ラドン空間の新しい特徴付けについて

斎藤 吉助 (新潟大学)
田中 亮太朗 (東京理科大学)
小室 直人 (北海道教育大学)

1 導入

本論文では、主に [12] の内容を解説する。以下では、ノルム空間やバナッハ空間は実数体上で考えているものとする。

バナッハ空間の幾何学の研究においては、一般化された直交性の概念がしばしば重要な役割を果たす。特に、接超平面や接汎関数、最短距離等の幾何的概念と関係が深い Birkhoff の直交性は、1930 年代から多くの数学者によって研究され、興味深い結果を生み出し続けてきた。

定義 1.1 (Birkhoff 直交性 [3]). X をバナッハ空間とし、$x, y \in X$ とする。そのとき、x が y に Birkhoff 直交するとは、$\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ がすべての $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して成立することをいい、$x \perp_B y$ で表される。

Birkhoff 直交性は、1935 年に Birkhoff [3] によって導入され、後に James [8, 9] により種々の重要な性質が研究されたことから、Birkhoff-James 直交性などとも呼ばれている。また、一般化された直交性の名の通り、ヒルベルト空間においては、Birkhoff 直交性 $\perp_B$ は内積から定まる通常の直交性 $\perp$ と一致している。

2 つの直交性 $\perp$ と $\perp_B$ との類似点として、次が挙げられる。

(i) $x \perp_B y$ ならば、$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して $\alpha x \perp_B \beta y$ が成立する。

(ii) $x \perp_B x$ ならば、$x = 0$ が成立する。

(iii) すべての $x, y \in X$ に対して、$x \perp_B (ax + y)$ となる $a \in \mathbb{R}$ が存在する。

一方で、$\perp$ と $\perp_B$ とは対称性の面では大きく異なる。実際、次の定理が知られている。

定理 (James [9]). X をバナッハ空間とし、$\dim X \geq 3$ とする。そのとき、$\perp_B$ が X で対称である (つまり、$x \perp_B y$ ならば $y \perp_B x$ が成り立つ) ことと、X がヒルベルト空間であることとは同値である。

ここで、「$\dim X \geq 3$」という仮定は本質的であることに注意されたい。実は、$\dim X = 2$ の場合には、$\perp_B$ が対称であるような空間は無数に存在していて、ラドン空間とはそのような空間につけられた名前である。

定義 1.2 (ラドン空間)**.** X をバナッハ空間とし、$\dim X = 2$ とする。そのとき、X がラドン空間であるとは、$x, y \in X$ かつ $x \perp_B y$ ならば、$y \perp_B x$ となることを言う。

Birkhoff 直交性の (非) 対称性を理解する上でラドン空間の解析は欠かせないが、そのためには、どのような空間がラドン空間となるのかを知らねばならない。実は、ラドン空間の特徴付けは古くから研究されており (例えば、Martini-Swanepoel [13] の解説が詳しい) 、よく目にするものでは「単位球の境界がある種の双対関係にある曲線のペアである」等が知られている。しかし、実際にノルム空間の中身を見ながら解析しようすると、曲線を曲線のまま扱うのでは少々手間がかかる。そこで、本論文では、ラドン空間解析のより良い出発点として、absolute norm [4, 20] のペアにより定まる Day-James 空間 [18] を用いた、ラドン空間のより直接的な特徴付けを紹介したい。

2 Day の特徴付け

本論文で述べられるラドン空間の特徴付けは、Day [6] による方法の現代的な再構成と見ることもできる。ここでは、本論文の主結果を述べるに先立って、まずは Day によるラドン空間の構成法を再訪し、その根本にあるアイデアを探る。

まず、一般の 2 次元ノルム空間を 4 つ象限へと分割する合理的な方法を一つ与える。

補題 2.1 (Day [7])**.** X を 2 次元ノルム空間とする。そのとき、$x, y \in X$ で、$\|x\| = \|y\| = 1$、$x \perp_B y$ かつ $y \perp_B x$ を満たすものが存在する。

X を 2 次元ノルム空間とし、x, y を補題 2.1 のようにとる。$\mathbb{R}^2$ 上のノルムを $\|(a,b)\| = \|ax + by\|$ により定めると、$(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ と X とは等距離同型で、x は $e_1 = (1,0)$ に、y は $e_2 = (0,1)$ にそれぞれ対応する。また、

$$\max\{|a|, |b|\} \leq \|(a,b)\| \leq |a| + |b|$$

を満たしている。つまり、対応 $X \ni ax + by \leftrightarrow (a,b) \in \mathbb{R}^2$ は、ある程度質の良い X の象限分割を与える。

また、ここで、

$$\|(c,d)\|_* = \sup\{ac + bd : (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \|(a,b)\| \leq 1\}$$

と定めれば、$\|\cdot\|_*$ は $\|\cdot\|$ の双対ノルムと見ることができる。与えられたノルム（と等距離な）$\|\cdot\|$ とその双対 $\|\cdot\|_*$ をうまく用いることで、ラドン空間を構成することができる。

命題 2.2 (Day [6])**.** X を 2 次元ノルム空間とし、上の議論の通りに $\mathbb{R}^2$ のノルム $\|\cdot\|$ とその双対 $\|\cdot\|_*$ をとる。そのとき、$\mathbb{R}^2$ 上のノルムを

$$\|(a,b)\|_{X,R} = \begin{cases} \|(a,b)\| & (ab \geq 0) \\ \|(b,-a)\|_* & (ab \leq 0) \end{cases}$$

により定めると、$(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{X,R})$ はラドン空間となる。

命題 2.2 により、与えられた 2 次元ノルム空間 X から、上述の方法でラドン空間 $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{X,R})$ を構成することができる。一方で、X が元々ラドン空間であれば、命題 2.2 の方法で作られるノルム空間は X と等距離同型となることが示せる。これには、次を用いる。

補題 2.3 (Day [6])**.** $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ と $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ とは、ともにラドン空間であるとする。また、$(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ において $e_1 \perp_B e_2$ であり、第一象限において $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_2$ が成立しているとする。そのとき、全空間 $\mathbb{R}^2$ 上で $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_2$ となる。

与えられた 2 次元ノルム空間 X と、X において互いに Birkhoff 直交する単位ベクトル x, y から構成された $\mathbb{R}^2$ 上のノルム $\|\cdot\|$ は、定義より $e_1 \perp_B e_2$ を満たし、また、第一象限においてラドンノルム $\|\cdot\|_{X,R}$ と等しい。よって、X がラドン空間であれば $\|\cdot\|$ 自身もラドンノルムとなるから、補題 2.3 より次がわかる。

定理 2.4 (Day [6])**.** X を 2 次元ノルム空間とし、$(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{X,R})$ は命題 2.2 の方法で構成されるラドン空間とする。もし、X がラドン空間ならば、X と $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{X,R})$ とは等距離同型である。

これにより、すべてのラドン空間が本質的に命題 2.2 の方法で構成されることがわかる。この命題 2.2 と定理 2.4 を合わせて、Day によるラドン空間の特徴付けを得る。

3 Day-James 空間を用いた特徴付け

以下では、Day の構成をヒントに、Day-Jame 空間を用いてより直接的にラドン空間を特徴付ける。はじめに、Day-James 空間を導入しよう。

$\mathbb{R}^2$ 上のノルム $\|\cdot\|$ が absolute であるとは、$\|(a, b)\| = \|(|a|, |b|)\|$ が成立することを言い、normalized であるとは $\|e_1\| = \|e_2\| = 1$ であることを言う。$\mathbb{R}^2$ 上の absolute でかつ normalized なノルムの全体は AN_2 で表される。また、閉区間 $[0, 1]$ 上の凸関数 ψ で、$\max\{1 - t, t\} \leq \psi(t) \leq 1$ を満たすものの全体を Ψ_2 と置く。定義から、absolute なノルムは第一象限での振る舞いが本質的であり、その振る舞い（つまり、単位球の形状）を決定づけているのは、$[0, 1]$ 上の凸関数 $\psi(t) = \|(1 - t, t)\|$ である。さらに、$\|\cdot\| \in AN_2$ であれば $\psi \in \Psi_2$ であることもわかる。逆に、$\psi \in \Psi_2$ から具体的に $\|\cdot\| \in AN_2$ を構成することもでき、AN_2 と Ψ_2 は一対一に対応していることがわかる。

定理 3.1 (Bonsall-Duncan [4]; Saito-Kato-Takahashi [20])**.** 各 $\psi \in \Psi_2$ に対して、

$$\|(a, b)\|_\psi = \begin{cases} (|a| + |b|)\psi\left(\dfrac{|b|}{|a| + |b|}\right) & ((a, b) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((a, b) = (0, 0)) \end{cases}$$

と定めると、$\|\cdot\|_\psi \in AN_2$ である。また、写像 $\Psi_2 \ni \psi \mapsto \|\cdot\|_\psi \in AN_2$ は全単射である。

この定理により、AN_2 の元 $\|\cdot\|$ は、それに対応する Ψ_2 の元 $\psi(t) = \|(1 - t, t)\|$ を用いて解析することができる。この対応関係を利用することで、多くの興味深い結果が得られる。詳しくは、そのような研究の基となった Saito-Kato-Takahashi [20] と、それを引用する文献を参照されたい。

さて、目的の Day-James 空間を導入しよう。平たく言えば、Day-James 空間とは、AN_2 の二つの元を組み合わせたノルムを持つ $\mathbb{R}^2$ である。

定義 3.2 (Nilsrakoo-Saejung [18]). Ψ_2 の二つの元の組 (φ,ψ) に対して、$\mathbb{R}^2$ 上のノルム $\|\cdot\|_{\varphi,\psi}$ を

$$\|(a,b)\|_{\varphi,\psi}=\begin{cases}\|(a,b)\|_\varphi & (ab\geq 0)\\ \|(a,b)\|_\psi & (ab\leq 0)\end{cases}$$

と定める。このとき、$(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_{\varphi,\psi}$ は（一般化された）Day-James 空間と呼ばれ、$\ell^2(\varphi,\psi)$ と表される。

Day-James 空間の概念を用いると、$\|\cdot\|_\psi\in AN_2$ であるとき、$(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_\psi)=\ell^2(\psi,\psi)$ のように表せる。また、容易にわかるように、$\psi\in\Psi_2$ ならば $\|\cdot\|_{\psi,\psi}\in AN_2$ である。以降、$\ell^2(\psi,\psi)$ は $\ell^2(\psi)$ により表されるものとする。

Day-James 空間の重要性は、次の定理からわかる。

定理 3.3 (Alonso [1]). 任意の 2 次元ノルム空間 $(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|)$ に対して、ある $(\varphi,\psi)\in\Psi_2\times\Psi_2$ が存在して、$(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|)$ と $\ell^2(\varphi,\psi)$ とは等距離同型となる。

従って、2 次元ノルム空間について研究する際には、対象を Day-James 空間に限っても一般性は失われない。Day-James 空間の強みは、ノルムが凸関数のペア $(\varphi,\psi)\in\Psi_2\times\Psi_2$ から具体的に構成されるため、一般のノルムに比べ解析がしやすいことである。

定理 3.3 の視点から言えば、ラドン空間はある特殊な Day-James 空間として表現可能である。この特殊性を、凸関数のペア $(\varphi,\psi)\in\Psi_2\times\Psi_2$ における φ と ψ の関係として表現したい。そこでヒントになるのが、前節の Day による特徴付けである。Day の構成では、与えられたノルムとその双対ノルムをうまく組み合わせることでラドンノルムを得ていたことを思い出そう。

凸関数 $\psi\in\Psi_2$ に対して、

$$\psi^*(t)=\sup_{s\in[0,1]}\frac{(1-s)(1-t)+st}{\psi(s)}$$

と置くと、$\psi^*\in\Psi_2$ となる。また、$(\psi^*)^*=\psi$ に注意する。このとき、ψ^* により定まる AN_2 の元 $\|\cdot\|_{\psi^*}$ は、ψ により定まる $\|\cdot\|_\psi$ の双対ノルムと見ることができる。実際、写像

$$\ell^2(\psi)^*\ni f\mapsto(f(e_1),f(e_2))\in\ell^2(\psi^*)$$

は等距離同型写像となる（これらの結果については、Mitani-Saito [14] および Mitani-Oshiro-Saito [15] を参照されたい）。また、Day の構成で双対ノルムを結合するときに生じた「捻り」は、$\widetilde{\psi}(t)=\psi(1-t)$ と置くことにより表現できる。ここで、

$$\|(b,a)\|_{\widetilde{\psi}}=\|(a,b)\|_\psi$$

が成立することに注意する。

このような準備の下、本論文で提案されるラドン空間の新たな特徴付けは、次のようになる。

定理 3.4 ([12]). 次が成立する。

(i) 凸関数 $\psi \in \Psi_2$ に対して、$\ell^2(\psi, \widetilde{\psi^*})$ はラドン空間である。

(ii) 任意のラドン空間 X に対して、ある $\psi \in \Psi_2$ が存在して、X と $\ell^2(\psi, \widetilde{\psi^*})$ とは等距離同型となる。

この定理により、すべてのラドン空間を凸関数 $\psi \in \Psi_2$ と結び付けて考えることができる。また、様々な場合において ψ^* は ψ から具体的に計算でき、そのようなときには、与えられた ψ により構成されるラドン空間 $\ell^2(\psi, \widetilde{\psi^*})$ の正体を完全に突き止めることができる。このような考え方の有用性は、例えば、Mizuguchi [17] にも見られる。

4　定理 3.4 の証明の準備

本論文の残りの部分では、定理 3.4 の直接的な証明を与える。まず、James [8] による Birkhoff 直交性の特徴付けを思い出そう。

補題 4.1 (James [8]). X をバナッハ空間とし、$x, y \in X$ とする。そのとき、$x \perp_B y$ であるための必要十分条件は、$f \in X^*$ で $\|f\| = 1$、$f(x) = \|x\|$ かつ $f(y) = 0$ を満たすものが存在することである。

実数 a, b で $a < b$ なるものをとる。もし、$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ が凸関数であれば、$a \leq r < s < t \leq b$ のとき、

$$\frac{f(s) - f(r)}{s - r} \leq \frac{f(t) - f(r)}{t - r} \leq \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

が成立する。これより、固定された $t_0 \in [a, b]$ に対して、$[a, t_0) \cup (t_0, b]$ 上の関数

$$t \mapsto \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

は単調非減少である。特に、（端点 a, b では有限値でない可能性はあるが）片側極限

$$f'_L(t_0) = \lim_{t \to t_0 - 0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \quad \text{および} \quad f'_R(t_0) = \lim_{t \to t_0 + 0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

はともに存在する。また、

(i) 各 $t \in (a, b)$ に対して、$f'_L(t) \leq f'_R(t)$; および

(ii) $s, t \in [a, b]$ かつ $s < t$ ならば、$f'_R(s) \leq f'_L(t)$

が成立する。

凸関数の片側極限を用いることで、Day-James 空間の単位球の接汎関数を求めることができる。ここで、バナッハ空間 X において、$f \in X^*$ が凸部分集合 $C \in X$ の接汎関数であるとは、ある $x_0 \in C$ について $f(x_0) = \sup_{x \in C} f(x)$ となることを言う。また、このとき、f は x_0 において C と接すると言う。バナッハ空間 X に対して、B_X と S_X は、それぞれ X の単位球と単位球面を表すものとする。

命題 4.2 ([12])**.** 凸関数のペア $(\varphi, \psi) \in \Psi_2 \times \Psi_2$ に対して、

$$x(s) = \frac{1}{\varphi(s)}(1-s, s) \quad \text{および} \quad y(t) = \frac{1}{\psi(t)}(t-1, t)$$

と置く。そのとき、次が成立する。

(i) $s \in (0,1)$ のとき、$x(s)$ において $B_{\ell^2(\varphi,\psi)}$ と接する汎関数は

$$\lambda(\varphi(s) - as, \varphi(s) + a(1-s)),$$

で与えられる。ここで、$\lambda > 0$ かつ $a \in [\varphi'_L(s), \varphi'_R(s)]$ である。

(ii) $t \in (0,1)$ のとき、$y(t)$ において $B_{\ell^2(\varphi,\psi)}$ と接する汎関数は

$$\lambda(-(\psi(t) - at), \psi(t) + a(1-t)),$$

で与えられる。ここで、$\lambda > 0$ かつ $a \in [\psi'_L(t), \psi'_R(t)]$ である。

これにより、$\psi \in \Psi_2$ が $t \in (0,1)$ で微分可能ならば、$y(t) = \psi(t)^{-1}(t-1, t)$ において $B_{\ell^2(\varphi,\psi)}$ と接する汎関数は本質的に一意である。 この事実を用いることで、次を得る。

補題 4.3. 凸関数のペア $(\varphi, \psi) \in \Psi_2 \times \Psi_2$ に対して、

$$x(s) = \frac{1}{\varphi(s)}(1-s, s) \quad \text{および} \quad y(t) = \frac{1}{\psi(t)}(t-1, t)$$

とする。ψ は $t \in (0,1)$ で微分可能であり、$\ell^2(\varphi, \psi)$ において $y(t) \perp_B x(s)$ が成立しているとする。そのとき、

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{1-2s}{s+t-2st}$$

が成立する。

Proof. 仮定より $y(t) \perp_B x(s)$ であるから、補題 4.1 より、$y(t)$ において $B_{\ell^2(\varphi,\psi)}$ と接する $f \in \ell^2(\varphi, \psi)^*$ が存在して、$f(x(s)) = 0$ となる。ψ は t で微分可能であるから、命題 4.2 より、ある $\lambda > 0$ が存在して

$$f = \lambda(-(\psi(t) - \psi'(t)t), \psi(t) + \psi'(t)(1-t))$$

となる。従って、

$$0 = f(x(s)) = \frac{\lambda}{\varphi(s)}(-(\psi(t) - \psi'(t)t)(1-s) + (\psi(t) + \psi'(t)(1-t))s),$$

となるが、これは

$$(\psi(t) + \psi'(t)(1-t))s = (\psi(t) - \psi'(t)t)(1-s).$$

を意味するから、これを整理すれば、

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{1-2s}{s+t-2st},$$

がわかる。 □

Day-James 空間上の汎関数がノルムに達する領域について、次のようなルールがある。

補題 4.4. 凸関数のペア $(\varphi, \psi) \in \Psi_2 \times \Psi_2$ を考える。また、f は

$$f(a, b) = ac + bd$$

により定まる $\mathbb{R}^2$ 上の汎関数とする。そのとき、次が成立する。

(i) $c, d \geq 0$ ならば、

$$\sup\{|f(a, b)| : (a, b) \in B_{\ell^2(\varphi,\psi)}\} = \sup\{f(a, b) : (a, b) \in B_{\ell^2(\varphi,\psi)} \cap Q_1\}$$

となる。ここで、$Q_1 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a, b \geq 0\}$ である。

(ii) $c \leq 0 \leq d$ ならば

$$\sup\{|f(a, b)| : (a, b) \in B_{\ell^2(\varphi,\psi)}\} = \sup\{f(a, b) : (a, b) \in B_{\ell^2(\varphi,\psi)} \cap Q_2\}$$

となる。ここで、$Q_2 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a \leq 0 \leq b\}$ である。

次の結果は Day-James 空間の双対空間について述べたものであり、[18, Theorem 2.5] や [12, Proposition 2.7] に見られる。

命題 4.5. 凸関数のペア $(\varphi, \psi) \in \Psi_2 \times \Psi_2$ を考える。そのとき、写像

$$\ell^2(\varphi, \psi)^* \ni f \mapsto (f(1, 0), f(0, 1)) \in \ell^2(\varphi^*, \psi^*)$$

は、$\ell^2(\varphi, \psi)^*$ から $\ell^2(\varphi^*, \psi^*)$ への等距離同型写像を与える。

凸関数 $\psi \in \Psi_2$ に対して、$\psi(t) \geq \max\{1 - t, t\}$ より、$s, t \in [0, 1]$ かつ $s < t$ ならば

$$-1 \leq \psi'_R(0) \leq \frac{\psi(t) - \psi(s)}{t - s} \leq \psi'_L(1) \leq 1$$

となるから、ψ はリプシッツ連続である。また、リプシッツ連続な関数は絶対連続でもあるから、ラドン=ニコディムの定理より、ψ の導関数 ψ' は $[0, 1]$ のほとんど至る所で存在する。

一方で、関数 $t \mapsto -\log t$ は C^∞ 級の凸関数であり、特に、$(0, \infty]$ の各コンパクト区間上でリプシッツ連続である。従って、合成関数 $\log \circ \psi$ も $[0, 1]$ 上でリプシッツ連続であり、再びラドン=ニコディムの定理から、$\log \circ \psi$ の導関数 f はほとんど至る所で存在する。また、各 $t \in [0, 1]$ に対して、

$$\log(\psi(t)) = \int_0^t f(t) d\lambda(t)$$

が成立する。ここで、λ は $[0, 1]$ 上のルベーグ測度である。もし、ψ が t で微分可能であるなら、$f(t) = \psi'(t)/\psi(t)$ となることにも注意しよう。この等式は、ほとんどすべての $t \in [0, 1]$ で成立する。

次の命題は、Day の構成における補題 2.3 に対応している。

命題 4.6. 凸関数 $\varphi, \psi^{(1)}, \psi^{(2)} \in \Psi_2$ を考え、$\ell^2(\varphi, \psi^{(1)})$ と $\ell^2(\varphi, \psi^{(2)})$ とは、ともにラドン空間であるとする。そのとき、$\psi^{(1)} = \psi^{(2)}$ が成立する。

Proof. 適当なルベーグ零集合 N を $[0,1]$ から除いて、$\psi^{(1)}$ は $\psi^{(2)}$ とは、ともに $(0,1) \setminus N$ 上で微分可能としてよい。任意に $t \in (0,1) \setminus N$ をとり、f は $(t, 1-t) \in \mathbb{R}^2$ に対応する $\mathbb{R}^2$ 上の汎関数とする。明らかに、$f(t-1, t) = 0$ である。また、$Q_1 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a, b \geq 0\}$ とすると

$$B_{\ell^2(\varphi,\psi^{(1)})} \cap Q_1 = B_{\ell^2(\varphi)} \cap Q_1 = B_{\ell^2(\varphi,\psi^{(2)})} \cap Q_1$$

が成立することから、補題 4.4 により

$$\sup\{|f(a,b)| : (a,b) \in B_{\ell^2(\varphi,\psi^{(1)})}\} = \sup\{|f(a,b)| : (a,b) \in B_{\ell^2(\varphi,\psi^{(2)})}\}$$

となり、$x(s) = \varphi(s)^{-1}(1-s, s)$ で表される元 $x(s) \in B_{\ell^2(\varphi)} \cap Q_1$ で、$f(x(s)) = \|f\|^{(1)} = \|f\|^{(2)}$ を満たすものが存在する。ここで、$j = 1, 2$ に対して、

$$\|f\|^{(j)} = \sup\{|f(a,b)| : (a,b) \in B_{\ell^2(\varphi,\psi^{(j)})}\}$$

である。$y^{(j)}(t) = \psi^{(j)}(t)^{-1}(1-t, t)$ と置くと、補題 4.1 により、$\ell^2(\varphi, \psi^{(j)})$ において $x(s) \perp_B y^{(j)}(t)$ となる。一方で、$\ell^2(\varphi, \psi^{(j)})$ はラドン空間であるから、$y^{(j)}(t) \perp_B x(s)$ も成立する。従って、補題 4.3 から

$$\frac{(\psi^{(1)})'(t)}{\psi^{(1)}(t)} = \frac{1-2s}{s+t-2st} = \frac{(\psi^{(2)})'(t)}{\psi^{(2)}(t)}$$

となり、各 $t \in [0,1]$ に対して

$$\log(\psi^{(1)}(t)) = \int_0^t \frac{(\psi^{(1)})'(t)}{\psi^{(1)}(t)} d\lambda(t) = \int_0^t \frac{(\psi^{(2)})'(t)}{\psi^{(2)}(t)} d\lambda(t) = \log(\psi^{(2)}(t))$$

であることから、$\psi^{(1)} = \psi^{(2)}$ を得る。 □

5 定理 3.4 の証明

(i) $\psi \in \Psi_2$ をとる。まず、$(\widetilde{\psi^*})^* = \widetilde{\psi}$ に注意する。実際、$t \in [0,1]$ に対して、

$$\begin{aligned}
(\widetilde{\psi^*})^*(t) &= \sup_{s\in[0,1]} \frac{(1-s)(1-t)+st}{\widetilde{\psi^*(s)}} \\
&= \sup_{s\in[0,1]} \frac{(1-s)(1-t)+st}{\psi^*(1-s)} \\
&= \sup_{s\in[0,1]} \frac{(1-s)t+s(1-t)}{\psi^*(s)} \\
&= (\psi^*)^*(1-t) \\
&= \widetilde{\psi}(t)
\end{aligned}$$

を得る。これより、$\ell^2(\psi,\widetilde{\psi^*})$ は、命題 4.5 の意味で $\ell^2(\psi^*,\widetilde{\psi})$ と同一視される。今、$x,y \in \ell^2(\psi,\widetilde{\psi^*})$ が $x \perp_B y$ を満たすと仮定する。Birkhoff 直交性の性質から、$x \perp_B y$ はスカラー $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ に対して $\alpha x \perp_B \beta y$ を導くから、$\|x\|_{\psi,\widetilde{\psi^*}} = \|y\|_{\psi,\widetilde{\psi^*}} = 1$ および $x \in Q_1 \cup Q_2$ としてよい。ここで、

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a,b \geq 0\},\\
Q_2 &= \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a \leq 0 \leq b\}.
\end{aligned}
$$

である。

補題 4.1 から、$f \in \ell^2(\psi,\widetilde{\psi^*})^*$ が存在して、$f(x) = \|f\| = 1$ かつ $f(y) = 0$ となる。ここで、$c = f(1,0), d = f(0,1)$ と置いたとき、$y = \pm(-d,c)$ なることを見よう。実際、$f(y) = 0$ であるから、ある $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して $y = \alpha(-d,c)$ となる。もし、$(c,d) \in Q_1 \cup (-Q_1)$ ならば $(-d,c) \in Q_2 \cup (-Q_2)$ であるから、命題 4.5 より

$$
\|(-d,c)\|_{\psi,\widetilde{\psi^*}} = \|(-d,c)\|_{\widetilde{\psi^*}} = \|(d,c)\|_{\widetilde{\psi^*}} = \|(c,d)\|_{\psi^*} = \|f\| = 1
$$

となる。他方、$(c,d) \in Q_2 \cup (-Q_2)$ ならば、$(-d,c) \in Q_1 \cup (-Q_1)$ であるから、再び命題 4.5 より

$$
\|(-d,c)\|_{\psi,\widetilde{\psi^*}} = \|(-d,c)\|_{\psi} = \|(d,c)\|_{\psi} = \|(c,d)\|_{\widetilde{\psi}} = \|f\| = 1
$$

がわかる。従って、$\|y\|_{\psi,\widetilde{\psi^*}} = 1$ から $|\alpha| = 1$ が従う。必要なら y を $-y$ に置き換えることで、以下では $y = (-d,c)$ としてよい。

(I) $x \in Q_1$ の場合を考える。そのとき、$s \in [0,1]$ を用いて $x = \psi(s)^{-1}(1-s,s)$ と表せる。$\ell^2(\psi,\widetilde{\psi^*})$ 上の汎関数で、$\psi(s)^{-1}(-s,1-s)$ に対応するものを g と置くと、命題 4.5 より $\|g\| = \|\psi(s)^{-1}(-s,1-s)\|_{\widetilde{\psi}} = 1$ であり、$g(x) = 0$ を満たす。さらに、

$$
g(y) = \frac{(1-s)c + sd}{\psi(s)} = f(x) = 1.
$$

であるから、補題 4.1 より、$y \perp_B x$ を得る。

(II) $x \in Q_2$ の場合を考える。そのとき、$t \in [0,1]$ を用いて $x = \widetilde{\psi^*}(t)^{-1}(t-1,t)$ と表せる。$\ell^2(\psi,\widetilde{\psi^*})$ 上の汎関数で $\widetilde{\psi^*}(t)^{-1}(t,1-t)$ に対応するものを h と置くと、命題 4.5 より $\|h\| = \|\widetilde{\psi^*}(t)^{-1}(t,1-t)\|_{\psi^*} = 1$ であり、$h(x) = 0$ を満たす。さらに、

$$
h(-y) = \frac{(t-1)c + td}{\widetilde{\psi^*}(t)} = f(x) = 1
$$

であるから、補題 4.1 より、$-y \perp_B x$ を得る。また、これより、$y \perp_B x$ である。

従って、いずれの場合においても、$x \perp_B y$ は $y \perp_B x$ を導く。これは、$\ell^2(\psi,\widetilde{\psi^*})$ がラドン空間であることを意味する。

(ii) X をラドン空間とする。そのとき、定理 3.3 から、凸関数のペア $(\varphi,\psi) \in \Psi_2 \times \Psi_2$ が存在して、X と $\ell^2(\varphi,\psi)$ とは等距離同型となる。ここで、$\ell^2(\varphi,\psi)$ はラドン空間であることに注意する。一方で、(i) より、$\ell^2(\varphi,\widetilde{\varphi^*})$ はラドン空間である。従って、命題 4.6 により、$\psi = \widetilde{\varphi^*}$ が成立する。結論として、X と $\ell^2(\varphi,\widetilde{\varphi^*})$ とは等距離同型である。 $\square$

参考文献

[1] J. Alonso, *Any two-dimensional normed space is a generalized Day-James space*, J. Inequal. Appl., **2011**, 2011:2, 3 pp.

[2] J. Alonso, H. Martini and S. Wu, *On Birkhoff orthogonality and isosceles orthogonality in normed linear spaces*, Aequationes Math., **83** (2012), 153–189.

[3] G. Birkhoff, *Orthogonality in linear metric spaces*, Duke Math. J., **1** (1935), 169–172.

[4] F. F. Bonsall and J. Duncan, *Numerical ranges II*, Cambridge University Press, Cambridge, 1973.

[5] H. Busemann, *The isoperimetric problem in the Minkowski plane*, Amer. J. Math., **69** (1947), 863–871.

[6] M. M. Day, *Some characterizations of inner-product spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **62** (1947), 320–337.

[7] M. M. Day, *Polygons circumscribed about closed convex curves*, Trans. Amer. Math. Soc., **62** (1947), 315–319.

[8] R. C. James, *Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., *61* (1947), 265–292.

[9] R. C. James, *Inner product in normed linear spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., **53** (1947), 559–566.

[10] N. Komuro, K.-I. Mitani, K.-S. Saito, R. Tanaka and Y. Tomizawa, *A comparison between James and von Neumann-Jordan constants*, Mediterr. J. Math., **14** (2017), Art. 168, 13 pp.

[11] N. Komuro, K.-S. Saito and R. Tanaka, *On the class of Banach spaces with James constant* $\sqrt{2}$*: Part II*, Mediterr. J. Math., **13** (2016), 4039–4061.

[12] N. Komuro, K.-S. Saito and R. Tanaka, *A characterization of Radon planes using generalized Day-James spaces*, Ann. Funct. Anal., published online, DOI: https://doi.org/10.1007/s43034-019-00018-z.

[13] H. Martini and K. J. Swanepoel, *Antinorms and Radon curves*, Aequationes Math., **72** (2006), 110–138.

[14] K.-I. Mitani and K.-S. Saito, *Dual of two dimensional Lorentz sequence spaces*, Nonlinear Anal., **71** (2009), 5238–5247.

[15] K.-I. Mitani, S. Oshiro and K.-S. Saito, *Smoothness of* ψ*-direct sums of Banach spaces*, Math. Inequal. Appl., **8** (2005), 147–157.

[16] K.-I. Mitani, K.-S. Saito and T. Suzuki, *Smoothness of absolute norms on* $\mathbb{C}^n$, J. Convex Anal., **10** (2003), 89–107.

[17] H. Mizuguchi, *The differences between Birkhoff and isosceles orthogonalities in Radon planes*, Extracta Math., **32** (2017), 173–208.

[18] W. Nilsrakoo and S. Saejung, *The James constant of normalized norms on* $\mathbb{R}^2$, J. Inequal. Appl., **2006**, Art. ID 26565, 12 pp.

[19] J. Radon, *Über eine besondere Art ebener Kurven*, Ber. Verh. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig. Math.-Phys. Kl., **68** (1916), 23–28.

[20] K.-S. Saito, M, Kato and Y. Takahashi, *Von Neumann-Jordan constant of absolute normalized norms on* $\mathbb{C}^2$, J. Math. Anal. Appl., **244** (2000), 515–532.

[21] S. Yokoyama, K.-S. Saito and R. Tanaka, *Another approach to extreme norms on* $\mathbb{R}^2$, J. Nonlinear Convex Anal., **17** (2016), 157–165.