

# 確率波動方程式の解の空間平均に対する中心極限定理

京都大学大学院理学研究科 蛭名真久

Masahisa Ebina  
Graduate School of Science, Kyoto University

## Abstract

本稿では確率偏微分方程式に対する中心極限定理に関する最近の進展を振り返り, [10] に基づいて 3 次元確率波動方程式に対する中心極限定理について概説する.

## 1 Introduction

Malliavin 解析は確率解析における主要な道具の 1 つであり, Wiener 空間上の汎関数を解析する強力な手段を与えている. Nourdin と Peccati は Stein's method と呼ばれる確率分布と正規分布間の距離に対する定量評価を与える手法と Malliavin 解析を組み合わせることで, 正規近似における誤差評価を与える, Malliavin-Stein's method と呼ばれる新しい手法を編み出した ([15, 16]). 従来の Stein's method と比べると, この手法は一般性があり技術的な仮定を必要としない使い勝手のよいものであったため, これまで様々な問題に応用されてきた.

Huang, Nualart, Viitasaari らは時空ホワイトノイズ  $\dot{\xi}(t, x)$  を伴う 1 次元確率熱方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} v(t, x) = \frac{1}{2} \Delta v(t, x) + \sigma(v(t, x)) \dot{\xi}(t, x), \quad v(0, x) = 1, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R},$$

を考え, 解  $v$  の空間積分

$$G_R(t) := \int_{-R}^R (v(t, x) - \mathbb{E}[v(t, x)]) dx$$

に対して Malliavin-Stein's method を適用して以下の 2 つの中心極限定理を示すことに成功した ([11]).

中心極限定理  $t > 0$  に対して

$$d_{\text{TV}} \left( \frac{G_R(t)}{\sqrt{\text{Var}(G_R(t))}}, Z \right) \leq \frac{C(t)}{\sqrt{R}}.$$

ここで  $d_{\text{TV}}$  は確率分布に対する全変動距離であり,  $Z$  は標準正規分布を持つ確率変数,  $C(t)$  は  $t$  に依存する定数である. つまり  $\frac{G_R(t)}{\sqrt{\text{Var}(G_R(t))}}$  は  $R \rightarrow \infty$  で標準正規分布に弱収束し, その収束のレートは  $R^{-\frac{1}{2}}$  で与えられる.

汎関数中心極限定理  $T > 0$  のとき,  $C([0, T])$  上の弱収束

$$\left( \frac{G_R(t)}{\sqrt{R}} \right)_{t \in [0, T]} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \left( \int_0^t \sqrt{2\mathbb{E}[\sigma(v(s, 0))^2]} dB_s \right)_{t \in [0, T]}.$$

が成り立つ. ただし  $B_t$  は 1 次元 Brown 運動である.

彼らの手法は後述の Malliavin-Stein's bound に依存しており解の Malliavin 微分の評価等を必要とするため, 感覚的な理解が難しくまた計算が煩雑になりやすい. しかし確率偏微分方程式に対する中心極限定理を証明する際に示すべき評価等が明快であるため, その後彼らの手法を取り入れて様々な設定の下で同様の結果が示されてきた.

まず確率熱方程式の場合について関連する研究をいくつか簡単に紹介する。時間についてホワイトノイズだが空間相関が  $|x|^{-\beta}$  ( $0 < \beta < \min(2, d)$ ) で与えられるノイズを考えた場合に全ての空間次元  $d$  で、収束のレートが  $R^{-\frac{\beta}{2}}$  となる中心極限定理と対応する汎関数中心極限定理が成り立つことは [12] で示された。また  $\mathbb{R}$  の有界領域  $[0, L]$  上で Dirichlet, Neumann, 周期境界の 3 つの境界条件をそれぞれ課した場合の確率熱方程式は [23] で扱われている。全空間で考えている場合と異なり、解の定常性が失われる Dirichlet や Neumann 境界条件の下でも  $L \rightarrow \infty$  のときに解の空間平均が正規分布に収束することが示されている。また Laplace 作用素  $\Delta$  を  $-(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$  ( $\alpha \in (0, 2]$ ) に置き換えた fractional な確率熱方程式に対する中心極限定理については [1] で扱われている。さらに [19, 20, 21] では時空色付きノイズの設定を考えている。この場合はマルチンゲール測度に基づく通常確率積分 (cf. [26]) を用いることは出来ないが、Skorokhod 積分による解を考え、Wiener chaos 展開を用いることで類似の結果を示している。その他の関連する結果については例えば [6, 7, 14] がある。

確率波動方程式の場合は、空間が 1 次元で、時空ホワイトノイズおよび空間相関が  $|x|^{-\beta}$  ( $0 < \beta < 1$ ) となるノイズの下で中心極限定理を示した [9] が最初の結果である。その後 [4, 22] によって空間が 2 次元の場合に結果が拡張された。特に [22] ではノイズの空間相関が可積分関数で与えられる場合を扱っている。また [2, 3] では Skorokhod 積分と Wiener chaos 展開を用いて、空間が 2 次元以下で、時空色付きノイズや時間に依存しないノイズの設定下で結果を得ている。一方で空間が 3 次元以上の場合には、熱方程式の場合と異なり波動方程式の基本解が関数ではなく超関数となるため、Malliavin-Stein's method を用いて評価をする際に技術的な困難が発生する。[10] では空間相関が可積分関数または  $|x|^{-\beta}$  ( $0 < \beta < 2$ ) で与えられるノイズを扱い、解の逐次近似列に対する評価を経由することで 3 次元の場合の中心極限定理を示している。しかし収束のレートについては得られていない。

次節以降、[10] に基づいて 3 次元確率波動方程式に対する中心極限定理について概説する。

## 2 設定と主結果

$T > 0$  とし、次のような 3 次元確率波動方程式を考える。

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u(t, x) + \sigma(u(t, x))\dot{W}(t, x), & (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^3, \\ u(0, x) = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

ただし  $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  は Lipschitz 連続かつ  $C^1$  級とし、 $\dot{W}(t, x)$  は Gauss 型ノイズで共分散関数が (形式的に)

$$\mathbb{E}[\dot{W}(t, x)\dot{W}(s, y)] = \delta_0(t - s)\gamma(x - y). \quad (2.2)$$

で与えられるものとする。ここで  $\delta_0$  は原点に集中する Dirac 測度を表し、 $\gamma$  は  $\mathbb{R}^3$  上の非負関数でかつ測度  $\gamma(x)dx$  が非負定値な緩増加超関数となるものである。Bochner-Schwartz の定理 [24, Chapitre VII, Théorème XVIII] より、このような  $\gamma$  に対して、

$$\gamma = \mathcal{F}\mu \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$$

となる測度  $\mu \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$  が存在する。この  $\mu$  を  $\gamma$  のスペクトル測度と呼ぶ。

(2.1) の解として、時空の点をパラメータにもつ確率過程  $\{u(t, x; \omega) \mid (t, x; \omega) \in [0, T] \times \mathbb{R}^3 \times \Omega\}$  で  $(t, x; \omega)$  について可測かつノイズ  $W$  が生成する filtration について適合的で、さらに任意の  $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^3$  に対して

$$u(t, x) = 1 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} G(t - s, x - y)\sigma(u(s, y))W(ds, dy), \quad \text{a.s.} \quad (2.3)$$

をみたすものを考える。ここで  $G$  は 3 次元波動方程式の基本解である<sup>1</sup>。  $\gamma$  のスペクトル測度  $\mu$  に対する条件

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mu(d\xi)}{1 + |\xi|^2} < \infty \quad (2.4)$$

の下で、(2.1) の解が  $L^2(\Omega)$  で一意に存在することは Dalang [8] によって示された。

<sup>1</sup> $G(t, t > 0$  は関数ではなく超関数であり、(2.3) の右辺の確率積分は形式的な書き方である (cf. [8]).

(2.1) の解  $u(t, x)$  に対して, 中心化して半径  $R$  の閉球  $B_R(x) := \{y \in \mathbb{R}^3 : |x - y| \leq R\}$  上で積分したものを

$$F_R(t) = \int_{B_R} (u(t, x) - \mathbb{E}[u(t, x)]) dx$$

とし,  $\sigma_R(t) = \sqrt{\text{Var}(F_R(t))}$  とする. また  $\mathbb{R}$  値確率変数  $X, Y$  の分布間の Wasserstein 距離  $d_W$  は

$$d_W(X, Y) = \sup_{h \in \mathcal{H}} |\mathbb{E}[h(X)] - \mathbb{E}[h(Y)]|, \quad \mathcal{H} := \{h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \|h\|_{\text{Lip}} \leq 1\}$$

で与えられる. 便宜上,  $X$  の分布と正規分布  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$  との間の Wasserstein 距離を  $d_W(X, \mathcal{N}(m, \sigma^2))$  と表すことにする.  $d_W$  での収束は分布の弱収束より強いことが知られている.

$F_R(t)$  に対する中心極限定理を示すには, ノイズの空間相関  $\gamma$  にさらに条件を課す必要がある. 以後,  $\gamma$  は非負関数でかつ  $\gamma(x) dx$  が非負定値な緩増加超関数となり, スペクトル測度  $\mu$  が (2.4) を満たし, さらに以下の 2 条件 (A), (B) のうちのいずれかをみたすとする.

(A)  $\gamma \in L^1(\mathbb{R}^3)$  であり, 任意の  $x \in \mathbb{R}^3$  に対して  $\gamma(x) > 0$ .

(B)  $\gamma(x) = |x|^{-\beta}$ , ただし  $\beta \in (0, 2)$ .

**Remark 2.1.** (B) の場合について,  $|x|^{-\beta} dx$  は非負定値な緩増加超関数となる. またそのスペクトル測度は  $\mu(d\xi) = c_\beta |\xi|^{\beta-3} d\xi$  となり, (2.4) をみたす必要十分条件は  $0 < \beta < 2$  である.

まず  $t \in (0, T]$  を固定したときの中心極限定理について以下の結果が得られる.

**Theorem 2.2** ([10, Theorem 1.3]).  $t \in (0, T]$  とし,  $\sigma(1) \neq 0$  とする. このとき, 任意の  $R > 0$  に対して  $\sigma_R^2(t) > 0$  であり,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} d_W \left( \frac{F_R(t)}{\sigma_R(t)}, \mathcal{N}(0, 1) \right) = 0 \quad (2.5)$$

となる.

**Remark 2.3.** (2.5) の収束自体は, Wasserstein 距離  $d_W$  の代わりに Kolmogorov 距離  $d_{\text{Kol}}$  や Fortet-Mourier 距離  $d_{\text{FM}}$  を用いても成立する (cf. [16, Appendix C]). また (2.5) の収束の速さについて,  $R \rightarrow \infty$  で少なくとも

$$d_W \left( \frac{F_R(t)}{\sigma_R(t)}, \mathcal{N}(0, 1) \right) = \begin{cases} O(R^{-\frac{3}{2}}), & (\gamma \text{ が (A) をみたすとき}) \\ O(R^{-\frac{\beta}{2}}), & (\gamma \text{ が (B) をみたすとき}) \end{cases} \quad (2.6)$$

となることが期待される.

$F_R(t)$  を  $\sigma_R(t)$  で正規化することで, 次節の Malliavin-Stein's bound (Proposition 3.1) を利用できる.  $\sigma_R(t)$  のオーダーに関して, 次が成立する.

**Proposition 2.4** ([10, Propositions 5.1 and 5.5]).  $t \in (0, T]$  とし,  $\sigma(1) \neq 0$  とする.

(1)  $\gamma$  が (A) をみたすとき,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sigma_R(t)}{R^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{|B_1| \int_{\mathbb{R}^3} \text{Cov}(u(t, x), u(t, 0)) dx}.$$

ただし  $B_1 := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1\}$  であり,  $|B_1|$  は単位閉球の体積を表す.

(2)  $\gamma$  が (B) をみたすとき,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sigma_R(t)}{R^{3-\frac{\beta}{2}}} = \sqrt{\int_{B_1^2} |x-y|^{-\beta} dx dy \int_0^t (t-r)^2 \mathbb{E}[\sigma(u(r, 0))]^2 dr}.$$

Theorem 2.2 と Proposition 2.4 より以下の結果が直ちに従う.

**Corollary 2.5.**  $t \in (0, T]$  とし,  $\sigma(1) \neq 0$  とする. また  $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  とする.

(1)  $\gamma$  が  $\mathfrak{A}$  をみたし,  $\lim_{R \rightarrow \infty} R^{-\frac{3}{2}}\psi(R) = a > 0$  のとき,

$$\frac{F_R(t)}{\psi(R)} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \mathcal{N}\left(0, a^{-2} |B_1| \int_{\mathbb{R}^3} \text{Cov}(u(t, x), u(t, 0)) dx\right).$$

(2)  $\gamma$  が  $\mathfrak{B}$  をみたし,  $\lim_{R \rightarrow \infty} R^{\frac{\beta}{2}-3}\psi(R) = b > 0$  のとき,

$$\frac{F_R(t)}{\psi(R)} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \mathcal{N}\left(0, b^{-2} \int_{B_1^2} |x-y|^{-\beta} dx dy \int_0^t (t-r)^2 \mathbb{E}[\sigma(u(r, 0))]^2 dr\right).$$

$F_R(t)$  は  $t \in [0, T]$  をパラメータにもつ連続な確率過程とみることもできる.  $F_R(t)$  を  $C([0, T])$  値確率変数とみたとき, 次の汎関数中心極限定理が成り立つ.

**Theorem 2.6** ([10, Theorem 1.5]).

(1)  $\gamma$  が  $\mathfrak{A}$  をみたすとき,  $\{R^{-\frac{3}{2}}F_R(t) \mid t \in [0, T]\}$  の分布は  $R \rightarrow \infty$  で

$$\mathbb{E}[\mathcal{G}_1(t)] = 0, \quad \mathbb{E}[\mathcal{G}_1(t)\mathcal{G}_1(s)] = |B_1| \int_{\mathbb{R}^3} \text{Cov}(u(t, x), u(s, 0)) dx$$

をみたす Gauss 過程  $\{\mathcal{G}_1(t) \mid t \in [0, T]\}$  の分布に  $C([0, T])$  上で弱収束する.

(2)  $\gamma$  が  $\mathfrak{B}$  をみたすとき,  $\{R^{\frac{\beta}{2}-3}F_R(t) \mid t \in [0, T]\}$  の分布は  $R \rightarrow \infty$  で

$$\mathbb{E}[\mathcal{G}_2(t)] = 0, \quad \mathbb{E}[\mathcal{G}_2(t)\mathcal{G}_2(s)] = \int_{B_1^2} |x-y|^{-\beta} dx dy \int_0^{\min\{t,s\}} (t-r)(s-r) \mathbb{E}[\sigma(u(r, 0))]^2 dr$$

をみたす Gauss 過程  $\{\mathcal{G}_2(t) \mid t \in [0, T]\}$  の分布に  $C([0, T])$  上で弱収束する.

**Remark 2.7.** Theorem 2.6 (1) の場合は, 任意の  $x \in \mathbb{R}^3$  に対して  $\gamma(x) > 0$  という条件は不要である.

### 3 Malliavin-Stein's bound

(2.1) と (2.2) で考えたノイズ  $W$  に対して, 対応する実可分 Hilbert 空間  $\mathcal{H}_T$  と Gauss 過程  $\{W(\varphi) \mid \varphi \in \mathcal{H}_T\}$  で

$$\mathbb{E}[W(\varphi)] = 0, \quad \mathbb{E}[W(\varphi)W(\psi)] = \langle \varphi, \psi \rangle_{\mathcal{H}_T}, \quad \varphi, \psi \in \mathcal{H}_T$$

をみたすものが存在する. この Gauss 過程に基づいて Malliavin 解析を展開できる. 詳細については [17] を参照されたい.  $p \in [1, \infty)$  に対して, 微分作用素を  $D : L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega; \mathcal{H}_T)$  とし, その定義域を  $\mathbb{D}^{1,p}$  とする. また  $D : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega; \mathcal{H}_T)$  の共役作用素として定まる発散作用素を  $\delta : L^2(\Omega; \mathcal{H}_T) \rightarrow L^2(\Omega)$  とし, その定義域を  $\text{Dom}(\delta)$  と表す.

Malliavin 解析と Stein's method を組み合わせて得られる次の不等式は  $F_R(t)$  に対する中心極限定理を示す上で有用である.

**Proposition 3.1** ([16, Theorem 5.1.3], [18, Theorem 8.2.1]).  $\mathbb{R}$  値確率変数  $F$  がある  $v \in \text{Dom}(\delta)$  を用いて  $F = \delta(v)$  と表せるとする. この  $F$  が  $F \in \mathbb{D}^{1,2}$  と  $\mathbb{E}[F^2] = 1$  をみたすとき,

$$d_W(F, \mathcal{N}(0, 1)) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\text{Var}(\langle DF, v \rangle_{\mathcal{H}_T})}. \quad (3.1)$$

汎関数中心極限定理を示す際には対応する有限次元分布の収束を示す必要があり, そのために Proposition 3.1 の多次元版にあたる次の結果が有用である.

**Proposition 3.2** ([16, Theorem 6.1.2]).  $m \geq 2$  とし,  $F = (F_1, \dots, F_m)$  は  $\mathbb{R}^m$  値確率変数とする. 各  $i = 1, 2, \dots, m$  について, ある  $v_i \in \text{Dom}(\delta)$  が存在して  $F_i = \delta(v_i)$  となり, かつ  $F_i \in \mathbb{D}^{1,2}$  であるとする. また  $Z$  は平均 0, 共分散関数  $(C_{i,j})_{1 \leq i, j \leq m}$  の  $m$  次元正規分布をもつ確率変数とする. このとき, 任意の  $C^2$  級関数  $h: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  で 2 階導関数が有界となるものについて,

$$|\mathbb{E}[h(F)] - \mathbb{E}[h(Z)]| \leq \frac{m}{2} \|\nabla^2 h\|_\infty \sqrt{\sum_{i,j=1}^m \mathbb{E}[(C_{i,j} - \langle DF_i, v_j \rangle_{\mathcal{H}_T})^2]}, \quad (3.2)$$

となる<sup>2</sup>. ただし,

$$\|\nabla^2 h\|_\infty = \max_{1 \leq i, j \leq m} \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \left| \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right|.$$

Proposition 3.1 や 3.2 を用いれば, 正規分布へ収束することを示す問題は (3.1) や (3.2) の右辺を評価することに帰着されるため, Malliavin 解析を適用できる状況ではこれらの不等式は非常に強力である. なおこれらの Malliavin-Stein's method による結果は正規分布に限らず, 様々な分布や設定の下でも類似の結果が得られている<sup>3</sup>. また Proposition 3.2 の無限次元への拡張として, 可分な Banach 空間や Hilbert 空間上の正規分布への近似に対しても類似の結果が存在する ([5, 25]).

## 4 証明のアイデア

ここでは主に Theorem 2.2 の Wasserstein 距離の収束の証明のアイデアについて述べる. まず  $F_R(t)$  が発散作用素  $\delta$  を用いて表せることに注意する. 実際, 基本解  $G$  の近似関数列を考え, 確率的 Fubini の定理等を適用することにより,

$$\begin{aligned} F_R(t) &= \int_{B_R} (u(t, x) - \mathbb{E}[u(t, x)]) dx \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \underbrace{\left( \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{1}_{B_R}(y-x) G(t-s, dx) \right)}_{=: V_{t,R}(s,y)} \sigma(u(s, y)) W(ds, dy) \\ &= \delta(V_{t,R}) \end{aligned}$$

となる. ここで最後の等号は発散作用素  $\delta$  が Skorokhod 積分と一致することによる. また  $F_R(t) \in \mathbb{D}^{1,2}$  となることも標準的な議論よりわかる. 従って  $F_R(t)/\sigma_R(t)$  に対して Proposition 3.1 を適用することができ, (2.5) を示すには

$$\sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{\text{Var}(\langle DF_R(t), V_{t,R} \rangle_{\mathcal{H}_T})}}{\sigma_R^2(t)}} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

を示せば十分である.  $\sigma_R(t)$  のオーダーに関する Proposition 2.4 は確率積分の等長性を用いた計算より従う. あとは分散  $\text{Var}(\langle DF_R(t), V_{t,R} \rangle_{\mathcal{H}_T})$  に対する適当な評価を求めればよい. しかしここで問題が生じる. 基本解  $G$  が超関数であるため微分  $DF_R(t)$  は超関数値の確率変数となり, この分散に対する良い評価を得ることは容易ではない.

そこで次のような逐次近似列を考える.

$$\begin{aligned} u_0(t, x) &= 1, \\ u_{n+1}(t, x) &= 1 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} G_{n+1}(t-s, x-y) \sigma(u_n(s, y)) W(ds, dy). \end{aligned}$$

ただし  $G_n(t, x) = (G(t) * \rho_n)(x)$  は超関数  $G(t)$  と適当な軟化子  $\rho_n$  との合成積で与えられる関数列である. このとき  $G_n(t, \cdot) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$  であり,  $G_n$  は  $G$  に比べてはるかに扱いやすいものになっている. またこの  $u_n$  は (2.3) をみたく解  $u$  の良い近似列となっており,  $p \in [1, \infty)$  のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^3} \|u_n(t, x) - u(t, x)\|_{L^p(\Omega)} = 0 \quad (4.1)$$

<sup>2</sup>[16, Theorem 6.1.2] では不等号の後の定数は  $\frac{1}{2}$  となっているが誤植である.

<sup>3</sup>Malliavin-Stein's method や関連する手法を用いて得られた結果ならびに 4 次モーメント定理に関連する話題については, Nourdin が管理している web page にまとめられている: <https://sites.google.com/site/malliavinstein/home>

となる。

近似列  $u_n$  に対して

$$F_{n,R}(t) = \int_{B_R} (u_n(t, x) - \mathbb{E}[u_n(t, x)]) dx, \quad \sigma_{n,R}(t) = \sqrt{\text{Var}(F_{n,R}(t))}$$

とすると、前と同様に  $F_{n,R}(t) \in \mathbb{D}^{1,2}$  であり

$$F_{n,R}(t) = \delta(V_{n,t,R}), \quad \text{ただし } V_{n,t,R}(s, y) := \left( \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{1}_{B_R}(x) G_n(t-s, x-y) dx \right) \sigma(u_{n-1}(s, y)).$$

となる。そこで  $F_{n,R}(t)/\sigma_{n,R}(t)$  に対して再び Proposition 3.1 を適用すると

$$d_W \left( \frac{F_{n,R}(t)}{\sigma_{n,R}(t)}, \mathcal{N}(0, 1) \right) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{\text{Var}(\langle DF_{n,R}(t), V_{n,t,R} \rangle_{\mathcal{H}_T})}}{\sigma_{n,R}^2(t)}}$$

となる。先程とは異なり分散  $\text{Var}(\langle DF_{n,R}(t), V_{n,t,R} \rangle_{\mathcal{H}_T})$  を評価する際に超関数等が出てこないため、 $G_n(t, \cdot) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$  であることなどを用いると（計算が煩雑になるが）各  $n \geq 1$  に対して

$$\sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{\text{Var}(\langle DF_{n,R}(t), V_{n,t,R} \rangle_{\mathcal{H}_T})}}{\sigma_{n,R}^2(t)}} \lesssim C_{n,T} \times \begin{cases} R^{-\frac{3}{2}}, & (\gamma \text{ が (A) をみたすとき}) \\ R^{-\frac{\beta}{2}}, & (\gamma \text{ が (B) をみたすとき}) \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

となることを示せる。

一方で三角不等式より

$$d_W \left( \frac{F_R(t)}{\sigma_R(t)}, \mathcal{N}(0, 1) \right) \leq d_W \left( \frac{F_R(t)}{\sigma_R(t)}, \frac{F_{n,R}(t)}{\sigma_{n,R}(t)} \right) + d_W \left( \frac{F_{n,R}(t)}{\sigma_{n,R}(t)}, \mathcal{N}(0, 1) \right)$$

であるから、あとは十分大きいある  $K > 0$  に対して

$$\sup_{R \geq K} d_W \left( \frac{F_R(t)}{\sigma_R(t)}, \frac{F_{n,R}(t)}{\sigma_{n,R}(t)} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (4.3)$$

を示せば十分である。Wasserstein 距離  $d_W$  の定義より

$$\sup_{R \geq K} d_W \left( \frac{F_R(t)}{\sigma_R(t)}, \frac{F_{n,R}(t)}{\sigma_{n,R}(t)} \right) \leq \sup_{R \geq K} \left\| \frac{F_{n,R}(t)}{\sigma_{n,R}(t)} - \frac{F_R(t)}{\sigma_R(t)} \right\|_{L^2(\Omega)} \quad (4.4)$$

$$\leq \sup_{R \geq K} \frac{2}{\sigma_R(t)} \|F_R(t) - F_{n,R}(t)\|_{L^2(\Omega)} \quad (4.5)$$

と  $L^2(\Omega)$  ノルムを用いて上から評価できるから、(4.1) などを用いて (4.5) を評価することで (4.3) が得られて (2.5) を示せる。

**Remark 4.1.** 関連する研究などでは主に全変動距離  $d_{TV}$  の下で中心極限定理を示している。しかし近似列  $u_n$  を用いる上の議論では、一様収束 (4.3) を示すために上から  $L^2(\Omega)$  ノルムで評価できる Wasserstein 距離  $d_W$  を用いることが重要となる。全変動距離  $d_{TV}$  を用いると (4.4) の評価が成り立たず、 $u_n$  の  $u$  への一様収束 (4.1) を利用することができないため (4.3) を示すのが困難になる。

**Remark 4.2.** Stein's method との兼ね合いがあるため、 $L^p(\Omega)$  収束より弱い距離に対して一般に上と同様の議論から中心極限定理が示せるわけではない。

**Remark 4.3.** (4.3) の収束の速さについての情報が得られれば (2.5) の収束のレートを求めることができる。しかし仮に (4.3) の収束の速さがわかっても、近似列を用いる間接的な証明手法では (2.6) よりも悪いレートしか得られる見込みがない。収束レート込みの中心極限定理を示すには、より直接的な手法が望まれる。

最後に Theorem 2.6 の証明の概要について簡単に述べる。  $C([0, T])$  上での弱収束を示すためには、任意の有限次元分布が弱収束することと分布の緊密性を確かめればよい。有限次元分布の弱収束に関しては、Theorem 2.2 の証明と同様に逐次近似列  $u_n$  を用いて、Proposition 3.1 の代わりに Proposition 3.2 を適用すれば示せる。分布の緊密性については例えば [13, Theorem 23.7] の条件をみたすことを確認すればよい。

## 5 おわりに

今後の展望や関連する話題をいくつか挙げて終わりにする。まず3次元確率波動方程式の後に続く問題として4次元以上の場合だとどうなるか、ということが挙げられる。確率熱方程式に対する中心極限定理が任意の空間次元で成り立つことを念頭に置けば、高次元の確率波動方程式についても同様の中心極限定理が成り立つことは十分に期待できる。逐次近似列を用いる手法では収束の速さについての情報を得るのは容易ではないが、対応する基本解が超関数の何階かの微分で与えられる4次元以上の確率波動方程式に対してもこの手法は有効なものとなりうる。

また先行研究等では様々な設定下で収束のレートが求められているが、レートの最適性については全くわかっていない。さらにレートが何に依存して決まるのかも明らかではない。ノイズの空間相関による影響を受けているが、それだけではなく基本解のみたす性質による影響も考慮する必要がある。もちろん Malliavin-Stein's method によって得られる収束レートにそれらの影響が十分に反映されていない可能性もあるため、今のところよくわかっていない。

中心極限定理の後に続く話題として大偏差原理はどうか、ということも考えられる。確率偏微分方程式に対する Freidlin-Wentzell 型の大偏差原理については既に様々な結果が知られているが、より素朴に解の空間平均に対する Cramér 型の大偏差原理についての結果は知られていないようである。

最後に、確率偏微分方程式に対する中心極限定理がどの程度普遍的であるかは興味深い問題である。すなわちどの程度広いクラスの方程式に対して中心極限定理が成り立ち、どのような条件下では成り立たなくなるかという問題である。現状ではそれぞれの方程式に特化した評価手法を用いて個別に示されている。そのためより統一的な手法を用いて様々な場合を同時に扱うことができれば、中心極限定理が成り立つ背後に共通する数学的構造や収束のレートが何によって決まるか等を明らかにすることができる可能性がある。

## Acknowledgements

This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP22J21604, and by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

## References

- [1] Obayda Assaad, David Nualart, Ciprian A. Tudor, and Lauri Viitasaari. Quantitative normal approximations for the stochastic fractional heat equation. *Stoch. Partial Differ. Equ. Anal. Comput.*, 10(1):223–254, 2022.
- [2] Raluca M. Balan, David Nualart, Lluís Quer-Sardanyons, and Guangqu Zheng. The hyperbolic Anderson model: moment estimates of the Malliavin derivatives and applications. *Stoch. Partial Differ. Equ. Anal. Comput.*, 10(3):757–827, 2022.
- [3] Raluca M. Balan and Wangjun Yuan. Spatial integral of the solution to hyperbolic Anderson model with time-independent noise. *Stochastic Process. Appl.*, 152:177–207, 2022.
- [4] Raul Bolaños Guerrero, David Nualart, and Guangqu Zheng. Averaging 2d stochastic wave equation. *Electron. J. Probab.*, 26:Paper No. 102, 32, 2021.
- [5] Solesne Bourguin and Simon Campese. Approximation of Hilbert-valued Gaussians on Dirichlet structures. *Electron. J. Probab.*, 25:Paper No. 150, 30, 2020.
- [6] Le Chen, Davar Khoshnevisan, David Nualart, and Fei Pu. Central limit theorems for spatial averages of the stochastic heat equation via malliavin–stein's method. *Stochastics and Partial Differential Equations: Analysis and Computations*, 2021.
- [7] Le Chen, Davar Khoshnevisan, David Nualart, and Fei Pu. Spatial ergodicity and central limit theorems for parabolic Anderson model with delta initial condition. *J. Funct. Anal.*, 282(2):Paper No. 109290, 35, 2022.
- [8] Robert C. Dalang. Extending the Martingale Measure Stochastic Integral With Applications to Spatially Homogeneous S.P.D.E.'s. *Electronic Journal of Probability*, 4:1–29, 1999.

- [9] Francisco Delgado-Vences, David Nualart, and Guangqu Zheng. A central limit theorem for the stochastic wave equation with fractional noise. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 56(4):3020–3042, 2020.
- [10] Masahisa Ebina. Central limit theorems for nonlinear stochastic wave equations in dimension three, 2022. Preprint, arXiv:2206.12957.
- [11] Jingyu Huang, David Nualart, and Lauri Viitasaari. A central limit theorem for the stochastic heat equation. *Stochastic Process. Appl.*, 130(12):7170–7184, 2020.
- [12] Jingyu Huang, David Nualart, Lauri Viitasaari, and Guangqu Zheng. Gaussian fluctuations for the stochastic heat equation with colored noise. *Stoch. Partial Differ. Equ. Anal. Comput.*, 8(2):402–421, 2020.
- [13] Olav Kallenberg. *Foundations of modern probability*, volume 99 of *Probability Theory and Stochastic Modelling*. Springer, Cham, 2021. Third edition.
- [14] Davar Khoshnevisan, David Nualart, and Fei Pu. Spatial stationarity, ergodicity, and CLT for parabolic Anderson model with delta initial condition in dimension  $d \geq 1$ . *SIAM J. Math. Anal.*, 53(2):2084–2133, 2021.
- [15] Ivan Nourdin and Giovanni Peccati. Stein’s method on Wiener chaos. *Probab. Theory Related Fields*, 145(1-2):75–118, 2009.
- [16] Ivan Nourdin and Giovanni Peccati. *Normal Approximations with Malliavin Calculus: From Stein’s Method to Universality*. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, 2012.
- [17] David Nualart. *The Malliavin Calculus and Related Topics*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2nd edition, 2006.
- [18] David Nualart and Eulalia Nualart. *Introduction to Malliavin Calculus*. Institute of Mathematical Statistics Textbooks. Cambridge University Press, 2018.
- [19] David Nualart, Xiaoming Song, and Guangqu Zheng. Spatial averages for the parabolic Anderson model driven by rough noise. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 18(1):907–943, 2021.
- [20] David Nualart, Panqiu Xia, and Guangqu Zheng. Quantitative central limit theorems for the parabolic Anderson model driven by colored noises. *Electron. J. Probab.*, 27:Paper No. 120, 43, 2022.
- [21] David Nualart and Guangqu Zheng. Averaging Gaussian functionals. *Electron. J. Probab.*, 25:Paper No. 48, 54, 2020.
- [22] David Nualart and Guangqu Zheng. Central limit theorems for stochastic wave equations in dimensions one and two. *Stoch. Partial Differ. Equ. Anal. Comput.*, 10(2):392–418, 2022.
- [23] Fei Pu. Gaussian fluctuation for spatial average of parabolic Anderson model with Neumann/Dirichlet/periodic boundary conditions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 375(4):2481–2509, 2022.
- [24] Laurent Schwartz. *Théorie des distributions*. Publications de l’Institut de Mathématique de l’Université de Strasbourg, IX-X. Hermann, Paris, 1966. Nouvelle édition, entièrement corrigée, refondue et augmentée.
- [25] Hsin-Hung Shih. On Stein’s method for infinite-dimensional Gaussian approximation in abstract Wiener spaces. *J. Funct. Anal.*, 261(5):1236–1283, 2011.
- [26] John B. Walsh. An introduction to stochastic partial differential equations. In P. L. Hennequin, editor, *École d’Été de Probabilités de Saint Flour XIV - 1984*, pages 265–439, Berlin, Heidelberg, 1986. Springer Berlin Heidelberg.