非線形積分が定める関数空間の完備性

信州大学工学部　河邊　淳
Jun Kawabe
Faculty of Engineering, Shinshu University

1　はじめに

L^p 空間や Lorentz 空間 $L^{p,q}$ などの関数空間がどんな位相的性質や幾何的性質をもつかを調べることは，関数解析学や実解析学における主要な研究課題である．また，その成果は，フーリエ解析，積分作用素，偏微分方程式，補間空間論，確率論，制御理論など様々な分野に応用されている．これらの関数空間の多くは Lebesgue 積分を用いて定義されており，測度の加法性と積分の線形性が理論を展開するうえで重要な役割を果たしている．

近年，要素間の相互作用の影響が無視できない現象の解明を目的として，非加法的測度と非線形積分の研究が注目されている．非加法的測度は，測度の σ-加法性をより弱い単調増加性に置き換えた集合関数であり，その積算概念である非線形積分とともに，期待効用理論，決定理論，ゲーム理論，不完全な情報のもとでの数理経済学などの分野に多くの応用をもつ [4, 5, 6, 15, 19]．それゆえ，非加法的測度と非線形積分を用いて従来の関数空間を再構成し，その性質を調べることは，数学的興味にとどまらず，関数空間論の応用範囲を格段に広げることができる点で重要である．

この小論では，Choquet 積分や Shilkret 積分を用いて Lorentz 空間や弱 Lorentz 空間を再定義し，その完備性と準距離付け可能性について得られた結果を紹介する．

2　非加法的測度と非線形積分

以下では，$(X,\mathcal{A})$ は可測空間とする．また，$\mathbb{N}$ は自然数全体，$\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$ は実数全体，$\overline{\mathbb{R}}:=[-\infty,\infty]$ は通常の全順序構造と代数構造をもつ拡大実数体とし，積分論を展開する際に便利な規約 $(\pm\infty)\cdot 0=0\cdot(\pm\infty)=0$ も仮定する．また，$\inf\emptyset=\infty$ と規約する．

拡大実数 $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$ に対して，$\max\{a,b\}$ を $a\vee b$ で，$\min\{a,b\}$ を $a\wedge b$ で表し，関数 $f,g\colon X\to\overline{\mathbb{R}}$ の上限関数 $f\vee g$，下限関数 $f\wedge g$ を，各 $x\in X$ に対して

$$(f\vee g)(x):=f(x)\vee g(x),\quad (f\wedge g)(x):=f(x)\wedge g(x)$$

で定める．X 上で定義された $\mathcal{A}$-可測な関数 $f\colon X\to\mathbb{R}$ の全体を $\mathcal{F}(X)$ で表し, $\mathcal{F}^+(X):=\{f\in\mathcal{F}(X)\colon f\geq 0\}$ とおく．集合 A の定義関数を χ_A，補集合を $A^c:=X\setminus A$ で表す．また，X の部分集合の全体を 2^X で表す.

定義 1　集合関数 $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,\infty]$ は次の 2 つの条件

(i) $\mu(\emptyset) = 0$　(下方有界性)

(ii) $A \subset B$ ならば $\mu(A) \le \mu(B)$　(単調性)

を満たすとき**非加法的測度**といい，その全体を $\mathcal{M}(X)$ で表す．

非加法的測度は測度の加法性を単調増加性に置き換えた集合関数であり，単調測度，ファジィ測度，容量ということもある．

次に紹介する非線形積分は非加法的測度論の応用領域でよく利用され，どれも被積分関数 f の非加法的測度 μ に関する**減少分布関数**

$$G_\mu(f) := \mu(\{f > t\}), \quad t \in \mathbb{R}$$

を用いて定義されているので，総称して**分布型非線形積分**とよばれる．

定義 2　$(\mu, f) \in \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X)$ とする．

(1) **Choquet 積分** [2, 18]:　$\mathrm{Ch}(\mu, f) := \displaystyle\int_0^\infty \mu(\{f > t\})\,dt$

ただし，右辺の積分は Lebesgue 積分または広義 Riemann 積分である．

(2) **Shilkret 積分** [20, 25]:　$\mathrm{Sh}(\mu, f) := \displaystyle\sup_{t\in[0,\infty)} t \cdot \mu(\{f > t\})$

注意 1　μ が σ-加法的であれば，Choquet 積分は抽象 Lebesgue 積分と一致する．

上記以外の分布型非線形積分としては，Sugeno 積分 [17, 22] や Šipoš 積分 [21] が重要である．非加法的測度と非線形積分に関する詳細な情報は [3, 9, 16, 24] などを見よ．

3　Choquet-Lorentz 空間と Shilkret 空間

この章では，Choquet 積分と Shilkret 積分を用いて，従来の Lorentz 空間と弱 Lorentz 空間 (弱 L^p 空間ともいう) を非加法的測度論の枠組みで再構成する．そのために，まずノルムの概念を一般化する．

定義 3　X は実線形空間とする．関数 $\|\cdot\|\colon X \to [0,\infty]$ は $\|0\| = 0$ を満たすとき**ゲージ**といい，$(X, \|\cdot\|)$ を**ゲージ空間**という．ゲージ $\|\cdot\|$ は

- 任意の $x \in X$ に対して $\|x\| < \infty$ のとき**有限**
- 任意の $x \in X$ に対して，$\|x\| = 0$ ならば $x = 0$ を満たすとき**点を分離する**
- 任意の $x \in X$ と任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して，$\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ が成り立つとき**斉次的**
- 定数 $K \ge 1$ が存在して，任意の $x, y \in X$ に対して

$$\|x + y\| \le K(\|x\| + \|y\|)$$

が成り立つとき**準三角不等式**を満たす，$K=1$ のときは**三角不等式**を満たすという．また，ゲージ空間 $(X, \|\cdot\|)$ は，そのゲージ $\|\cdot\|$ が

- 有限かつ斉次的で準三角不等式を満たすとき**準半ノルム空間**，さらに点を分離すれば**準ノルム空間**
- 有限かつ斉次的で三角不等式を満たすとき**半ノルム空間**，さらに点を分離すれば**ノルム空間**

という．

以下では，ゲージ空間の完備性や準完備性の定義と，定義に必要な用語を準備する．

定義 4　$(X, \|\cdot\|)$ はゲージ空間とする．$A \subset X$，$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は X の点列とする．

(1) $\sup_{x\in A}\|x\| < \infty$ のとき，A は**有界**という．

(2) $\lim_{m,n\to\infty}\|x_m - x_n\| = 0$，すなわち，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対して，$m, n \geq n_0$ ならば $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ が成り立つとき，$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は**基本列**という．

(3) 任意の $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ に対して，$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が有界かつ基本列ならば，$x \in X$ が存在して，$\|x_n - x\| \to 0$ が成り立つとき，A は**準完備**という．

(4) 任意の $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ に対して，$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が基本列ならば，$x \in X$ が存在して，$\|x_n - x\| \to 0$ が成り立つとき，A は**完備**という．

注意 2　ゲージは一般には三角不等式や準三角不等式を満たさないので，基本列は必ずしも有界とは限らない．また，完備ならば準完備である．

さて，$0 < p < \infty$，$0 < q \leq \infty$ は定数，$\mu \in \mathcal{M}(X)$ とする．記述を簡単にするために，非加法的測度 μ は**零加法的**，すなわち，任意の $A, B \in \mathcal{A}$ に対して，$\mu(B) = 0$ ならば $\mu(A \cup B) = \mu(A)$ が成り立つとする．

各 $f \in \mathcal{F}(X)$ に対して

$$\|f\|_{p,q} := \begin{cases} \mathrm{Ch}(\mu^{q/p}, |f|^q)^{1/q} = \left(\displaystyle\int_0^\infty \mu(\{|f|^q > t\})^{q/p} dt\right)^{1/q} & \text{if } 0 < q < \infty \\ \mathrm{Sh}(\mu^{1/p}, |f|) = \displaystyle\sup_{t\in[0,\infty)} t \cdot \mu(\{|f| > t\})^{1/p} & \text{if } q = \infty \end{cases}$$

とおくと，$\|\cdot\|_{p,q} \colon \mathcal{F}(X) \to [0, \infty]$ は線形空間 $\mathcal{F}(X)$ 上の斉次的ゲージとなる．また，任意の $f, g \in \mathcal{F}(X)$ に対して

$$f \sim g \overset{\triangle}{\Longleftrightarrow} \|f - q\|_{p,q} = 0$$

で $\mathcal{F}(X)$ に同値関係が導入できるので，$f \in \mathcal{F}(X)$ の同値類を $[f]$ で表す．このとき，同値類の和とスカラー倍や，ゲージの同値類への拡張を，同値類の代表元の選び方によらずに，

$$\text{和} \quad [f]+[g] := [f+g], \quad \text{スカラー倍} \quad \alpha[f] := [\alpha f]$$

$$\text{ゲージの拡張} \quad \|[f]\|_{p,q} := \|f\|_{p,q}$$

でうまく定義でき，$\mathcal{F}(X)$ を同値類で割った商空間

$$F(X) := \{[f] \colon f \in \mathcal{F}(X)\}$$

は，点を分離する斉次的ゲージをもつ実線形空間となる．そこで，従来の Lorentz 空間と弱 Lorentz 空間の非加法的測度論の枠組みでの一般化を

$$\mathcal{L}^{p,q}(\mu) := \{f \in \mathcal{F}(X) \colon \|f\|_{p,q} < \infty\}$$

$$L^{p,q}(\mu) := \{[f] \colon f \in \mathcal{L}^{p,q}(\mu)\}$$

で定め，$0 < q < \infty$ のときは **Choquet-Lorentz 空間** (略して **CL 空間**)，$q = \infty$ のときは **Shilkret 空間** (略して **Sh 空間**) とよぶ.

注意 3　(1) μ は**零連続**，すなわち，任意の $\{N_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ と任意の $N \in \mathcal{A}$ に対して，$N_n \uparrow N$ かつ $\mu(N_n) = 0 \ (n = 1, 2, \dots)$ ならば $\mu(N) = 0$ が成り立つとする．このとき，$\|f\|_{p,q} = 0$ と $f = 0$ μ-a.e. は同値である．

(2) 実際には，μ が零加法的な場合に限り，可測関数空間 $\mathcal{F}(X)$ に上記の方法で同値類を導入して，点を分離する斉次的ゲージをもつ商空間 $F(X)$ を構成できる．

4　CL 空間と Sh 空間の準ノルム化

CL 空間と Sh 空間を準ノルム化するために非加法的測度 μ に課すべき条件を考察する．

定義 5　$\mu \in \mathcal{M}(X)$ とする．定数 $K \geq 1$ が存在して，任意の $A, B \in \mathcal{A}$ に対して，$A \cap B = \emptyset$ ならば

$$\mu(A \cup B) \leq K(\mu(A) + \mu(B))$$

が成り立つとき，μ は**準劣加法的**，特に $K = 1$ のときは**劣加法的**という．

定理 1　$\mu \in \mathcal{M}(X)$ は零加法的とする．次の 3 つの主張は同値.

(i) μ は準劣加法的.

(ii) $(\mathcal{L}^{p,q}(\mu), \|\cdot\|_{p,q})$ は準半ノルム空間.

(iii) $(L^{p,q}(\mu), \|\cdot\|_{p,q})$ は準ノルム空間.

注意 4　(1) μ が劣加法的であっても，$\|\cdot\|_{p,q}$ が三角不等式を満たすとは限らない．ゲージ $\|\cdot\|_{p,q}$ が三角不等式を満たすための必要十分条件は以下の通りである [1, Theorem 5.1].

- $1 \leq p, q < \infty$ とする．このとき，$\|\cdot\|_{p,q}$ が三角不等式を満たすための必要十分条件は，$\mu^{q/p}$ が**劣モジュラー**，すなわち，任意の $A, B \in \mathcal{A}$ に対して
$$\mu^{q/p}(A \cup B) + \mu^{q/p}(A \cap B) \leq \mu^{q/p}(A) + \mu^{q/p}(B)$$
が成り立つことである．
- $1 \leq p < \infty$ とする．このとき，$\|\cdot\|_{p,\infty}$ が三角不等式を満たすための必要十分条件は，μ が **F-加法的**，すなわち，任意の $A, B \in \mathcal{A}$ に対して，$A \cap B = \emptyset$ ならば
$$\mu(A \cup B) = \mu(A) \vee \mu(B)$$
が成り立つことである．

(2) 通常の Lorentz 空間 $L^{p,q}$ の場合は，$1 < p < \infty$ かつ $1 \leq q \leq \infty$ であれば，準ノルム $\|\cdot\|_{p,q}$ と同値なノルムを定義することができる．しかし，CL 空間や Sh 空間でも同様の結果が成り立つかは不明である．

5　CL 空間と Sh 空間の完備性

この章では CL 空間と Sh 空間の完備性について議論する．通常の Lorentz 空間や弱 Lorentz 空間とは異なり，CL 空間上のゲージ $\|\cdot\|_{p,q}$ や Sh 空間上のゲージ $\|\cdot\|_{p,\infty}$ は一般には準三角不等式すら満たさない．また，測度の非加法性や，Choquet 積分と Shilkret 積分の非線形性により，完備性の議論に従来の測度論や積分論の結果を直接用いることはできない．そこで，CL 空間と Sh 空間の完備性を次の手順で示す．

- Riesz の完備性定理 (測度収束に関して基本列となる可測関数列は概一様収束する部分列をもつ) を非加法的測度の場合に拡張し，CL 空間や Sh 空間の基本列の収束先となる関数を見出す．
- 概一様収束する可測関数列のべき乗に関する Fatou の補題を非加法的測度に対して定式化し，CL 空間や Sh 空間の基本列のゲージ収束性の証明に用いる．

5.1　Riesz の完備性定理の非加法化

まず Riesz の完備性定理を非加法化する．議論を始める前に，可測関数列に対するいくつかの収束概念をまとめておく．

定義 6　$\mu \in \mathcal{M}(X)$ とする．$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}(X)$ は関数列，$f \in \mathcal{F}(X)$ とする．

(1) μ-零集合 N が存在して，任意の $x \notin N$ に対して $f_n(x) \to f(x)$ が成り立つとき，

f_n は f に **μ-概収束**するといい，$f_n \to f$ μ-a.e. とかく．

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$E_\varepsilon \in \mathcal{A}$ が存在して，$\mu(E_\varepsilon) < \varepsilon$ かつ $\sup_{x \notin E_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ が成り立つとき，f_n は f に **μ-概一様収束**するといい，$f_n \to f$ μ-a.u. とかく．

(3) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\lim_{n\to\infty} \mu(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) = 0$ が成り立つとき，f_n は f に **μ-測度収束**するといい，$f_n \xrightarrow{\mu} f$ とかく．

(4) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\lim_{m,n\to\infty} \mu(\{|f_m - f_n| > \varepsilon\}) = 0$ が成り立つとき，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は **μ-測度収束に関して基本列**であるという．

注意 5　通常の測度の場合と同様に，非加法的測度 μ に対しても，μ-概一様収束する可測関数列は μ-概収束かつ μ-測度収束する．また，次の事実が知られている．

- μ に対して **Lebesgue の定理** (μ-概収束する可測関数列は μ-測度収束する) が成立する $\Leftrightarrow$ μ は**強順序連続**，すなわち，任意の $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ と任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して，$A_n \downarrow A$ かつ $\mu(A) = 0$ ならば $\mu(A_n) \to 0$ が成り立つ ([10, Theorem 1])．
- μ に対して **Riesz の定理** (μ-測度収束する可測関数列は μ-概収束する部分列をもつ) が成立する $\Leftrightarrow$ μ は**性質 (S)** を満たす，すなわち，任意の $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ に対して，$\mu(A_n) \to 0$ ならば，部分列 $\{A_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ が存在して，$\mu(\bigcap_{i=1}^\infty \bigcup_{k=i}^\infty A_{n_k}) = 0$ が成り立つ ([23, Theorem 2.1]，[12, Theorem 5.17]．
- μ に対して **Egoroff の定理** (μ-概収束する可測関数列は μ-概一様収束する) が成立する $\Leftrightarrow$ μ は **Egoroff 条件**を満たす，すなわち，次の 2 つの条件

  (i) 任意の $m, n, m', n' \in \mathbb{N}$ に対して，$m \geq m'$ かつ $n \leq n'$ ならば $A_{m,n} \supset A_{m',n'}$

  (ii) $\mu(\bigcup_{m=1}^\infty \bigcap_{n=1}^\infty A_{m,n}) = 0$

  を満たす 2 重添え字集合列 $\{A_{m,n}\}_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} \subset \mathcal{A}$ に対して，

  $$\inf_{\theta\in\Theta} \mu\left(\bigcup_{m=1}^\infty A_{m,\theta(m)}\right) = 0$$

  が成り立つ．ただし，Θ は $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への写像全体を表す ([11, Theorem 1]，[14, Proposition 1])．
- μ-測度収束するどんな可測関数列も μ-概一様収束する部分列をもつ $\Leftrightarrow$ μ は**性質 ($\mathbf{S_1}$)** を満たす，すなわち，任意の $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ に対して，$\mu(A_n) \to 0$ ならば，部分列 $\{A_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ が存在して，$\lim_{i\to\infty} \mu(\bigcup_{k=i}^\infty A_{n_k}) = 0$ が成り立つ ([13, Theorem 4]，[12, Theorem 5.24])．

測度論における Riesz の完備性定理は，測度収束に関して基本列となる可測関数列は常

に概一様収束する部分列をもつことを主張しており，測度収束が定める距離位相に関して可測関数空間が完備であることを示す際に用いられる．実際，[7, Theorem 22.D] によれば，μ が σ-加法的ならば Riesz の完備性定理が成り立つので，測度収束に関して基本列となる $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}(X)$ に対して，部分列 $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ と $f \in \mathcal{F}(X)$ が存在して，$f_{n_k} \to f$ μ-a.u.，それゆえ $f_{n_k} \xrightarrow{\mu} f$ を得る．よって，次の定理 2 より $f_n \xrightarrow{\mu} f$ となり，$\mathcal{F}(X)$ は測度収束が定める距離位相に関して完備であることが示せる．

定理 2 ([8, Theorem 2])　$\mu \in \mathcal{M}(X)$ は擬距離生成的とする．$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}(X)$ は測度収束に関して基本列で，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列 $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ と $f \in \mathcal{F}(X)$ が存在して，$f_{n_k} \xrightarrow{\mu} f$ とする．このとき $f_n \xrightarrow{\mu} f$ となる．

以下では，非加法的測度に対しても Riesz の完備性定理が成り立つために，測度に課すべき条件を考察する．考察のヒントとなるのが次の結果であり，測度収束する可測関数列が常に測度収束に関して基本列となるための必要十分条件を与えている．

定理 3 ([8, Theorem 3])　$\mu \in \mathcal{M}(X)$ とする．次の 2 つの主張は同値．

(i) μ は**擬距離生成的**，すなわち，任意の $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ と任意の $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ に対して，$\mu(A_n) \vee \mu(B_n) \to 0$ ならば $\mu(A_n \cup B_n) \to 0$ が成り立つ．

(ii) μ-測度収束する $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}(X)$ は μ-測度収束に関して基本列である．

注意 6　非加法的測度の特性に関して次が成り立つ．

- 加法的 $\Rightarrow$ 劣モジュラー $\Rightarrow$ 劣加法的 $\Rightarrow$ 準劣加法的 $\Rightarrow$ 擬距離生成的 $\Rightarrow$ 弱零加法的
- 上から連続 $\Rightarrow$ 強順序連続 $\Rightarrow$ 順序連続;　連続 $\Rightarrow$ Egoroff 条件 $\Rightarrow$ 強順序連続
- 下から連続 $\Rightarrow$ 零連続;　性質 (S_1) $\Rightarrow$ 性質 (S) $\Rightarrow$ 零連続

定理 2 と定理 3 を眺めると，Riesz の完備性定理も測度に擬距離生成性を仮定すれば成立することが予想される．しかし，第 6 章の例 1 により，擬距離生成性だけでは，Riesz の完備性定理が成立しないことがわかる．そこで，非加法的測度に課すべき新たな特性を提案する．

定義 7　$\mu \in \mathcal{M}(X)$ とする．任意の $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ に対して，

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{l\in\mathbb{N}} \mu\left(\bigcup_{n=k}^{k+l} E_n\right) = 0 \text{ ならば } \lim_{k\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n\right) = 0$$

が成り立つとき，μ は**完備生成的**という．

完備生成性を用いれば，Riesz の完備性定理を次のように非加法化できる．

定理 4　$\mu \in \mathcal{M}(X)$ は擬距離生成的かつ完備生成的とする．このとき，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}(X)$ が μ-測度収束に関して基本列ならば，$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の部分列 $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ と $f \in \mathcal{F}(X)$ が存在して，$f_{n_k} \to f$ μ-a.u. となる．

定理 2，定理 3，定理 4 より次の系が得られる．

系 1　$\mu \in \mathcal{M}(X)$ は擬距離生成的かつ完備生成的とする．次の 2 つの主張は同値．

(i) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は μ-測度収束に関して基本列．

(ii) $f \in \mathcal{F}(X)$ が存在して，$f_n \xrightarrow{\mu} f$.

それゆえ，$\mathcal{F}(X)$ は μ-測度収束に関して完備となる．

注意 7　系 1 の主張 (i) と (ii) が同値であれば，定理 3 より μ は擬距離生成的となる．しかし，μ が完備生成的かどうかは不明である．

定理 4 や系 1 で仮定した完備生成性は一見すると複雑そうであるが，2 つの条件

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{l\in\mathbb{N}} \mu\left(\bigcup_{n=k}^{k+l} E_n\right) = 0 \quad と \quad \lim_{k\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n\right) = 0$$

の違いはごく僅かであり，μ が**下から連続**，すなわち，任意の $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ と任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して，$A_n \uparrow A$ ならば $\mu(A_n) \to \mu(A)$ が成り立てば，2 つの条件は一致する．それゆえ，下から連続な非加法的測度は完備生成的である．下から連続とは限らないが，擬距離生成的かつ完備生成的な非加法的測度の例は下記の通りである．

命題 1　$\mu \in \mathcal{M}(X)$ は次の (i)，(ii) のいずれかの条件を満たせば擬距離生成的かつ完備生成的である．

(i) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ が存在して，任意の $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ に対して $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n) < \delta$ ならば $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) < \varepsilon$ が成り立つ．

(ii) $\mu = \varphi(\nu)$ と表される．ただし，$\nu \in \mathcal{M}(X)$ は擬距離生成的かつ下から連続であり，$\varphi\colon [0,\infty] \to [0,\infty]$ は $\varphi(0) = 0$ を満たす単調増加関数で，原点の近傍で連続かつ狭義単調増加とする．

5.2　Fatou の補題の非加法化

CL 空間や Sh 空間のゲージ $\|\cdot\|_{p,q}$ に関する基本列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は測度収束に関して基本列になるので，Riesz の完備性定理の非加法化 (定理 4) より，部分列 $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ と $f \in \mathcal{F}(X)$ が存在して，$f_{n_k} \to f$ μ-a.u. となる．よって，CL 空間や Sh 空間の完備性を示すには，概一様収束する関数列に関する Fatou の補題を非加法的測度に対して新たに定式化して，

- $\|f_n - f\|_{p,q} \to 0$
- $f \in \mathcal{L}^{p,q}(\mu)$

が成り立つことを示せばよい．

定理 5　$\mu \in \mathcal{M}(X)$ とする．$0 < p < \infty$ は定数とする．次の主張は同値である．

(i) μ は**下から単調自己連続**，すなわち，任意の $A \in \mathcal{A}$ と任意の $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ に対して，$\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が単調減少で $\mu(B_n) \to 0$ ならば $\mu(A \setminus B_n) \to \mu(A)$ が成り立つ．

(ii) 任意の $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}^+(X)$ と任意の $f \in \mathcal{F}^+(X)$ に対して，$f_n \to f$ μ-a.u. ならば，$\mathrm{Ch}(\mu, f^p) \le \liminf_{n\to\infty} \mathrm{Ch}(\mu, f_n^p)$ が成り立つ．

(iii) 任意の $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}^+(X)$ と任意の $f \in \mathcal{F}^+(X)$ に対して，$f_n \to f$ μ-a.u. ならば，$\mathrm{Sh}(\mu, f^p) \le \liminf_{n\to\infty} \mathrm{Sh}(\mu, f_n^p)$ が成り立つ．

5.3　CL 空間と Sh 空間の準完備性と完備性

CL 空間と Sh 空間の完備性は定理 1，定理 4，定理 5 を用いて示せる．

定理 6　$0 < p < \infty$，$0 < q \le \infty$ とする．$\mu \in \mathcal{M}(X)$ とする．

(1) μ が擬距離生成的かつ完備生成的かつ下から単調自己連続ならば，$(\mathcal{L}^{p,q}(\mu), \|\cdot\|_{p,q})$ は準完備である．すなわち，$\mathcal{L}^{p,q}(\mu)$ の任意の $\|\cdot\|_{p,q}$-有界な $\|\cdot\|_{p,q}$-基本列は $\mathcal{L}^{p,q}(\mu)$ の要素に $\|\cdot\|_{p,q}$-収束する．

(2) μ が準劣加法的かつ完備生成的かつ下から単調自己連続ならば，$(\mathcal{L}^{p,q}(\mu), \|\cdot\|_{p,q})$ は完備準半ノルム空間，$(L^{p,q}(\mu), \|\cdot\|_{p,q})$ は完備準ノルム空間となる．

6　反例

次の例は，μ が劣加法性という非常に強い擬加法的性質を満たしていたとしても，Riesz の完備性定理の非加法化 (定理 4)，測度収束に関する可測関数空間 $\mathcal{F}(X)$ の完備性 (系 1)，CL 空間や Sh 空間の完備性 (定理 6) は，非加法的測度が完備生成的でなければ成立しない場合があることを示している．

例 1　$X := \mathbb{N}$，$\mathcal{A} := 2^X$ とする．各 $A \in \mathcal{A}$ に対して

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & \text{if } A = \emptyset \\ \sum_{i\in A} 1/2^i & \text{if } A \neq \emptyset \text{ かつ } A \text{ は有限集合} \\ 1 + \sum_{i\in A} 1/2^i & \text{if } A \text{ は無限集合} \end{cases}$$

で非加法的測度 $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,2]$ を定める．

(1) μ は劣加法的．それゆえ，準劣加法的，零加法的，擬距離生成的，一様自己連続，自己連続，単調自己連続である．

(2) μ は性質 (S) を満たす．それゆえ，零連続である．

(3) μ は完備生成的でない．それゆえ，下から連続でない．

(4) μ は順序連続でない．それゆえ，強順序連続でも上から連続でもない．

(5) μ は性質 (S_1) を満たさない．

(6) $0 < p < \infty$，$0 < q \leq \infty$ は定数とする．$A_n := \{1, 2, \ldots, n\}$，$f_n := \chi_{A_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ とおいて，関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}(X)$ を定めると，次が成り立つ．

 (i) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $f_n \in \mathcal{F}(X)$ かつ $f_n \in \mathcal{L}^{p,q}(\mu)$.

 (ii) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は測度収束に関して基本列であるが，$\mathcal{F}(X)$ の要素に測度収束しない．それゆえ，$\mathcal{F}(X)$ は測度収束に関して完備でない．

 (iii) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $\|\cdot\|_{p,q}$-有界な $\|\cdot\|_{p,q}$-基本列であるが，$\mathcal{L}^{p,q}(\mu)$ の要素に $\|\cdot\|_{p,q}$-収束しない．それゆえ，$(\mathcal{L}^{p,q}(\mu), \|\cdot\|_{p,q})$ は準完備でも完備でもない．

参考文献

[1] J. Cerdà, Lorents capacity spaces, Contemp. Math. **445** (2007) 49–55.

[2] G. Choquet, Theory of capacities, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **5** (1953–54) 131–295.

[3] D. Denneberg, Non-Additive Measure and Integral, second edition, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

[4] D. Dubois, H. Prade, Possibility Theory, Plenum Press, New York, 1988.

[5] M. Grabisch, T. Murofushi and M. Sugeno (eds.), Fuzzy Measures and Integrals, Theory and Applications, Physica-Verlag, Heidelberg, 2000.

[6] M. Grabisch, Set functions, Games and Capacities in Decision Making, Springer, Switzerland, 2016.

[7] P. R. Halmos, Measure Theory, Springer, New York, 1974.

[8] Q. Jiang, H. Suzuki, Z. Wang, G.J. Klir, Property (p.g.p.) of fuzzy measures and convergence in measure, J. Fuzzy Math. **3** (1995) 699–710.

[9] J. Kawabe, Nonadditive measure and nonlinear integral, Sugaku **68** (2016) 266–292 (in Japanese).

[10] J. Li, Order continuous of monotone set function and convergence of measurable funcitons sequence, Appl. Math. Comp. **135** (2003) 211–218.

[11] J. Li, A further investigation for Egoroff's theorem with respect to monotone set functions, kybernetica **39** (2003) 755–760.

[12] J. Li, R. Mesiar, E. Pap, E.P. Klement, Convergence theorems for monotone measures, Fuzzy Sets Syst. **281** (2015) 103–127.

[13] Y. Liu, B. Liu, The relationship between structural characteristics of fuzzy measure and convergences of sequences of measurable functions, Fuzzy Sets Syst. **120** (2001) 511–516.

[14] T. Murofushi, K. Uchino, S. Asahina, Conditions for Egoroff's theorem in non-additive measure theory, Fuzzy Sets Syst. **146** (2004) 135–146.

[15] K. G. Nishimura and H. Ozaki, Economics of Pessimism and Optimism, Springer, Japan, 2017.

[16] E. Pap, Null-Additive Set Functions, Kluwer Academic Publishers, Bratislava, 1995.

[17] D. Ralescu and G. Adams, The fuzzy integral, J. Math. Anal. Appl. **75** (1980) 562–570.

[18] D. Schmeidler, Integral representation without additivity, Proc. Amer. Math. Soc. **97** (1986) 255-261.

[19] G. Shafer, A Mathematical Theory of Evidence, Princeton University Press, Princeton, 1976.

[20] N. Shilkret, Maxitive measure and integration, Indag. Math. **33** (1971) 109–116.

[21] J. Šipoš, Integral with respect to a pre-measure, Math. Slovaca **29** (1979) 141–155.

[22] M. Sugeno, Theory of Fuzzy Integrals and its Applications, Doctoral Thesis, Tokyo Inst. of Tech., Tokyo, 1974.

[23] Q. Sun, Property (S) of fuzzy measures and Riesz's theorem, Fuzzy Sets Syst. **62** (1994) 117–119.

[24] Z. Wang and G. J. Klir, Generalized Measure Theory, Springer, New York, 2009.

[25] R. H. Zhao, (N) fuzzy integral, J. Math. Res. Exposition **1** (1981) 55–72 (in Chinese).

Jun Kawabe
Division of Mathematics and Physics
Faculty of Engineering
Shinshu University
4-17-1 Wakasato, Nagano 380-8553, JAPAN
jkawabe@shinshu-u.ac.jp