下方スキップフリーマルコフ連鎖の準定常分布について

京都大学大学院理学研究科 山戸康祐
Kosuke Yamato
Department of Mathematics, Graduate School of Science,
Kyoto University

1 導入

本稿では, [15] の内容を紹介する. 生存時間 ζ をもつ状態空間 S 上のマルコフ過程 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ に対し, S 上の確率分布 ν は以下を満たすとき準定常分布と呼ばれる:

$$\mathbb{P}_\nu[X_t \in dx \mid \zeta > t] = \nu(dx) \quad (t > 0). \tag{1.1}$$

ここで $\mathbb{P}_\nu$ は初期分布 ν をもつ X の分布である. [15] では, 状態空間 $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$ 上の連続時間マルコフ連鎖 X で, 下方にスキップフリーであるもの, すなわち,

$$\mathbb{P}_z[\tau_y < \tau_x] = 1 \quad (0 \leq x < y < z), \tag{1.2}$$

を満たすものに対し, 点 0 においてのみ死滅する, つまり, $\zeta = \tau_0$ である場合に, その準定常分布の存在条件, および, 準定常分布全体の集合を考察した. ここで, τ_A は集合 $A \subset \mathbb{N}$ への到達時刻, つまり, $\tau_A := \inf\{t > 0 \mid X_t \in A\}$ $(A \subset \mathbb{N})$ であり, 特に $\tau_x := \tau_{\{x\}}$ $(x \in \mathbb{N})$ と書くことにする.

2 先行研究

マルコフ連鎖の準定常分布について知られている結果を簡単に振り返る. 以下では簡単のため, $\zeta = \tau_0$ で, X は $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ 上で既約かつ, 点 0 に正の確率で到達する, より正確には, $\mathbb{P}_x[\tau_y < \infty] > 0$ $(x > 0, y \geq 0)$ が成り立つ場合を考える.

まず, 一般的なマルコフ連鎖に対する準定常分布の存在条件について代表的な結果をみる. Kingman [7] は, 保存的なマルコフ連鎖における正再帰性の概念を死滅をもつ場合へと拡張した R-正再帰性の下で, decay parameter に対応する準定常分布が一意的に存在することを示している. より詳しく言うと, 次の極限から定まる decay parameter

$$\lambda_0 := -\lim_{t\to\infty} \frac{\log \mathbb{P}_x[\tau_0 > t]}{t} \tag{2.1}$$

に対し, $\mathbb{P}_\nu[\tau_0 > t] = \mathrm{e}^{-\lambda_0 t}$ $(t \geq 0)$ を満たす準定常分布 ν が存在し, 一意的であることを示した. ここでマルコフ性からの簡単な帰結として, 準定常分布の下では生存時間が指数分布に従うことを注意しておく. つまり, λ_0 の正値性は準定常分布の存在の必要条件である. Ferrari, Kesten, Martinez and Picco [4] は, 次の性質

$$\lim_{x\to\infty} \mathbb{P}_x[\tau_0 \leq t] = 0 \quad (t > 0) \tag{2.2}$$

を満たすマルコフ連鎖に対し, decay parameter が正であれば, 少なくとも 1 つの準定常分布が存在することを示した．性質 (2.2) は直感的に言えば, 「状態空間が大きい」という性質であり, ある意味では非再帰性に近い．例えば, 出生死滅過程の場合, (2.2) が成り立つのは境界 ∞ が Feller の意味で自然な場合である．一方で, decay parameter の正値性は (例えば, 0 からの推移を新たに加えて保存的なマルコフ連鎖にすることで), 強い再帰性を表すといえる．この意味で, [4] は再帰性と非再帰性の微妙なバランスが成り立つ状況を扱っている．一般的にいって, 「状態空間が小さい」ほど R-正再帰性は成り立ちやすくなるため, やや難しい場合を考察しているといえる．より一般の空間上のマルコフ過程に対する研究として Takeda [12] があり, 緊密性と呼ばれる条件を満たす対称マルコフ過程に対し, 準定常分布が一意的に存在することを示している．緊密性の正確な定義はここでは省略するが, 大まかにいうと, 「ほとんどの生存している粒子は大きなコンパクト集合上に収まる」という性質であり, 概ね「状態空間が小さい」という性質である．以上が, 一般的な存在条件として概ね知られている結果である．これらの結果は有用ではあるが, 具体的に与えられた確率過程に適用するには仮定が強過ぎたり, 仮定を満たすことを確かめるのが困難であったりすることがしばしばである．

次に, 具体的なクラスのマルコフ連鎖について知られている結果をみる．[15] では, スキップフリー性を満たすマルコフ連鎖を考察したが, このクラスのマルコフ連鎖は Kijima [6] による先行研究がある．[6] はマルコフ連鎖が uniformizable, すなわち, $\sup_{x>0} Q(x) < \infty$ であることを仮定している, 詳しい議論は省略するが, この仮定は Perron-Frobenius の定理を応用するためのものであり, やや技術的である．加えて, 準定常分布の存在については十分条件のみが得られており, また, 準定常分布全体の集合も確定できていない．つまり, 下方スキップフリーマルコフ連鎖の準定常分布の完全な特徴づけはこれまで得られていなかった．ただし, いくつかの部分的なクラスについては完全に調べられている．例えば, 出生死滅過程に対しては, van Doorn [13] が, 出生死滅過程の内在的な量である, スピード測度, スケール関数を用いた必要十分条件を与え, さらに, 準定常分布全体の集合を確定している．分枝過程に対しては, Yaglom [14] による離散時間の場合を扱った古典的な研究があるが, 意外なことに連続時間の場合の結果が得られたのは最近で, Maillard [9] によって, 完全な特徴づけが与えられた．ただしこれは, この場合が困難であったというよりも, 恐らく, これまで誰も完全な形で書いていなかったというのが実際のところだと考えられる．実際, [9] の中では分枝過程の準定常分布の先行研究を詳しく振り返り, 完全な形で解答を与えた最初の論文であることを細かく説明している．下方スキップフリーランダムウォークの場合は, Pakes [11] による, 似通ったトピックを扱った論文があるものの, やや問題意識が異なり, 今回考えている意味での準定常分布についてはほとんど関係がない．筆者の知る限り, ランダムウォークの場合を扱った研究は他になく, 意外なことであるが, これまで知られていなかったのかもしれない．ただし, ランダムウォークに限った場合は恐らくそれほど難しくはないため, これも分枝過程の場合と同様, これまで誰も調べていなかっただけだと思われる．

3　手法

[15] における主な道具は, (一般化) スケール関数である．スケール関数とは主として一次元拡散過程, 片側スペクトルレヴィ過程に対して, 広範に用いられてきた道具であり, 区間からの脱出時刻や区間上のポテンシャル密度関数を簡明な形で表すことができる (例えば,

Itô [5, Chapter 5], Kyprianou [8, Chapter 8], Bertoin [2, Chapter 7] を参照). これらのスケール関数はその確率過程固有の性質を用いて構成されてきたが, Noba [10] は負 (または正) の跳びがない区間上のマルコフ過程に対し, 周遊測度を用いることで, 一般的にスケール関数に相当する関数を構成できることを示した. もう少し具体的にいうと, 脱出時刻やポテンシャル密度を簡明に表す公式を与える関数の族で, 一次元拡散過程や片側スペクトルレヴィ過程のものを一般化するものを構成した. [15] では, 下方スキップフリーマルコフ連鎖に対し, 一般化スケール関数を同様に周遊測度を用いて定義し, 同様の公式が成り立つことを示した (ただし, これらの公式が同様に成り立つことは [10] からほぼ明らかである). 下方スキップフリーマルコフ連鎖の場合の具体的な公式は次節の命題 4.2, 定理 4.3 で与えた.

スケール関数を準定常分布の研究に応用するアイデアは, Bertoin [3] によるもので, [3] では, 正スペクトルレヴィ過程に対し, スケール関数とその解析接続を用いることにより, 有限区間の脱出時刻で死滅が起きる場合の準定常分布の存在を示し, また, 準定常分布の密度関数が解析接続されたスケール関数により与えられることを示している. [15] では, 基本的には [3] の議論を一般化スケール関数へと拡張することにより準定常分布の存在を示している. ただし, そのままパラレルに議論を移植できるわけではなく, 大きく以下の 2 点で新たな工夫が必要となる. 1 点目はスケール関数が解析接続できることが明らかでない点である. 定義 4.1 で与えるように, 一般化スケール関数は周遊測度のラプラス変換を用いて定義されるため, それが整関数へと拡張できるかは明らかではない. この拡張が可能であることを示すため, スケール関数がある種の離散的な Volterra 型積分方程式の解であることを示すことによって, 一般化スケール関数が級数型の表示を持つことを示した (定理 5.1). 2 点目は空間的一様性が必ずしも成り立たないためにマルコフ連鎖の遠方での挙動を考慮する必要がある点である. 例えば, 2 節で触れた van Doorn [13] の結果では, 境界 ∞ の Feller の意味での分類が流入か非流入かに応じて, 準定常分布が一つか非可算個かに分かれることが示されている. このように遠方での挙動は準定常分布の存在に大きく影響するが, 実は, この境界の分類による dichotomy は, 下方スキップフリーマルコフ連鎖に対しても自然に拡張できることを示すのが主結果である (定理 5.6).

4　準備

いくつかの定義や予備的な結果を述べる. 確率過程 $(\{X_t\}_{t\geq 0}, \{\mathbb{P}_x\}_{x\in\mathbb{N}})$ は $\mathbb{N}$ 上の連続時間マルコフ連鎖で, 下方スキップフリー性 (1.2) を満たすとする. X の Q-行列を $Q := (Q(x,y))_{x,y\geq 0}$ とし, Q は保存的であるとする: $\sum_{y\in\mathbb{N}} Q(x,y) = 0$ $(x \in \mathbb{N})$. 慣例に従って, $Q(x) := -Q(x,x) = \sum_{y\neq x} Q(x,y)$ $(x \in \mathbb{N})$ と書く. また, X は爆発時刻 $\tau_\infty := \lim_{z\to\infty} \tau_z^+$ で死滅するとする. ただし, $\tau_z^+ := \tau_{[z,\infty)\cap\mathbb{N}}$ である. さらに, 以下を仮定する:

$$\begin{cases} \text{(i) } X \text{ は } \mathbb{N}\setminus\{0\} \text{ 上で既約; } \mathbb{P}_x[\tau_y < \infty] > 0 \ (x \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ y \in \mathbb{N}). \\ \text{(ii) } \mathbb{N}\setminus\{0\} \text{ の各点は regular; } \mathbb{P}_x[\tau_{\mathbb{N}\setminus\{x\}} > 0] = 1 \ (x \in \mathbb{N}\setminus\{0\}). \\ \text{(iii) 点 } 0 \text{ は trap; } \mathbb{P}_0[X_t = 0] = 1. \end{cases} \tag{4.1}$$

点 $x \in \mathbb{N}$ に対し, その局所時間を次で定める:

$$L_t^x := \int_0^t 1\{X_s = x\} ds.$$

この局所時間の定義から明らかに以下の公式が従う: 非負関数 $f:\mathbb{N}\to[0,\infty]$ に対し,

$$\int_0^t f(X_s)ds=\sum_{x\geq 0} f(x)L_t^x \quad \text{(滞在時間公式)}$$

および,

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-qt}\mathbb{E}_x[f(X_t)]dt=\sum_{y\geq 0} f(y)\mathbb{E}_x\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-qt}dL_t^y\right] \quad \text{(ポテンシャル密度公式)}.$$

Noba [10] に従って, X のスケール関数を導入する. まず, $x>0$ に対し, 点 x からの周遊測度を次で定める:

$$n_x[X\in de]:=Q(x)\mathbb{P}_x[(X\circ\theta_{\tau_{\mathbb{N}\setminus\{x\}}})_{\cdot\wedge\tau_x}\in de] \quad (e\in\mathbb{D}),$$

ここで, $\mathbb{D}$ は $\mathbb{N}$ 上の càdlàg paths 全体の集合であり, θ はシフト作用素を表す. この周遊測度は局所時間 L^x に対応したものになっている, つまり, 次が成り立つ:

$$-\log\mathbb{E}_x[\mathrm{e}^{-q\eta^x(1)}]=q+n_x[1-\mathrm{e}^{-q\tau_x}] \quad (q\geq 0).$$

ここで η^x は x における逆局所時間, すなわち, $t\mapsto L_t^x$ の右連続逆関数である. 次が一般化スケール関数の定義である. 以降では単にスケール関数と呼ぶ.

定義 4.1. 実数 $q\geq 0$ に対し, q-スケール関数 $W^{(q)}:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to[0,\infty)$ を以下で定める:

$$W^{(q)}(x,z):=\frac{1\{x<z\}}{n_z[\mathrm{e}^{-q\tau_x},\tau_x<\infty]}. \tag{4.2}$$

特に,$W:=W^{(0)}$ と書くことにする.

Noba [10] と同様の方法で, X の区間からの脱出時刻と区間上のポテンシャル密度関数はスケール関数を用いて表せることが示せる:

命題 4.2. $q\geq 0$ と $0\leq x<y<z$ に対し, 以下が成立:

$$\mathbb{E}_y[\mathrm{e}^{-q\tau_x},\tau_x<\tau_z^+]=\frac{n_z[\mathrm{e}^{-q\tau_x},\tau_x<\infty]}{n_z[\mathrm{e}^{-q\tau_y},\tau_y<\infty]}=\frac{W^{(q)}(y,z)}{W^{(q)}(x,z)}.$$

定理 4.3. $q\geq 0$ と $0\leq x<u,y<z$ に対し, 以下が成立:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_y\left[\int_0^{\tau_x\wedge\tau_z^+}\mathrm{e}^{-qt}dL_t^u\right]=&\frac{W^{(q)}(x,u)W^{(q)}(y,z)}{W^{(q)}(x,z)}-W^{(q)}(y,u)\\ =&W^{(q)}(x,u)\mathbb{E}_y[\mathrm{e}^{-q\tau_x},\tau_x<\tau_z^+]-W^{(q)}(y,u).\end{aligned} \tag{4.3}$$

5 主結果

第一の主結果は, 固定した $0 \le x, y$ に対し, 関数 $[0,\infty) \ni q \mapsto W^{(q)}(x,y)$ が整関数に拡張できることである. $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$-行列 $M = (M(x,y))_{x,y\in\mathbb{N}}$ が $M(x,y)=0$ $(x \ge y)$ を満たすとき, 上三角ということにする.

定理 5.1. $q \ge 0$ を固定するごとに, $W^{(q)} = (W^{(q)}(x,y))_{x,y\ge 0}$ を $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$-行列とみなす. 行列 $F = W^{(q)}$ は以下の方程式を満たす一意的な上三角行列である:

$$QF(x,y) = I(x,y) + qF(x,y) \quad (x \ge 1, y \ge 0), \tag{5.1}$$

ここで, $I := (\delta_{xy})_{x,y\ge 0}$ は単位行列である. $x, y \in \mathbb{N}$ $(x < y)$ を固定するごとに, $W^{(q)}(x,y)$ は q に関する $(y-x-1)$ 次の多項式である:

$$W^{(q)}(x,y) = \sum_{n\ge 0} q^n W^{n+1}(x,y) = \sum_{0\le n\le y-x-1} q^n W^{n+1}(x,y) \quad (x, y \ge 0). \tag{5.2}$$

ここで, W^n は行列 $W = W^{(0)}$ の n 個の積である. よって, 関数 $q \mapsto W^{(q)}(x,y)$ は整関数に解析的に拡張される (以下では常に拡張したものを考える). さらに, $q \in \mathbb{C}$ に対し, 行列 $I - qW$ は可逆であり, 以下が成り立つ:

$$W^{(q)} = (I - qW)^{-1}W = W(I-qW)^{-1}. \tag{5.3}$$

等式 (5.3) からスケール関数は以下のレゾルベント方程式を満たすことがわかる.

系 5.2. $q, r \in \mathbb{C}$ に対し, 以下が成立:

$$W^{(q)} - W^{(r)} = (q-r)W^{(q)}W^{(r)} = (q-r)W^{(r)}W^{(q)}. \tag{5.4}$$

注意 5.3. レゾルベント方程式 (5.4) において, $r=0$ の場合を考えることで, 行列 $F = W^{(q)}$ は以下の離散的な Volterra 型積分方程式の解であることがわかる:

$$F = W + qFW = W + qWF. \tag{5.5}$$

一次元拡散過程や片側スペクトルレヴィ過程のスケール関数はいずれも同様の (連続的な) Volterra 型積分方程式の解として特徴づけられる. よって, 定理 5.1 および系 5.2 は, スケール関数 $W^{(q)}$ は従来のスケール関数の自然な一般化になっていることを示している.

次に準定常分布の特徴づけを与える. まず, スケール関数を用いて, 境界 ∞ の分類を導入する.

定義 5.4. 次が成り立つとき, 境界 ∞ は流入であるという:

$$\sum_{y\ge 0} W(0,y) < \infty. \tag{5.6}$$

次が成り立つとき, 境界 ∞ は非流入であるという:

$$\sum_{y\ge 0} W(0,y) = \infty. \tag{5.7}$$

この境界の分類は, 出生死滅過程における境界 ∞ の Feller の意味での分類の拡張となっている.

注意 5.5. Q-行列 $Q=(Q(x,y))_{x,y\in\mathbb{N}}$ が以下で与えられる出生死滅過程を考える:

$$Q(x,y)=\begin{cases}\mu(x) & (y=x-1),\\ -(\mu(x)+\lambda(x)) & (y=x),\\ \lambda(x) & (y=x+1),\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

ここで, $\lambda(x),\mu(x)>0$ $(x>0)$ で, $\mu(0)=\lambda(0)=0$ とする. スピード測度 $\pi=(\pi(x))_{x\geq 1}$ を以下で定める:

$$\pi(1):=1,\quad \pi(x):=\frac{\lambda(1)\lambda(2)\cdots\lambda(x-1)}{\mu(2)\mu(3)\cdots\mu(x)}\quad (x\geq 2)$$

また, (通常の) スケール関数 $s:\mathbb{N}\to[0,\infty)$ を以下で定める:

$$s(0)=0,\quad s(x)=\frac{1}{\mu(1)}+\sum_{1\leq y\leq x-1}\frac{1}{\pi(y)\lambda(y)}\quad (x\geq 1).$$

詳しい説明は省略するが, 古典的に知られた事実として, スピード測度は行列 Q を対称化する測度であり, スケール関数 s は $s(X_t)$ がマルチンゲールとなるような関数である. このとき, 0-スケール関数 $W=W^{(0)}$ は以下を満たすことが割合容易にわかる:

$$W(0,x)=s(x)\pi(x)\quad (x\geq 0).$$

よって, X が流入となることは以下の条件と同値になる:

$$\sum_{x>0}s(x)\pi(x)<\infty. \tag{5.8}$$

条件 (5.8) は Feller の意味での境界分類 (例えば, Anderson [1, p.262] を参照) において流入であることと同値であり, 定義 5.4 で導入された分類は出生死滅過程の場合の拡張になっていることがわかる.

次に準定常分布の存在をみる. 以下では, 次の条件を仮定する:

$$\mathbb{P}_x[\tau_0<\infty]=1\quad (x\geq 0). \tag{5.9}$$

次が主結果であり, 準定常分布の存在は境界の分類によって二分されることがわかる.

定理 5.6. $\mathcal{Q}$ を準定常分布全体の集合とする. このとき, 以下が成立:

(i) 境界 ∞ が流入であるとする. このとき $\lambda_0>0$ であり, $\mathcal{Q}=\{\nu_{\lambda_0}\}$ である.

(ii) 境界 ∞ が非流入で $\lambda_0>0$ であるとする. このとき, $\mathcal{Q}=\{\nu_\lambda\}_{\lambda\in(0,\lambda_0]}$ である.

ここで, $\lambda \in (0, \lambda_0]$ に対し, 確率分布 ν_λ は以下で定義される:

$$\nu_\lambda(x) := \lambda W^{(-\lambda)}(0, x) \quad (x \geq 0).$$

注意 5.7. 非流入の場合には必ずしも $\lambda_0 > 0$ とはならない. 例えば, $\mathbb{N}$ 上の単純対称ランダムウォークで点 0 で死滅するものを考えると, $\lambda_0 = 0$ である.

境界 ∞ が流入である場合には, 一意的な準定常分布 ν_{λ_0} はヤグロム極限であることが示せる.

定理 5.8. 境界 ∞ が流入であるとする. このとき, 準定常分布 ν_{λ_0} はヤグロム極限である:

$$\lim_{t \to \infty} \mathbb{P}_x[X_t = y \mid \tau_0 > t] = \nu_{\lambda_0}(y) \quad (x, y > 0).$$

References

[1] W. J. Anderson. *Continuous-time Markov chains.* Springer Series in Statistics: Probability and its Applications. Springer-Verlag, New York, 1991. An applications-oriented approach.

[2] J. Bertoin. *Lévy processes*, volume 121 of *Cambridge Tracts in Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[3] J. Bertoin. Exponential decay and ergodicity of completely asymmetric Lévy processes in a finite interval. *Ann. Appl. Probab.*, 7(1):156–169, 1997.

[4] P. A. Ferrari, H. Kesten, S. Martinez, and P. Picco. Existence of quasi-stationary distributions. A renewal dynamical approach. *Ann. Probab.*, 23(2):501–521, 1995.

[5] K. Itô. *Essentials of stochastic processes*, volume 231 of *Translations of Mathematical Monographs.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2006. Translated from the 1957 Japanese original by Yuji Ito.

[6] M. Kijima. Quasi-limiting distributions of Markov chains that are skip-free to the left in continuous time. *J. Appl. Probab.*, 30(3):509–517, 1993.

[7] J. F. C. Kingman. The exponential decay of Markov transition probabilities. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 13:337–358, 1963.

[8] A. E. Kyprianou. *Fluctuations of Lévy processes with applications.* Universitext. Springer, Heidelberg, second edition, 2014. Introductory lectures.

[9] P. Maillard. The λ-invariant measures of subcritical Bienaymé-Galton-Watson processes. *Bernoulli*, 24(1):297–315, 2018.

[10] K. Noba. Generalized scale functions of standard processes with no positive jumps. *Electron. Commun. Probab.*, 25:Paper No. 8, 12, 2020.

[11] A. G. Pakes. Conditional limit theorems for a left-continuous random walk. *J. Appl. Probability*, 10:39–53, 1973.

[12] M. Takeda. Existence and uniqueness of quasi-stationary distributions for symmetric Markov processes with tightness property. *J. Theoret. Probab.*, 32(4):2006–2019, 2019.

[13] E. A. van Doorn. Quasi-stationary distributions and convergence to quasi-stationarity of birth-death processes. *Adv. in Appl. Probab.*, 23(4):683–700, 1991.

[14] A. M. Yaglom. Certain limit theorems of the theory of branching random processes. *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, 56:795–798, 1947.

[15] K. Yamato. Existence of quasi-stationary distributions for downward skip-free markov chains. *arXiv:2211.01643*. preprint.