightarrow \infty$  の極限を取るときに不都合が生じる。(15) で書いたとおり  $l$  が余分に生じるので、これを打ち消す為には交代級数  $\Xi$  から因子  $1/l$  を引き出す必要がある。実際、“off  $\mathbf{b}$ ” を残したことによって、 $(\xi^{(N)})_{N=0}^{\infty}$  を定義するカレント配置には空間方向のボンドが必ず含まれる (図 2)。従って、 $\tanh(\beta \mathcal{J}_{\mathbf{b}}/l) \leq \beta \mathcal{J}_{\mathbf{b}}/l$  から因子



(a) 端点で時間方向のボンドを使うカレント配置.

(b) 端点で空間方向のボンドを使うカレント配置.

図 2:  $\xi^{(0)}$  の定義に於けるカレント配置に関する総和への寄与. “off  $(y, x)$ ” の為に, (a) のときには  $o$  から  $x$  へ至る経路を構成するボンドの内, 少なくとも一歩, 空間方向のボンドを使わなければならない. (b) のときには二つの経路が両方とも最後に時間方向のボンドを使って  $y$  へ至る場合が  $l \gg 1$  で優位に為る (連続時間 Markov 連鎖で Poisson 時計が同時に鳴らないことと同じ).

$1/l$  を引き出せる. この点を, 量子 Ising 模型に対するレース展開を導出する上で, 古典 Ising 模型のそれ [11] から改良する必要があった.

## 謝辞

本研究を進めるにあたり, JSPS 科研費 (JP18K03406) と JST CREST (JP22180021) の助成を受けました. また, 著者の一人 (上島) が 2023 年 1 月に北海道大学を訪問した際, 所属先の NCTS から交通費の援助を受けました.

## 参考文献

- [1] J. E. Björnberg and G. R. Grimmett. “The Phase Transition of the Quantum Ising Model Is Sharp”. In: *J. Stat. Phys.* **136** (2009), pp. 231–273.
- [2] J. E. Björnberg. “Infrared Bound and Mean-Field Behaviour in the Quantum Ising Model”. In: *Commun. Math. Phys.* **323** (2013), pp. 329–366.
- [3] J. E. Björnberg. “Vanishing Critical Magnetization in the Quantum Ising Model”. In: *Commun. Math. Phys.* **337** (2015), pp. 879–907.
- [4] J. Fröhlich, B. Simon, and T. Spencer. “Infrared Bounds, Phase Transitions and Continuous Symmetry Breaking”. In: *Commun. Math. Phys.* **50** (1976), pp. 79–95.
- [5] S. Handa. “Stochastic-Geometrical Analysis to Investigate Critical Behavior for Statistical-Mechanical Models”. theses (doctoral). Hokkaido University, 2019.
- [6] T. Hara and G. Slade. “The Self-Avoiding-Walk and Percolation Critical Points in High Dimensions”. In: *Comb. Probab. Comput.* **4** (1995), pp. 197–215.

- [7] 原隆, 田崎晴明 『相転移と臨界現象の数理』, 共立出版, 2015.
- [8] E. Ising. “Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus”. In: *Z. Physik* **31** (1925), pp. 253–258.
- [9] 上島芳倫. 「確率幾何的表現を用いた量子 Ising 模型の平均場臨界現象の解析 (確率論シンポジウム)」. In: 『数理解析研究所講究録』 **2116** (2019), pp. 147–156.
- [10] W. Lenz. “Beiträge Zum Verständnis Der Magnetischen Eigenschaften in Festen Körpern”. In: *Physik. Z.* **21** (1920), pp. 613–615.
- [11] A. Sakai. “Lace Expansion for the Ising Model”. In: *Commun. Math. Phys.* **272** (2007), pp. 283–344.
- [12] A. Sakai. “Correct Bounds on the Ising Lace-Expansion Coefficients”. In: *Commun. Math. Phys.* **392** (2022), pp. 783–823.
- [13] M. Suzuki. “Relationship between  $d$ -Dimensional Quantal Spin Systems and  $(d + 1)$ -Dimensional Ising Systems: Equivalence, Critical Exponents and Systematic Approximants of the Partition Function and Spin Correlations”. In: *PTP* **56** (1976), pp. 1454–1469.