ゼロ回避の条件付け Lévy 過程の長時間挙動と処罰問題への応用

洛南高等学校 武田 翔成
Shosei Takeda
Rakunan High School

1 ゼロ回避の条件付けブラウン運動

測度 μ に関する積分を，$\mu[f] = \int f\,\mathrm{d}\mu$ と表すことにする．

$(X = (X_t, t \geq 0), \mathbb{P}^B_x)$ を，$\mathbb{P}^B_x(X_0 = x) = 1$ をみたす 1 次元標準ブラウン運動とし，$(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ をその右連続フィルトレーションとする．さらに可測集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対し，A に初めて到達する時刻を $T_A = \inf\{t > 0\colon X_t \in A\}$ とかき，1 点 $a \in \mathbb{R}$ に対し，$T_a = T_{\{a\}}$ とかく．このとき，ブラウン運動に対する以下の極限定理が知られている: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $t \geq 0$ と，有界な $\mathcal{F}_t$-可測汎関数 F_t に対し，

$$\lim_{s\to\infty} \mathbb{P}^B_x[F_t | T_0 > s] = \mathbb{P}^{\mathrm{sBes}}_x[F_t] \tag{1.1}$$

が成り立つ．ここで，$\mathbb{P}^{\mathrm{sBes}}_x$ は $X_0 = x$ となる対称化された 3 次元ベッセル過程である．つまり，$x > 0$ のときは，$X_0 = x$ となる 3 次元ベッセル過程 $\mathbb{P}^{\mathrm{Bes},+}_x$ であり，$x < 0$ のときは，$-X$ が $-X_0 = -x$ となる 3 次元ベッセル過程 $\mathbb{P}^{\mathrm{Bes},-}_x$ と考える．(1.1) の左辺は，時刻 s までのゼロ回避の条件付けブラウン運動の極限であるため，$\mathbb{P}^{\mathrm{sBes}}_x$ は，**ゼロ回避の条件付けブラウン運動** (Brownian motions conditioned to avoid zero) とみることができる．さらに $\mathbb{P}^{\mathrm{sBes}}_x$ は原点死滅過程に対して調和関数となる非負関数，すなわち

$$\mathbb{P}^B_x[h(X_t)1_{\{T_0>t\}}] = h(x), \quad t \geq 0,\, x \in \mathbb{R} \tag{1.2}$$

となる非負関数 $h(x) = |x|$ を用いて，

$$\mathrm{d}\mathbb{P}^{\mathrm{sBes}}_x|_{\mathcal{F}_t} = \frac{h(X_t)}{h(x)} 1_{\{T_0>t\}} \cdot \mathrm{d}\mathbb{P}^B_x|_{\mathcal{F}_t}, \quad t > 0 \tag{1.3}$$

とかけることが知られている（**Doob の h 変換**）．また，n^B をブラウン運動に関する 0 まわりの周遊測度 (Brownian excursion measure away from zero) とすると，$t \mapsto n^B[h(X_t)1_{\{T_0>t\}}]$ は正の定数関数となる．よってこの定数を C とおくと，

$$\mathrm{d}\mathbb{P}^{\mathrm{sBes}}_0|_{\mathcal{F}_t} = \frac{h(X_t)}{C} 1_{\{T_0>t\}} \cdot \mathrm{d}n^B|_{\mathcal{F}_t}, \quad t > 0 \tag{1.4}$$

は $\mathcal{F}_\infty$ 上 well-defined であり，$\mathbb{P}^{\mathrm{sBes}}_0$ も確率測度となる．$\mathbb{P}^{\mathrm{sBes}}_0$ は Brownian meander の，0 に戻ってこないという条件付け過程のある種の極限として得られる測度でもあるが，詳細は省略する．また，$\mathbb{P}^{\mathrm{sBes}}_0 = \frac{1}{2}\mathbb{P}^{\mathrm{Bes},+}_0 + \frac{1}{2}\mathbb{P}^{\mathrm{Bes},-}_0$ となることが知られている．我々は，$\mathbb{P}^{\mathrm{sBes}}_0$ も含めてゼロ回避の条件付けブラウン運動と呼ぶ．ここで，ブラウン運動は再帰的 (recurrent) であるが，3 次元ベッセル過程は過渡的 (transient) であるため，$\mathbb{P}^B_x$ と $\mathbb{P}^{\mathrm{sBes}}_x$ は互いに特異 (singular) な測度であることに注意する．

以上の 1 次元ブラウン運動に対する結果は，1 次元 Lévy 過程に一般化されている．まず Yano [12] によって，ガウシアン部分を持たない対称 Lévy 過程について調べられ，Yano [13] や Pantí [8] や Tsukada [11] によって非対称 Lévy 過程に一般化された．さらに，Takeda–Yano [10] によって，より一般的な条件の下でゼロ回避の条件付け Lévy 過程の収束について論じられ，Takeda [9] によって，その標本路の挙動が調べられた．[9] では，標本路の長時間挙動と短時間挙動について調べたが，本稿では，標本路の長時間挙動について述べる．

2 ゼロ回避の条件付け Lévy 過程

$(X=(X_t,t\ge 0),\mathbb{P}_x)$ を 1 次元 Lévy 過程とする．$t\ge 0$ に対し，$\mathcal{F}_t^X=\sigma(X_s,s\le t)$ とし，$\mathcal{F}_t=\bigcap_{s>t}\mathcal{F}_s^X$ を右連続フィルトレーションとする．さらに $\mathcal{F}_\infty=\sigma\Big(\bigcup_{t\ge 0}\mathcal{F}_t\Big)$ とする．$\mathbb{P}_0[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda X_t}]=\mathrm{e}^{t\psi(\lambda)}$ で定義される Lévy–Khinchine 指数 $\psi(\lambda)$ は，定数 $v\in\mathbb{R}$, $\sigma\ge 0$ と $\nu[1\wedge x^2]<\infty$ かつ $\nu(\{0\})=0$ をみたす $\mathbb{R}$ 上の測度 ν（Lévy 測度という）が存在して，

$$\psi(\lambda)=-\mathrm{i}v\lambda-\frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2+\int_{\mathbb{R}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}-1-\mathrm{i}\lambda x1_{\{|x|<1\}})\nu(\mathrm{d}x),\qquad \lambda\in\mathbb{R} \tag{2.1}$$

と表せることは有名である．ここで，σ^2 はガウシアン部分である．本稿では以下を仮定する．

仮定． $(X,\mathbb{P}_0)$ は再帰的 *(recurrent)* すなわち，任意の $\delta>0$ に対し，

$$\mathbb{P}_0\left[\int_0^\infty 1_{\{|X_t|<\delta\}}\,\mathrm{d}t\right]=\infty,\quad \delta>0. \tag{2.2}$$

が成立し，かつ任意の $q>0$ に対し，

$$\int_0^\infty\left|\frac{1}{q-\psi(\lambda)}\right|\mathrm{d}\lambda<\infty \tag{2.3}$$

も成り立つ．

Bertoin [1, Exercise II.4] によると，(2.3) の下では再帰的であることと，点再帰的 (point recurrent) であることは同値である．点再帰的とは，任意の $a\in\mathbb{R}$ に対し，$\mathbb{P}_0(T_a<\infty)=1$ が成り立つことを指す．この仮定の下では，以下の各条件が成り立つことが知られている．

(i) $(X,\mathbb{P}_0)$ は複合ポアソン過程 (compound Poisson process) ではない．

(ii) 原点正則 (regular for itself) である．すなわち，$\mathbb{P}_0(T_0=0)=1$ が成り立つ．

(iii) $\nu[1\wedge|x|]=\infty$.

(iv) $q>0$ に対し，以下をみたす q-レゾルベント密度 (q-resolvent density) r_q が存在する: 任意の非負可測関数 f に対し，

$$\int_{\mathbb{R}}f(x)r_q(x)\,\mathrm{d}x=\mathbb{P}_0\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-qt}f(X_t)\,\mathrm{d}t\right]. \tag{2.4}$$

さらに r_q は $\mathbb{R}$ 上有界かつ連続.

(v) $\displaystyle\lim_{q\to 0+}\frac{1}{r_q(0)}=0$.

これらについては，Bertoin [1] や Kyprianou [7] を参照されたい．ここで，関数 h を

$$h(x) = \lim_{q \to 0+} \{r_q(-x) - r_q(0)\}, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{2.5}$$

で定める．これが収束するかどうかは自明でないが，[10, Theorem 1.1] によると収束する．この h を**修正零レゾルベント** (renormalized zero resolvent) という．さらに m^2 を

$$m^2 = \mathbb{P}_0[X_1^2] = \sigma^2 + \int_{\mathbb{R}} x^2 \nu(\mathrm{d}x) \in (0, \infty] \tag{2.6}$$

と定める．$-1 \le \gamma \le 1$ に対し，

$$h^{(\gamma)}(x) = h(x) + \frac{\gamma}{m^2} x, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{2.7}$$

とする．このとき [10] によると，$h^{(\gamma)} \ge 0$ である．$L = (L_t, t \ge 0)$ を 0 における局所時間 (local time) とする．このとき，

$$\mathbb{P}_x\left[\int_0^\infty \mathrm{e}^{-qt}\,\mathrm{d}L_t\right] = r_q(-x), \qquad q > 0,\, x \in \mathbb{R} \tag{2.8}$$

をみたす．さらに，n を 0 まわりの周遊測度 (excursion measure) とする．

[10, Theorem 8.1] によると，$h^{(\gamma)}$ は原点死滅過程に対して非負調和関数となる．

定理 2.1 ([10, Theorem 8.1])**.** $-1 \le \gamma \le 1$，$x \in \mathbb{R}$ とする．このとき，

$$\mathbb{P}_x[h^{(\gamma)}(X_t) 1_{\{T_0 > t\}}] = h^{(\gamma)}(x), \quad n[h^{(\gamma)}(X_t) 1_{\{T_0 > t\}}] = 1, \quad t > 0. \tag{2.9}$$

$-1 \le \gamma \le 1$ に対して，$\mathcal{H}^{(\gamma)} = \{x \in \mathbb{R} \colon h^{(\gamma)}(x) > 0\}$ と $\mathcal{H}_0^{(\gamma)} = \mathcal{H}^{(\gamma)} \cup \{0\}$ を定義する．このとき，$\mathcal{H}_0^{(\gamma)}$ は $\mathbb{R}, [0, \infty), (-\infty, 0]$ のいずれかになる．定理 2.1 により，(1.3) や (1.4) と同様に，**Doob の h 変換**によって新たな確率測度を定義することができる．

$$\mathrm{d}\mathbb{P}_x^{(\gamma)}|_{\mathcal{F}_t} = \begin{cases} \dfrac{h^{(\gamma)}(X_t)}{h^{(\gamma)}(x)} 1_{\{T_0 > t\}} \cdot \mathrm{d}\mathbb{P}_x|_{\mathcal{F}_t} & x \in \mathcal{H}^{(\gamma)} \text{ のとき}, \\ h^{(\gamma)}(X_t) 1_{\{T_0 > t\}} \cdot \mathrm{d}n|_{\mathcal{F}_t} & x = 0 \text{ のとき} \end{cases} \tag{2.10}$$

とすると，定理 2.1 から，$\mathbb{P}_x^{(\gamma)}|_{\mathcal{F}_t}|_{\mathcal{F}_s} = \mathbb{P}_x^{(\gamma)}|_{\mathcal{F}_s}$，$0 < s < t$ が成り立つ．これと拡張定理により，$\mathbb{P}_x^{(\gamma)}$ は $\mathcal{F}_\infty$ 上で定義できる．ここで任意の $t > 0$ に対し，定義から $\mathbb{P}_x^{(\gamma)}(T_0 > t) = 1$ である．したがって，$\mathbb{P}_x^{(\gamma)}(T_0 = \infty) = 1$ となり，$(X, \mathbb{P}_x^{(\gamma)})$ は 0 に到達することはない．一方で $\mathbb{P}_x(T_0 < \infty) = 1$ なので，特に $\mathbb{P}_x$ と $\mathbb{P}_x^{(\gamma)}$ は $\mathcal{F}_\infty$ 上特異 (singular) である．以下では，$\boldsymbol{e}$ を独立で平均 1 の指数分布とし，$q > 0$ に対し $\boldsymbol{e}_q = \boldsymbol{e}/q$ とする．

定理 2.2 ([10, Corollary 8.2])**.** このとき，$t \ge 0$ と有界な $\mathcal{F}_t$-可測汎関数 F_t に対し，以下が成立する．

(i) $\displaystyle\lim_{q \to 0+} \mathbb{P}_x[F_t | T_0 > \boldsymbol{e}_q] = \mathbb{P}_x^{(0)}[F_t], \quad x \in \mathcal{H}^{(0)};$

(ii) $\displaystyle\lim_{a \to \pm\infty} \mathbb{P}_x[F_t | T_0 > T_a] = \mathbb{P}_x^{(\pm 1)}[F_t], \quad x \in \mathcal{H}^{(\pm 1)};$

(iii) $\displaystyle\lim_{\substack{a \to \infty,\, b \to \infty, \\ \frac{a-b}{a+b} \to \gamma}} \mathbb{P}_x[F_t | T_0 > T_{\{a, -b\}}] = \mathbb{P}_x^{(\gamma)}[F_t], \quad -1 \le \gamma \le 1,\, x \in \mathcal{H}^{(\gamma)}.$

また，$\mathbb{P}_0^{(\gamma)}$ は Lévy meander の 0 に戻ってこないという条件付け過程のランダム時計に沿うある種の極限として得られる測度でもあるが，詳細は省略する．$\mathbb{P}_x^{(\gamma)}$ は，**ゼロ回避の条件付け Lévy 過程** (Lévy processes conditioned to avoid zero) と呼ばれる．

極限 (1.1) では定数時刻 s の極限を考えたが，ここではランダムな時刻 $\boldsymbol{e}_q, T_a, T_{\{a,-b\}}$ の有向族の極限を考えている．ランダムな時刻の有向族を**ランダム時計** (random clock) という．このランダム時計の手法はさまざまな先行研究がある．Knight [6] はブラウン運動に，Chaumont [2] や Chaumont–Doney [3, 4] や Doney [5, 7] は正滞在の条件付け Lévy 過程 (Lévy processes conditioned to stay positive) に，Yano–Yano [14] は拡散過程に，Pantí [8] は本研究より強い条件の下，ゼロ回避の条件付け Lévy 過程の研究に用いている．

3　長時間挙動の結果

確率過程 $(X, \mathbb{P}_x^{(\gamma)})$ の長時間挙動について述べるため，

$$\Omega_\infty^+ = \left\{ \lim_{t\to\infty} X_t = \infty \right\}, \tag{3.1}$$

$$\Omega_\infty^- = \left\{ \lim_{t\to\infty} X_t = -\infty \right\}, \tag{3.2}$$

$$\Omega_\infty^{+,-} = \left\{ \limsup_{t\to\infty} X_t = -\liminf_{t\to\infty} X_t = \infty \right\}. \tag{3.3}$$

と定義する．$(X, \mathbb{P}_x)$ は再帰的と仮定したから，$\mathbb{P}_x(\Omega_\infty^{+,-}) = 1$ である．

定理 3.1 ([9])**.** $-1 \le \gamma \le 1$ に対し，

$$\mathbb{P}_x^{(\gamma)}(\Omega_\infty^+ \cup \Omega_\infty^- \cup \Omega_\infty^{+,-}) = \mathbb{P}_x^{(\gamma)}\left(\lim_{t\to\infty} |X_t| = \infty \right) = 1 \tag{3.4}$$

が成り立つ．さらに $m^2 < \infty$ とすると，

$$\mathbb{P}_x^{(\gamma)}(\Omega_\infty^\pm) = \begin{cases} \dfrac{(1\pm\gamma)}{2} \dfrac{h^{(\pm 1)}(x)}{h^{(\gamma)}(x)} & x \in \mathcal{H}^{(\gamma)} \text{ のとき}, \\ \dfrac{1\pm\gamma}{2} & x = 0 \text{ のとき}, \end{cases} \qquad \mathbb{P}_x^{(\gamma)}(\Omega_\infty^{+,-}) = 0 \tag{3.5}$$

が成り立つ．

定理 3.1 より，$(X, \mathbb{P}_x^{(\gamma)})$ は過渡的 (transient) であることが分かる．

4　長時間挙動の結果の処罰問題への応用

ゼロ回避の条件付け Lévy 過程の問題を一般化したものとして，処罰問題がある．処罰問題に，定理 3.1 を応用しよう．

本節では，Lévy 過程 $(X, \mathbb{P}_0)$ が推移密度 (transition density) $p_t(\cdot)$ を持つとする．$x \in \mathcal{H}^{(\gamma)}$ に対し，測度 $\mathcal{P}_x^{(\gamma)}$ を

$$\mathcal{P}_x^{(\gamma)} = \int_0^\infty \mathbb{P}_x[\mathrm{d}L_u] \left(\mathbb{P}_{x,0}^u \bullet \mathbb{P}_0^{(\gamma)} \right) + h^{(\gamma)}(x) \mathbb{P}_x^{(\gamma)} \tag{4.1}$$

と定義する．ただし，$\mathbb{P}^u_{x,0}$ は $X_0 = x$, $X_u = 0$ となる Lévy bridge とし，$\bullet$ は連結 (concatenation) とし，$\mathbb{P}_x[\mathrm{d}L_u] = p_u(-x)\,\mathrm{d}u$ とした．$\mathcal{P}^{(\gamma)}_x$ は一般には確率測度でないことに注意する．$f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ を，

$$0 < f(0) + \int_0^\infty f(u)\,\mathrm{d}u < \infty \tag{4.2}$$

をみたす関数とする．$-1 \le \gamma \le 1$ に対して，確率測度 $\mathbb{Q}^{(\gamma,f)}$ を

$$\mathbb{Q}^{(\gamma,f)}_x = \frac{f(L_\infty)}{\mathcal{P}^{(\gamma)}_x[f(L_\infty)]} \cdot \mathcal{P}^{(\gamma)}_x \tag{4.3}$$

と定義すると，以下の条件付き期待値の極限定理が成立する．

定理 4.1 ([10, Theorem 8.3])**.** $-1 \le \gamma \le 1$ とし，$x \in \mathcal{H}^{(\gamma)}$ とする．このとき，有界な $\mathcal{F}_t$-可測汎関数 F_t について，以下が成立する．

(i) $\displaystyle \lim_{q\to 0+} \frac{\mathbb{P}_x[F_t f(L_{\boldsymbol{e}_q})]}{\mathbb{P}_x[f(L_{\boldsymbol{e}_q})]} = \mathbb{Q}^{(0,f)}_x[F_t]$;

(ii) $\displaystyle \lim_{a\to \pm\infty} \frac{\mathbb{P}_x[F_t f(L_{T_a})]}{\mathbb{P}_x[f(L_{T_a})]} = \mathbb{Q}^{(\pm 1,f)}_x[F_t]$;

(iii) $\displaystyle \lim_{\substack{a\to\infty,\, b\to\infty,\\ \frac{a-b}{a+b}\to\gamma}} \frac{\mathbb{P}_x[F_t f(L_{T_{\{a,-b\}}})]}{\mathbb{P}_x[f(L_{T_{\{a,-b\}}})]} = \mathbb{Q}^{(\gamma,f)}_x[F_t], \quad -1 \le \gamma \le 1.$

$f = 1_{\{u=0\}}$ とすると，$f(L_t) = 1_{\{T_0 > t\}}$ であるため，これはゼロ回避の条件付け Lévy 過程となる．したがって, 定理 4.1 は定理 2.2 の一般化といえる．定理 4.1 のような極限を考えることを**処罰問題** (penalization) という．処罰問題に定理 3.1 を適用することで，以下が直ちに分かる．

定理 4.2. $-1 \le \gamma \le 1$ とし，$x \in \mathcal{H}^{(\gamma)}$ とする．このとき，$\mathcal{P}^{(\gamma)}_x(\{\lim_{t\to\infty}|X_t| = \infty\}^c) = 0$ であるから，$0 < f(0) + \int_0^\infty f(u)\,\mathrm{d}u < \infty$ をみたす $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ に対し，$\mathbb{Q}^{(\gamma,f)}_x(\lim_{t\to\infty}|X_t| = \infty) = 1$ となる．

さらに $m^2 < \infty$ とすると，$\mathcal{P}^{(\gamma)}_x(\Omega^{+,-}_\infty) = 0$ であるから，$\mathbb{Q}^{(\gamma,f)}_x(\Omega^+_\infty \cup \Omega^-_\infty) = 1$ が成り立つ．

参考文献

[1] J. Bertoin. *Lévy processes*, volume 121 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[2] L. Chaumont. Conditionings and path decompositions for Lévy processes. *Stochastic Process. Appl.*, 64(1):39–54, 1996.

[3] L. Chaumont and R. A. Doney. On Lévy processes conditioned to stay positive. *Electron. J. Probab.*, 10:no. 28, 948–961, 2005.

[4] L. Chaumont and R. A. Doney. Corrections to: “On Lévy processes conditioned to stay positive” [Electron J. Probab. **10** (2005), no. 28, 948–961; mr2164035]. *Electron. J. Probab.*, 13:no. 1, 1–4, 2008.

[5] R. A. Doney. Tanaka’s construction for random walks and Lévy processes. In *Séminaire de Probabilités XXXVIII*, volume 1857 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–4. Springer, Berlin, 2005.

[6] F. B. Knight. Brownian local times and taboo processes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 143:173–185, 1969.

[7] A. E. Kyprianou. *Fluctuations of Lévy processes with applications.* Universitext. Springer, Heidelberg, second edition, 2014. Introductory lectures.

[8] H. Pantí. On Lévy processes conditioned to avoid zero. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 14(2):657–690, 2017.

[9] S. Takeda. Sample path behaviors of Lévy processes conditioned to avoid zero, 2022. Preprint, arXiv:2211.12863.

[10] S. Takeda and K. Yano. Local time penalizations with various clocks for Lévy processes. *Electron. J. Probab.*, 28:1–35, 2023.

[11] H. Tsukada. A potential theoretic approach to Tanaka formula for asymmetric Lévy processes. In *Séminaire de Probabilités XLIX*, volume 2215 of *Lecture Notes in Math.*, pages 521–542. Springer, Cham, 2018.

[12] K. Yano. Excursions away from a regular point for one-dimensional symmetric Lévy processes without Gaussian part. *Potential Anal.*, 32(4):305–341, 2010.

[13] K. Yano. On harmonic function for the killed process upon hitting zero of asymmetric Lévy processes. *J. Math-for-Ind.*, 5A:17–24, 2013.

[14] K. Yano and Y. Yano. On h-transforms of one-dimensional diffusions stopped upon hitting zero. In *In memoriam Marc Yor—Séminaire de Probabilités XLVII*, volume 2137 of *Lecture Notes in Math.*, pages 127–156. Springer, Cham, 2015.