弱型 Burkholder 不等式の成り立つ関数空間

富山大学 学術研究部 理学系
菊池 万里

1 導入

本稿を通して $(\Omega, \Sigma, \mathrm{P})$ を非原子的確率空間とする．Σ の部分 σ–代数の広義増大列 $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ を Ω のフィルトレーションと呼び，フィルトレーションの全体を $\mathbb{F}$ で表す．$\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n) \in \mathbb{F}$ に対して，$\mathcal{F}$ と P に関するマルチンゲールの全体を $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ で表し，一様可積分な $f = (f_n)_{n\in\mathbb{Z}_+} \in \mathcal{M}$ の全体を $\mathcal{M}_u(\mathcal{F})$ で表す．更に $\mathcal{M} = \bigcup_{\mathcal{F}\in\mathbb{F}} \mathcal{M}(\mathcal{F})$，$\mathcal{M}_u = \bigcup_{\mathcal{F}\in\mathbb{F}} \mathcal{M}_u(\mathcal{F})$ と置く．すなわち，$\mathcal{M}$ 及び $\mathcal{M}_u$ は，それぞれ何らかのフィルトレーションに関するマルチンゲール及び一様可積分なマルチンゲールの全体を表す.

よく知られているように，L_1 でノルム有界なマルチンゲールは概収束する．特に $f = (f_n) \in \mathcal{M}_u$ であれば，$f = (f_n)$ は概収束する．本稿ではその概収束極限を $\boldsymbol{f_\infty}$ で表す.

$f = (f_n) \in \mathcal{M}$ に対し，その**極大関数** $\boldsymbol{Mf}$ 及び**二次変分** $\boldsymbol{Sf}$ をそれぞれ

$$Mf = \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} |f_n|, \qquad Sf = \left[\sum_{n=1}^{\infty}(f_n - f_{n-1})^2 + f_0^2\right]^{1/2}$$

のように定義する．マルチンゲールの極大関数と二次変分は，いずれもマルチンゲール理論を展開する上で欠くことのできない概念であり，取り分け，それらに関するノルム不等式は，マルチンゲール理論を支える骨格になっている．極大関数に関する不等式で最もよく知られたものは，Doob の不等式であろう．$f = (f_n) \in \mathcal{M}_u$ に対する (2 つの) Doob の不等式は,

$$\|Mf\|_{\text{w-}L_p} \le \|f_\infty\|_{L_p}, \tag{1.1}$$

$$\|Mf\|_{L_p} \le \frac{p}{p-1}\|f_\infty\|_{L_p} \tag{1.2}$$

のように記述される．但し，w-L_p は $\|x\|_{\text{w-}L_p} := \sup_{\lambda>0} \lambda \mathrm{P}\{|x| > \lambda\}^{1/p} < \infty$ であるような確率変数 x の全体を表す．よく知られているように w-L_p は Lorentz 空間 $L_{p,\infty}$ と一致する．(1.1) はすべての $f = (f_n) \in \mathcal{M}_u$ とすべての $p \in [1, \infty]$ に対して成立し，(1.2) はすべての $f = (f_n) \in \mathcal{M}_u$ とすべての $p \in (1, \infty]$ に対して成立する．これらの不等式は，Doob がマルチンゲールの概念を導入した直後から知られていたのではないかと思われる．実際，Doob の 1953 年の著作 [4] にこれらの不等式が記載されている．他方，二次変分に関する Burkholder の不等式は

$$\|Sf\|_{\text{w-}L_p} \le C_p\|f_\infty\|_{L_p}, \tag{1.3}$$

$$C_p^{-1}\|Sf\|_{L_p} \le \|f_\infty\|_{L_p} \le C_p\|Sf\|_{L_p} \tag{1.4}$$

のように記述される．(1.3) はすべての $f = (f_n) \in \mathcal{M}_u$ とすべての $p \in [1, \infty)$ に対して成立し，(1.4) はすべての $f = (f_n) \in \mathcal{M}_u$ とすべての $p \in (1, \infty)$ に対して成立する．ここに C_p は p のみに依存する（不等式ごとに値の異なり得る）定数である．これらの不等式は Burkholder のよく知られた論文 [2] の中に述べられている．

上記の不等式が L_p 以外の空間でも成立するか否かを調べることは極めて自然である．実際，(1.1) と同様の不等式が成立する Banach 関数空間（定義 2.1 参照）の特徴付けは [7] で確立され，(1.2) と同様の不等式が成立する Banach 関数空間の特徴付けは [5] で確立されている．更に，(1.4) と同様の不等式が成立する Banach 関数空間の特徴付けは [6] で確立されている．しかしながら (1.3) と同様の不等式が成立する Banach 関数空間の特徴付けは，他の 3 つの不等式と比較して難しく，長らく解決の糸口が見えない状況が続いた．尚，この問題と関連する研究結果として [9], [10] などがある．

本稿では，最近得られた (1.3) と同様の不等式が成立する Banach 関数空間の特徴付けについて議論する．

2　定義と表記法

Ω 上の殆ど至るところ有限な値を取る確率変数（可測関数）の全体を L_0 で表す．$x \in L_0$ と $\lambda \in \mathbb{R}$ に対し，例えば集合 $\{\omega \in \Omega \colon x(\omega) > \lambda\}$ を $\{x > \lambda\}$ のように略記する．また，集合 $A \in \Sigma$ に対し，A の指示関数を $\mathbb{1}_A$ で表す．

確率変数から成る線形位相空間 X, Y に対し，$X \hookrightarrow Y$ と書いて，X が Y に連続的に埋め込まれていることを表す．X, Y が（準）ノルム空間であれば，$X \hookrightarrow Y$ であることと，$X \subset Y$ かつ $\|x\|_Y \leq C\|x\|_X$ $(x \in X)$ であるような定数 $C > 0$ が存在することは同値である．

定義 2.1. Ω 上の確率変数（の同値類）から成る Banach 空間 X は，次の条件を満たすとき，**Banach 関数空間**と呼ばれる:

(B1) $L_\infty \hookrightarrow X \hookrightarrow L_1$.

(B2) $|x| \leq |y|$ a.s. かつ $y \in X$ であれば，$x \in X$ であり $\|x\|_X \leq \|y\|_X$.

(B3) $x_n \in X$ $(n \in \mathbb{N})$, $0 \leq x_n \uparrow x$ a.s. かつ $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_X < \infty$ であれば，$x \in X$ であり $\|x\|_X = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_X$.

但し，$x \in L_0 \setminus X$ であれば $\|x\|_X = \infty$ と約束する．

勿論 Lebesgue 空間 L_p $(1 \leq p \leq \infty)$ は Banach 関数空間であり，Orlicz 空間，Lorentz 空間なども Banach 関数空間である．その他，（適当な可積分性を持つ荷重をもつ）荷重 Lebesgue 空間や荷重 Orlicz 空間なども Banach 関数空間である．更に，変動指数を持つ Lebesgue 空間も Banach 関数空間となる．

定義 2.2. X を Banach 関数空間とする．各 $x \in L_0$ に対して

$$\|x\|_{X'} = \sup_{y \in B(X)} \mathrm{E}\big[|xy|\big]$$

と置き，$\|x\|_{X'} < \infty$ であるような $x \in L_0$ の全体を X' で表す．但し，$B(X)$ は X の閉単位球を表す．

Banach 関数空間 X に対して，上記のように定義される空間 X' も Banach 関数空間になる ([1, Chap. 1])．例えば，各 $p \in [1, \infty]$ に対し p' を p の共役指数とすれば，$(L_p)' = L_{p'}$ となる．特に $(L_\infty)' = L_1$ である．このことから分かる通り，X' は必ずしも X の双対空間と一致しない．

定義 2.3. X を Banach 関数空間とする．各 $x \in X$ に対し

$$\|x\|_{\text{w-}X} = \sup_{\lambda > 0} \big\|\mathbb{1}_{\{|x| > \lambda\}}\big\|_X$$

と置き，$\|x\|_{\text{w-}X} < \infty$ であるような $x \in L_0$ の全体を w-X で表す．本稿では w-X を X の**弱空間**と呼ぶ．

前述のように w-$L_p = L_{p,\infty}$ となる．定義から明らかなように $\|\cdot\|_{\text{w-}L_p}$ はノルムにはならない(が，$1 < p \leq \infty$ のとき，$L_{p,\infty}$ には $\|\cdot\|_{\text{w-}L_p}$ と同値なノルムが定義される)．一般に $\|\cdot\|_{\text{w-}X}$ はノルムではなく，準ノルムである．実際，$\|\cdot\|_{\text{w-}X}$ は三角不等式を満たさないが，準三角不等式

$$\|x + y\|_{\text{w-}X} \leq 2\big(\|x\|_{\text{w-}X} + \|y\|_{\text{w-}X}\big)$$

を満たす．このとき，

$$\|x\|^*_{\text{w-}X} = \inf\Big\{\sum_{n=1}^{m} \|x\|^{1/2}_{\text{w-}X} \colon m \in \mathbb{N},\ x_n \in \text{w-}X,\ \sum_{n=1}^{m} x_n = x \text{ a.s.}\Big\}^2$$

と置けば，$\|\cdot\|^*_{\text{w-}X}$ は $\|\cdot\|_{\text{w-}X}$ と同値な w-X 上の準ノルムになり，$\|\cdot\|^{*\,1/2}_{\text{w-}X}$ は三角不等式を満たす ([11, p. 47])．これにより w-X 上の距離関数 $d(x, y) = \|x - y\|^{*\,1/2}_{\text{w-}X}$ が定義できる．w-X はこの距離に関して完備であり，その意味で準 Banach 空間になる．

Banach 関数空間 X が与えられたとき，その**上基本関数** $\boldsymbol{\overline{\varphi}_X(t)}$，**下基本関数** $\boldsymbol{\underline{\varphi}_X(t)}$ をそれぞれ

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}_X(t) &= \sup\big\{\|\mathbb{1}_A\|_X \colon A \in \Sigma,\ \mathrm{P}(A) = t\big\}, \\ \underline{\varphi}_X(t) &= \sup\big\{\|\mathbb{1}_A\|_X \colon A \in \Sigma,\ \mathrm{P}(A) = t\big\}, \end{aligned} \qquad (t \in [0, 1]),$$

のように定義する．例えば，

$$\overline{\varphi}_{L_p}(t) = \underline{\varphi}_{L_p}(t) = t^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty),$$

$$\overline{\varphi}_{L_\infty}(t) = \underline{\varphi}_{L_\infty}(t) = \begin{cases} 1 & (0 < t \leq 1) \\ 0 & (t = 0) \end{cases}$$

となる．$\overline{\varphi}_X$ は $[0, 1]$ 上の準凹関数である ([7, Lemma 1])．但し，関数 $\varphi\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ が**準凹関数**であるとは，次の 3 条件を満たすことである:

(1) $\varphi(t) = 0$ となるのは $t = 0$ のときのみである．
(2) $\varphi(t)$ は $[0,1]$ 上で非減少である．
(3) $\varphi(t)/t$ は $(0,1]$ 上で非増加である．

$\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ を準凹関数とするとき，$M(\varphi\colon\Omega)$ を

$$\|x\|_{M(\varphi\colon\Omega)} = \sup_{0<t\le 1} \frac{\varphi(t)}{t} \int_0^t x^*(s)\,dx < \infty$$

であるような $x \in L_0$ の全体と定義すれば，$M(\varphi\colon\Omega\colon)$ は Banach 関数空間になる[*1]．これを φ によって生成される **Marcinkiewicz 空間**と呼ぶ．ここに x^* は x の**非増加再配列**を表す．すなわち x^* は

$$x^*(t) = \inf\{\lambda > 0\colon \mathrm{P}\{|x| > \lambda\} \le t\} \qquad (0 < t \le 1)$$

のように定義される $(0,1]$ 上の関数である．$M(\varphi\colon\Omega)$ は Banach 関数空間であるから, w-$M(\varphi\colon\Omega)$ を考えることができる．この空間を $M^*(\varphi\colon\Omega)$ で表すことにする．このとき，$M^*(\varphi\colon\Omega) =$ w-$M(\varphi\colon\Omega)$ の準ノルムは

$$\|x\|_{M^*(\varphi\colon\Omega)} = \sup_{0<t\le 1} \bigl[\, \varphi(t)x^*(t) \,\bigr]$$

で与えられる．X が Banach 関数空間であれば $\overline{\varphi}_X$ は準凹関数であるから, X に付随して $M(\overline{\varphi}_X\colon\Omega)$ 及び $M^*(\overline{\varphi}_X\colon\Omega)$ が定義できる．

Banach 関数空間 X は，$x \in X$ のノルムの値が x の分布のみに依存して定まるとき，**再配列不変**[*2]であるといわれる．より正確には，X が再配列不変であるとは，x, $y \in L_0$ が同分布かつ $y \in X$ のとき，$x \in X$ かつ $\|x\|_X = \|y\|_X$ となることである．

再配列不変空間には Boyd 指標が定義されていて，殊に補間定理の考察において重要な役割を演ずる．しかしながら，Boyd 指標は本稿の課題である不等式の考察には十分ではない．本稿では，Boyd 指標の代わりになる別の指標を導入して，目的の不等式の考察に利用する．

準凹関数 $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ に対し，関数 $m_\varphi\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ を

$$m_\varphi(s) = \sup_{0<t\le(1/s)\wedge 1} \frac{\varphi(st)}{\varphi(t)} \equiv \sup_{0<t\le s\wedge 1} \frac{\varphi(t)}{\varphi(t/s)} \qquad (0 < s < \infty)$$

て定義し，指標 p_φ, q_φ をそれぞれ

$$p_\varphi = \sup_{0<s<1} \frac{\log m_\varphi(s)}{\log s} \equiv \lim_{s\to 0+} \frac{\log m_\varphi(s)}{\log s},$$
$$q_\varphi = \inf_{1<s<\infty} \frac{\log m_\varphi(s)}{\log s} \equiv \lim_{s\to\infty} \frac{\log m_\varphi(s)}{\log s}$$

[*1] 本稿の主定理（定理 3.1）を記述するためには，$M(\varphi\colon\Omega)$ における「Ω」の記述は不要であり，単に $M(\varphi)$ と記述すればそれで十分であるるが，関連する結果を述べるにあたり，Ω への言及が必要になるため，敢えて $M(\varphi\colon\Omega)$ と記述する．
[*2] 岩波の数学辞典では再配分不変と表現されている．

のように定める．X が Banach 関数空間であれば，$\overline{\varphi}_X$ は準凹関数であるから，$p_{\overline{\varphi}_X}$, $q_{\overline{\varphi}_X}$ を定義することができる．本稿ではこれらを単に p_X, q_X と記すことにする（但し本稿の結果を記述する上では，q_X は不要である）．通常，Boyd 指標が再配列不変な Banach 関数空間のみに対して定義されるのに対し，p_X，q_X は任意の Banach 関数空間に対して定義される．X が如何なる Banach 関数空間であっても

$$0 \le p_X \le q_X \le 1$$

となる．例えば，$p_{L_p} = q_{L_p} = 1/p$ $(1 \le p \le \infty)$ となる．その意味で p_X，q_X は L_p の指数 p の役割を拡張するものである．

因みに X が再配列不変な Banach 関数空間のとき，その上 Boyd 指標，下 Boyd 指標をそれぞれ β_X, α_X とすれば，$\alpha_X \le p_X \le q_X \le \beta_X$ となる．更に [9, Propositions 3.2, 3.5] によれば，p_X, q_X について次の事実が知られている:

(i) $p_X > 0$ であるための必要十分条件は

$$\liminf_{t \to 0+} \frac{\overline{\varphi}_X(At)}{\overline{\varphi}_X(t)} > 1 \tag{2.1}$$

であるような定数 $A > 1$ が存在することである．

(ii) $q_X < 1$ であるための必要十分条件は

$$\varlimsup_{t \to 0+} \frac{\overline{\varphi}_X(At)}{\overline{\varphi}_X(t)} < A$$

であるような定数 $A > 1$ が存在することである．

本稿の結果を記述するためには，p_X に加え次のように定義される X の指標 k_X，ℓ_X が必要である:

$$k_X = \sup_{0<t\le 1} \frac{\overline{\varphi}_X(t)}{\underline{\varphi}_X(t)}, \qquad \ell_X = \sup_{0<t\le 1} \frac{\overline{\varphi}_X(t)\overline{\varphi}_{X'}(t)}{t}.$$

勿論 $k_X < \infty$ であるということは,

$$\overline{\varphi}_X(t) \le k\underline{\varphi}_X(t) \qquad (0 < t \le 1) \tag{2.2}$$

となる有限な定数 k が存在することを意味し，$\ell_X < \infty$ ということは,

$$\overline{\varphi}_X(t)\overline{\varphi}_{X'}(t) \le \ell t \qquad (0 < t \le 1) \tag{2.3}$$

となる有限な定数 ℓ が存在することを意味する．X が再配列不変であれば明らかに $k_X = 1$ であり，更に $\ell_X = 1$ でもある ([1, Theorem 5.2, p. 66]).

3　結果

本稿で解決を図りたい問題は，(1.3) と同様の不等式が成り立つような Banach 関数空間 X の特徴付け (L_p を Banach 関数空間 X に置き換えたとき，(1.3) と同様の不等式が成り立つために X が満たすべき必要十分条件) の導出にある．この問題に対する完全な解答は得られていないが，(1.3) の不等式と Sf と f_∞ を入れ替えた不等式が共に成り立つ Banach 関数空間の特徴付けが得られた．

定理 3.1. Banach 関数空間 X に対し，次の (i)–(iii) は互いに同値である:

(i) 任意の $f = (f_n) \in \mathcal{M}_u$ に対して

$$\|Sf\|_{\text{w-}X} \leq C_X \|f_\infty\|_X \quad \text{かつ} \quad \|f_\infty\|_{\text{w-}X} \leq C_X \|Sf\|_X \tag{3.1}$$

であるような X のみに依存する定数 $C_X > 0$ が存在する．

(ii) $p_X > 0$ かつ $k_X < \infty$.

(iii) $p_X > 0$ かつ $\ell_X < \infty$.

上記の $p_X > 0$ は，「(2.1) が成り立つような定数 $A > 1$ が存在する」という条件に置き換えることができる．また，$k_X < \infty$ 及び $\ell_X < \infty$ はそれぞれ，「(2.2) が成り立つような定数 $k > 0$ が存在する」及び「(2.3) が成り立つような定数 ℓ が存在する」という条件に置き換えることができる．

更に，上記の (同値な) 条件が成り立つとき，w-X は $M^*(\overline{\varphi}_X : \Omega)$ と一致し，双方の準ノルムは互いに同値である．

上述のように，Banach 関数空間 X が再配列不変であれば，$k_X = \ell_X = 1$ となる．従ってこの場合，定理 3.1 の (i) が成り立つための必要十分条件は，$p_X > 0$ という条件のみということになる．

定理 3.1 の各条件から他の条件を導くためには，いずれも少々煩雑な計算が必要になる．その詳細な記述は，他の機会に譲ることとして，本稿の以下の部分では，定理 3.1 の証明のために得られた副産物的な結果について述べる．副産物的ではあるものの．それ自体，十分意味のある結果であると思われる．この副産物的な結果は，定理 3.1 の (i) が成立するときに，$p_X > 0$ であることを示すために利用される．

以下，I で半開区間 $(0, 1]$ を表し，I には確率測度として Lebesgue 測度が与えられているものとする (従って I 上の Lebesgue 可測関数は，確率変数とみなされる)．勿論 I も確率空間であるから，I 上の可測関数 (確率変数) から成る Banach 関数空間を考えることができる．今後，Ω 上の確率変数から成る Banach 関数空間を **Ω 上の Banach 関数空間**と呼び，I 上の可測関数から成る Banach 関数空間を ***I* 上の Banach 関数空間**と呼ぶ.

$\varphi\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ を準凹関数するとき，$\Lambda(\varphi : I)$ を

$$\|\eta\|_{\Lambda(\overline{\varphi}_X : I)} := \int_0^1 \eta^*(s)\, d\varphi(s) < \infty$$

であるような I 上の可測関数 η の全体と定義すれば，$\Lambda(\overline{\varphi}_X : I)$ は準 Banach 空間となる．これを φ によって生成される **Lorentz 空間**と呼ぶ．但し，η^* は可測関数 η の非増加再配列を表す．すなわち，I 上の Lebesgue 測度を μ で表せば，η^* は

$$\eta^*(t) = \inf\{\lambda > 0 \colon \mu\{|\eta| > \lambda\} \le t\} \qquad (0 < t \le 1)$$

のように定義される．更に η を Ω 上の確率変数 x に置き換えて考えることにより，Ω 上の Lorentz 空間 $\Lambda(\varphi : \Omega)$ を定義することができる．$\Lambda(\varphi : I)$ は $\|\cdot\|_{\Lambda(\varphi : I)}$ と同値的にノルム付け可能であり，そのノルムに関して再配列不変な I 上の Banach 関数空間にできる．$\Lambda(\varphi : \Omega)$ についても同様である．Lorentz 空間に加え，Marcinkiewicz 空間やその弱空間に対しても，Ω 上の空間と I 上の空間が定義される．

X を Ω 上の Banach 関数空間とするとき $\overline{\varphi}_X$ は準凹関数であるから，X に付随して $M(\overline{\varphi}_X : \Omega)$, $M(\overline{\varphi}_X : I)$, $M^*(\overline{\varphi}_X : \Omega)$, $M^*(\overline{\varphi}_X : I)$, $\Lambda(\overline{\varphi}_X : \Omega)$, $\Lambda(\overline{\varphi}_X : I)$ などが定義される．Y が I 上の Banach 関数空間の場合もその上基本関数 $\overline{\varphi}_Y$ が Ω 上の Banach 関数空間の上基本関数と同様に定義され，準凹関数になる．よって $M(\overline{\varphi}_Y : \Omega)$, $M(\overline{\varphi}_Y : I)$ などが定義される．

X が再配列不変でない場合でも，$M(\overline{\varphi}_X : \Omega)$, $M(\overline{\varphi}_X : I)$, $\Lambda(\overline{\varphi}_X : \Omega)$, $\Lambda(\overline{\varphi}_X : I)$ はいずれも再配列不変な Banach 関数空間になることに注意を要する．

特に Y が I 上の再配列不変な Banach 関数空間であるときには

$$\Lambda(\overline{\varphi}_Y : I) \hookrightarrow Y \hookrightarrow M(\overline{\varphi}_Y : I)$$

であり，$\overline{\varphi}_{\Lambda(\overline{\varphi}_X : I)} = \overline{\varphi}_{M(\overline{\varphi}_X : I)} = \overline{\varphi}_X$ となる．$M(\overline{\varphi}_X : I)$ はそのような再配列不変 Banach 関数空間で最大のものであり，$\Lambda(\overline{\varphi}_X : I)$ は最小のものである (Semenov [12])．

D を各 $t \in I$ に対して区間 $(t, 1]$ 上で積分可能な I 上の関数の全体とし，D 上の線形作用素 $\mathcal{Q}$ を

$$(\mathcal{Q}\eta)(t) = \int_t^1 \frac{\eta(s)}{s}\, ds \quad (t \in I)$$

で定義する．この作用素の有界性について，Boyd の定理 ([3]) を用いることにより，次の結果を導くことができる ([10, Proposition 2.2])．

命題 3.2. $\varphi \colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ を準凹関数とする．このとき．次の (i)–(iv) は互いに同値である:

(i) $\mathcal{Q}$ の $M(\varphi : I)$ への制限は，$M(\varphi : I)$ からそれ自身への有界線形作用素である．
(ii) $\mathcal{Q}$ の $M(\varphi : I)$ への制限は，$M(\varphi : I)$ から $M^*(\varphi : I)$ への有界線形作用素である．
(iii) $\mathcal{Q}$ の $\Lambda(\varphi : I)$ への制限は，$\Lambda(\varphi : I)$ からそれ自身への有界線形作用素である．
(iv) $p_\varphi > 0$.

特に，X が Ω 上の Banach 関数空間であれば，$p_X > 0$ であることと $\mathcal{Q}$ が $M(\overline{\varphi}_X : I)$ からそれ自身への有界作用素となることは同値である．更に，$\mathcal{Q}$ の定義域 D が $M^*(\overline{\varphi}_X : I)$ に含まれ，尚かつ $\mathcal{Q}$ が $M^*(\overline{\varphi}_X : I)$ からそれ自身への有界作用素になれば，$p_X > 0$ となることも命題 3.2 から導かれる．

この事実を用いて，例えば [9] では，不等式

$$C_X^{-1}\|f_\infty\|_{\text{w-}X} \le \|Sf\|_{\text{w-}X} \le C_X\|f_\infty\|_{\text{w-}X} \tag{3.2}$$

が成り立つとき，$p_X > 0$ となることが示されている．その手順は次の通りである:

(1) (3.2) が成り立つとき，w-$X = M^*(\overline{\varphi}_X : \Omega)$ となることを示す．
(2) w-X と $M^*(\overline{\varphi}_X : \Omega)$ のノルムが同値であることから (3.2) が

$$C_X^{-1}\|f_\infty\|_{M^*(\overline{\varphi}_X : \Omega)} \le \|Sf\|_{M^*(\overline{\varphi}_X : \Omega)} \le C_X\|f_\infty\|_{M^*(\overline{\varphi}_X : \Omega)} \tag{3.3}$$

と書き換えられる．このことを用いて，$\mathcal{Q}$ が $M^*(\overline{\varphi}_X : I)$ からそれ自身への有界線形作用素であることを示す．このことと命題 3.2 から $p_X > 0$ を得る．

(3.3) から不等式 $\|\mathcal{Q}\eta\|_{M^*(\overline{\varphi}_X : I)} \le K\|\eta\|_{M^*(\overline{\varphi}_X : I)}$ が導かれるという事実は，マルチンゲールの二次変分 Sf の扱いに慣れていれば，決して納得し難いというものではない．しかしながら，本稿の主定理（定理 3.1）の証明には，もはや命題 3.2 は利用できない．というのは，(3.1) の 2 つの不等式から導かれる不等式は

$$\|Sf\|_{M^*(\overline{\varphi}_X : \Omega)} \le C_X\|f_\infty\|_{\Lambda(\overline{\varphi}_X : \Omega)}, \qquad \|f_\infty\|_{M^*(\overline{\varphi}_X : \Omega)} \le C_X\|Sf\|_{\Lambda(\overline{\varphi}_X : \Omega)}$$

という形のものであって，残念ながら (3.3) の形の不等式が導かれないからである．一方，$\mathcal{Q}$ の $M^*(\overline{\varphi}_X : I)$ からそれ自身への作用素としての有界性が (3.3) から導かれたのと同様に，$\mathcal{Q}$ の $\Lambda(\overline{\varphi}_X : I)$ から $M^*(\overline{\varphi}_X : I)$ への作用素としての有界性が，上記の第 2 の不等式から導かれる．では「$\mathcal{Q}$ の $\Lambda(\overline{\varphi}_X : I)$ から $M^*(\overline{\varphi}_X : I)$ への作用素としての有界性から，$p_X > 0$ を導くことができないか」という疑問が湧く．この疑問に対する肯定的な結果がえ得られたことが，難しかった定理 3.1 を得ることに繋がった．

命題 3.3. $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ を準凹関数とする．このとき．次の (i)–(iv) は互いに同値である:

(i) $\mathcal{Q}$ の $\Lambda(\varphi : I)$ へ制限は，$\Lambda(\varphi : I)$ から $M^*(\varphi : I)$ への有界線形作用素である．
(ii) $p_\varphi > 0$.

$\Lambda(\varphi : I) \hookrightarrow M(\varphi : I)$ であるから，命題 3.3 の (i) は命題 3.2 の (ii) より弱い条件である．結果的に命題 3.2 の中に，見かけ上，より弱い同値な条件が付け加えられたことになる．その意味で，命題 3.3 は命題 3.2 の改良になっている．

前述のように，$\mathcal{Q}$ の $\Lambda(\overline{\varphi}_X : I)$ から $M^*(\overline{\varphi}_X : I)$ への有界作用素であることを示すことは可能であるから，$\overline{\varphi}_X$ に対して命題 3.3 を適用することにより，(3.1) の 2 つの不等式から $p_X > 0$ を導かれることになる．

参考文献

[1] C. Bennett and R. Sharpley, Interpolation of operators. Pure and Applied Mathematics, 129, Academic Press, Boston, 1988.

[2] D. Burkholder, *Martingale transforms*, Ann. Math. Statist. **37** (1966), 1494–1504.

[3] D. W. Boyd, *Indices of function spaces and their relationship to interpolation*. Canad. J. Math. **21** (1969), 1245–1254.

[4] J. L. Doob, Stochastic processes, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1953.

[5] M. Kikuchi, *A remark on Doob's inequality in Banach function spaces*, Math. J. Toyama Univ. **21** (1998), 101–109.

[6] M. Kikuchi, *Characterization of Banach function spaces that preserve the Burkholder square-function inequality*, Illinois J. Math. **47** (2003), 867–882.

[7] M. Kikuchi, *Uniform boundedness of conditional expectation operators on a Banach function space*, Math. Inequal. Appl. **16** (2013), 483–499.

[8] M. kikuchi, *On some martingale inequalities for mean oscillations in weak spaces*, Ric. Mat. **64** (2015), 137–165.

[9] M. Kikuchi, *On Doob's inequality and Burkholder's inequality in weak spaces*, Collect. Math. **67** (2016), 461–483.

[10] M. Kikuchi, *On martingale transform inequalities in certain quasi-Banach function spaces*, Boll. Unione Mat. Ital. **12** (2019), 485–514.

[11] H. König, Eigenvalue distribution of compact operators, Birkhäuser Verlag, Basel, 1986.

[12] E. M. Semenov, *Embedding theorems for Banach spaces of measurable functions*, Sov. Math., Dokl. 5 (1964), 831–834.