測地距離空間における凸結合の考察と共通最小点近似

東邦大学・理学部 木村泰紀
Yasunori Kimura
Department of Information Science
Faculty of Science
Toho University

1 序論

線形空間や測地距離空間等の凸結合が定義された空間において, 与えられた凸関数に対し, 最小値および最小値を取る点を求める問題を凸最小化問題という. この問題は単純な設定であるが, 多くの非線形問題と関連があり, 主に凸解析学の分野においてさまざまな条件のもとで研究が進められている. とくに解の存在定理や解の近似法に関する研究に対して, 多くの研究結果がある.

ヒルベルト空間上の下半連続凸関数に対し, リゾルベントと呼ばれる写像が定義される. この写像は, 以下に述べる通り, 与えられた関数にある種の摂動を加えることにより, 最小点が一意に定まるようにし, その一意の最小点を用いて定義された写像である.

H をヒルベルト空間, $f\colon H \to]-\infty, +\infty]$ を下半連続な真凸関数とする. また, $\lambda > 0$, $x \in H$ とする. このとき, 関数 $g\colon H \to]-\infty, +\infty]$ を, $y \in X$ に対して

$$g(y) = \lambda f(y) + \|y - x\|^2$$

と定義するとき, g は H 上で一意の最小点 y_0 をもつ. この点を用いて, λf のリゾルベント $J_{\lambda f}\colon H \to H$ を $J_{\lambda f}x = y_0$ によって定義する.

凸関数のリゾルベントは堅非拡大性と呼ばれる性質をもち, さらにこの写像の不動点集合が凸最小化問題の解集合と一致することから, 凸最小化問題の研究において重要な役割を果たしている. とくに非拡大写像等の非線形写像に対する不動点理論や不動点近似理論

との関係を構築する架け橋の役割を果たす重要な概念といえる.

さらに近年の研究において, 凸関数のリゾルベントがさまざまな完備測地距離空間上の凸関数に対して定義できることが判明した. これらのリゾルベントは, 摂動の形によって多様な性質をもつことがわかり, ここ数年で研究が急速に進められている.

本稿ではアダマール空間上の凸関数に対して定義されるリゾルベントを用いて, 有限個の凸関数に対する最小化問題の共通解を求める問題について考察した. 不動点近似理論における代表的な近似点列生成法である Mann 型の漸化式を用い, さらに 3 点以上の有限個の点に対して, 適用順序に依存しない新たな凸結合の概念を利用することで, 共通最小点への近似列収束定理を証明した.

2　準備

X を距離空間とする. $x, y \in X$ に対し, $\gamma\colon\ [0, d(x,y)] \to X$ が $\gamma(0) = x$, $\gamma(d(x,y)) = y$, および任意の $s, t \in [0, d(x,y)]$ に対して $d(\gamma(s), \gamma(t)) = |s-t|$ をみたすとき, γ を x, y を端点とする測地線という. また, 任意の $x, y \in X$ に対し, x, y を端点とする測地線がつねに存在するとき, X を測地距離空間という. 本稿では, 任意の $x, y \in X$ に対してこれらを端点とする測地線が一意に存在することを仮定する.

測地線 γ の端点を $x, y \in X$ とするとき, γ の像を $[x, y]$ であらわす. このとき, $t \in [0, 1]$ に対して, $\gamma((1-t)d(x,y)) \in [x, y]$ を $tx \oplus (1-t)y$ とあらわし, x と y の凸結合という. X の部分集合 C が, 任意の $x, y \in C$ に対して $[x, y] \subset C$ をみたすとき, C は凸であるという.

測地距離空間上の 3 点 $x, y, z \in X$ に対し, 測地三角形 $\triangle(x, y, z)$ を $\triangle(x, y, z) = [y, z] \cup [z, x] \cup [x, y] \subset X$ と定義するとき, これに対する $\mathbb{R}^2$ 上の比較三角形 $\triangle(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = [\overline{y}, \overline{z}] \cup [\overline{z}, \overline{x}] \cup [\overline{x}, \overline{y}] \subset \mathbb{R}^2$ は, 三辺相等の意味で合同な三角形, すなわち

$$d(y, z) = \|\overline{y} - \overline{z}\|, d(z, x) = \|\overline{z} - \overline{x}\|, d(x, y) = \|\overline{x} - \overline{y}\|$$

をみたすものとして定義される. 比較三角形は合同変換を除いて一意に定められることに注意する. またこのとき, $p \in \triangle(x, y, z)$ の比較点 $\overline{p} \in \triangle(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ も, 対応する辺の内分比が等しい点として自然に定義され, 任意の $x, y, z \in X$ と任意の $p, q \in \triangle(x, y, z)$ に対して, p, q の比較点 $\overline{p}, \overline{q} \in \triangle(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ が

$$d(p, q) \leq \|\overline{p} - \overline{q}\|$$

をみたすとき, X は CAT(0) 空間と呼ばれる. アダマール空間は完備な CAT(0) 空間として定義される.

CAT(0) 空間では次の不等式が成り立つ．任意の $x, y, z \in X$ と $t \in [0,1]$ に対して

$$d(z, tx \oplus (1-t)y)^2 \leq td(z,x)^2 + (1-t)d(z,y)^2 - t(1-t)d(x,y)^2.$$

この式は CN 不等式と呼ばれる．

アダマール空間 X の有界点列 $\{x_n\}$ に対し, その漸近的半径を

$$r(\{x_n\}) = \inf_{y \in X} \limsup_{n\to\infty} d(x_n, y)$$

で定義する．また, $p \in X$ が $\{x_n\}$ の漸近的中心であるとは,

$$r(\{x_n\}) = \limsup_{n\to\infty} d(x_n, p)$$

をみたすことをいう．アダマール空間においては, 有界点列の漸近的中心は一意に定まることが知られている．さらに, $x_0 \in X$ が $\{x_n\}$ の任意の部分列 $\{x_{n_i}\}$ の漸近的中心であるとき, $\{x_n\}$ は x_0 に Δ 収束するという．

次の定理は点列が Δ 収束するための十分条件を与えている．

定理 1 (Kimura-Kohsaka [6])**.** $\{x_n\}$ をアダマール空間 X の有界点列とする．$\{x_n\}$ の任意の部分列の Δ 極限 z に対して実数列 $\{d(x_n, z)\}$ が収束するならば, $\{x_n\}$ は Δ 収束する．

上記で述べたものも含め, アダマール空間の基本的性質については [1, 2] を参照せよ．

アダマール空間 X 上で定義される関数 $f \colon X \to]-\infty, +\infty]$ を考える．

- 点列 $\{x_n\} \subset X$ が $x_n \to x_0$ であるならば $f(x_0) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$ が成り立つとき, f は下半連続であるという;
- 任意の $x, y \in X$ と $t \in]0,1[$ に対して $f(tx \oplus (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$ が成り立つとき, f は凸であるという;
- f が恒等的に無限大ではないとき, すなわち, ある $x \in X$ に対して $f(x) \in \mathbb{R}$ となるとき, f は真であるという．

さらに, f が下半連続な凸関数ならば, f は Δ 下半連続, すなわち, 次が成り立つことが知られている．$\{x_n\}$ が $x_0 \in X$ に Δ 収束するならば

$$f(x_0) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n).$$

f を下半連続な真凸関数とし, $\lambda > 0$ とする．このとき, $x \in X$ に対して

$$J_{\lambda f} x = \operatorname*{argmin}_{y \in X} (\lambda f(y) + d(y,x)^2)$$

は一点集合となることが知られている [7, 4]. ここで, $\operatorname{argmin}_{y \in X} g(y)$ は関数 g の最小点全体の集合をあらわす. これによって $J_{\lambda f} \colon X \to X$ が一価写像として定義され, これを λf のリゾルベントという.

写像 $T \colon X \to X$ の不動点全体を $\operatorname{Fix} T$ であらわす. すなわち, $\operatorname{Fix} T = \{z \in X \mid z = Tz\}$. 写像 T がアダマール空間上の非拡大写像, すなわち, 任意の $x, y \in X$ に対して

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$$

をみたすならば, $\operatorname{Fix} T$ は閉凸集合となることが知られている. アダマール空間上で定義された凸関数のリゾルベント $J_{\lambda f}$ は非拡大写像であり, したがって, $\operatorname{Fix} J_{\lambda f}$ は閉凸集合である. また,

$$\operatorname{Fix} J_{\lambda f} = \operatorname*{argmin}_{y \in X} f(y)$$

であることが知られている. さらに, 次の定理が成り立つ.

定理 2 (Kimura-Kohsaka [6])**.** X をアダマール空間とし, $f \colon X \to]-\infty, +\infty]$ を下半連続な真凸関数とする. $\lambda, \mu > 0$ に対し, λf, μf のリゾルベントをそれぞれ $J_{\lambda f}, J_{\mu f}$ とするとき, 任意の $x, y \in X$ に対して

$$d(J_{\lambda f}x, J_{\mu f}y)^2 + d(J_{\lambda f}x, x)^2 + 2\lambda(f(J_{\lambda f}x) - f(J_{\mu f}y)) \leq d(J_{\mu f}y, x)^2$$

が成り立つ.

アダマール空間において, 有限個の写像の凸結合に類似するものを定義する方法として以下のものが提案されている. 本稿においても, 主定理で近似点列を生成する際にこの手法を採用する.

定理 3 (Hasegawa-Kimura [3])**.** X をアダマール空間とし, 各 $k = 1, 2, \dots, N$ に対して $T_k \colon X \to X$ を非拡大写像とする. $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\}$ を $\sum_{k=1}^N \alpha_k = 1$ をみたす正の実数とする. $x \in X$ に対して,

$$Ux = \operatorname*{argmin}_{y \in X} \sum_{k=1}^{N} \alpha_k d(T_k x, y)^2$$

と定義すると, 次が成り立つ.

(i) Ux は一点集合であり, したがって $U \colon X \to X$ は一価写像として定義される;
(ii) U は非拡大写像である;
(iii) $\bigcap_{k=1}^N \operatorname{Fix} T_k$ が空でないならば $\operatorname{Fix} U = \bigcap_{k=1}^N \operatorname{Fix} T_k$.

3　非拡大写像族の不動点近似

凸関数の最小点近似点列の生成には, 凸関数のリゾルベントを用いることで, 非拡大写像の不動点近似に用いられる手法を利用することができる. ここでは, いわゆる Mann 型の不動点近似点列生成法と, Hasegawa-Kimura [3] によって提案された, 有限個のリゾルベントの凸結合によって定義される非拡大写像の性質を組み合わせることで, 有限個の凸関数の共通最小点へ Δ 収束する点列の生成をする. 次に示す定理では Kimura-Kohsaka [6] および Kimura [5] で用いられる手法を利用して証明をおこなう.

定理 4. X をアダマール空間とし, $\{f_1, f_2, \dots, f_N\}$ を X から $]-\infty, +\infty]$ への下半連続な真凸関数の有限族で, $\bigcap_{k=1}^N \operatorname{argmin}_{y\in X} f_k(y) \neq \emptyset$ をみたすと仮定する. 各 $k = 1, 2, \dots, N$ に対し, $\{\lambda_n^k\}$ と $\{\alpha_n^k\}$ を正の実数列とする. さらに実数列 $\{\alpha_n^0\}$ を各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\alpha_n^0 = 1 - \sum_{k=1}^N \alpha_k$ で定義し, これらの数列に以下の条件を仮定する.

- 各 $k = 0, 1, 2, \dots, N$ に対して $\inf_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n^k > 0$;
- 各 $k = 1, 2, \dots, N$ に対して $\inf_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n^k > 0$.

$n \in \mathbb{N}$ と $k = 1, 2, \dots, N$ に対し, $J_{\lambda_n^k f_k} \colon X \to X$ を凸関数 $\lambda_n^k f^k$ のリゾルベントとする. $x_1 \in X$ を任意にとり, 点列 $\{x_n\}$ を各 $n \in \mathbb{N}$ に対して漸化式

$$x_{n+1} \in \operatorname*{argmin}_{y\in X} \left(\alpha_n^0 d(x_n, y)^2 + \sum_{k=1}^N \alpha_n^k d(J_{\lambda_n^k f_k} x_n, y)^2 \right)$$

によって定義する. このとき, $\{x_n\}$ はある $x_0 \in \bigcap_{k=1}^N \operatorname{argmin}_{y\in X} f_k(y)$ に Δ 収束する.

証明. $f_0 \colon X \to]-\infty, +\infty]$ を, すべての $y \in X$ で $f_0(y) = 0$ と定義し, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\lambda_n^0 = 1$ とすると, リゾルベント $J_{\lambda_n^0 f_0} \colon X \to X$ は恒等写像となる. これを用いて, 写像 $U_n \colon X \to X$ を $x \in X$ に対して

$$U_n x = \operatorname*{argmin}_{y\in X} \left(\alpha_n^0 d(x, y)^2 + \sum_{k=1}^N \alpha_n^k d(J_{\lambda_n^k f_k} x, y)^2 \right) = \operatorname*{argmin}_{y\in X} \sum_{k=0}^N \alpha_n^k d(J_{\lambda_n^k f_k} x, y)^2$$

と定義する. 恒等写像は空間全体を不動点とする非拡大写像であることに注意すると, 定理 3 から $U_n \colon X \to X$ は非拡大写像で, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\operatorname{Fix} U_n = \bigcap_{k=1}^N \operatorname{Fix} J_{\lambda_n^k f_k} = \bigcap_{k=1}^N \operatorname*{argmin}_{y\in X} f_k(y)$$

が成り立つ．さらに点列 $\{x_n\}$ の漸化式は

$$x_{n+1} = U_n x_n$$

であらわされる．ここで，$p \in \bigcap_{k=1}^N \operatorname{argmin}_{y \in X} f_k(y)$ を任意にとる．U_n の定義を用いると，各 $n \in \mathbb{N}$ と $t \in]0,1[$ に対して

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^N \alpha_n^k d(J_{\lambda_n^k f_k} x_n, U_n x_n)^2 \\
&\leq \sum_{k=0}^N \alpha_n^k d(J_{\lambda_n^k f_k} x_n, tU_n x_n \oplus (1-t)p)^2 \\
&\leq \sum_{k=0}^N \alpha_n^k \left(td(J_{\lambda_n^k f_k} x_n, U_n x_n)^2 + (1-t)d(J_{\lambda_n^k f_k} x_n, p)^2 - t(1-t)d(U_n x_n, p)^2 \right) \\
&\leq \sum_{k=0}^N \alpha_n^k \left(td(J_{\lambda_n^k f_k} x_n, U_n x_n)^2 + (1-t)d(x_n, p)^2 - t(1-t)d(x_{n+1}, p)^2 \right) \\
&\leq t\sum_{k=0}^N \alpha_n^k d(J_{\lambda_n^k f_k} x_n, U_n x_n)^2 + (1-t)\sum_{k=0}^N \alpha_n^k d(x_n, p)^2 - t(1-t)\sum_{k=0}^N \alpha_n^k d(x_{n+1}, p)^2 \\
&= t\sum_{k=0}^N \alpha_n^k d(J_{\lambda_n^k f_k} x_n, U_n x_n)^2 + (1-t)d(x_n, p)^2 - t(1-t)d(x_{n+1}, p)^2
\end{aligned}$$

が成り立ち，よって

$$(1-t)\sum_{k=0}^N \alpha_n^k d(J_{\lambda_n^k f_k} x_n, U_n x_n)^2 \leq (1-t)d(x_n, p)^2 - t(1-t)d(x_{n+1}, p)^2$$

を得る．両辺 $1-t$ で除して $t \to 1$ とすることで

$$\sum_{k=0}^N \alpha_n^k d(J_{\lambda_n^k f_k} x_n, U_n x_n)^2 \leq d(x_n, p)^2 - d(x_{n+1}, p)^2$$

が得られる．$0 \leq \sum_{k=0}^N \alpha_n^k d(J_{\lambda_n^k f_k} x_n, U_n x_n)^2$ より

$$d(x_{n+1}, p)^2 \leq d(x_n, p)^2.$$

よって $\{d(x_n, p)\}$ は下に有界な単調非増加数列であり，ある $c_p \in \mathbb{R}$ に収束する．また，このことから $\{x_n\}$ は有界であることもわかる．さらに，

$$\alpha = \min_{k=0,1,2,\ldots,N} \inf_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n^k$$

とすると, 仮定より $\alpha > 0$ であり,

$$\begin{aligned}\alpha d(x_n, U_n x_n)^2 &\le \alpha_n^0 d(x_n, U_n x_n)^2 \\ &= \alpha_n^0 d(J_{\lambda_n^0 f_0} x_n, U_n x_n)^2 \\ &\le \sum_{k=0}^{N} \alpha_n^k d(J_{\lambda_n^k f_k} x_n, U_n x_n)^2 \\ &\le d(x_n, p)^2 - d(x_{n+1}, p)^2 \to c_p^2 - c_p^2 = 0.\end{aligned}$$

よって $d(x_n, U_n x_n) \to 0$ を得る. 同様にして, $k = 1, 2, \ldots, N$ に対して

$$\begin{aligned}\alpha d(J_{\lambda_n^k f_k} x_n, U_n x_n)^2 &\le \alpha_n^k d(J_{\lambda_n^k f_k} x_n, U_n x_n)^2 \\ &\le d(x_n, p)^2 - d(x_{n+1}, p)^2 \\ &\to c_p^2 - c_p^2 = 0\end{aligned}$$

より, $d(J_{\lambda_n^k f_k} x_n, U_n x_n) \to 0$ を得る. よって, 各 $k = 1, 2, \ldots, N$ に対して

$$d(x_n, J_{\lambda_n^k f_k} x_n) \le d(x_n, U_n x_n) + d(U_n x_n, J_{\lambda_n^k f_k} x_n) \to 0$$

であることが示された. また, 定理 2 より

$$d(J_{\lambda_n^k f_k} x_n, p)^2 + d(J_{\lambda_n^k f_k} x_n, x_n)^2 + 2\lambda_n^k (f_k(J_{\lambda_n^k f_k} x_n) - f_k(p)) \le d(p, x_n)^2$$

が成り立ち, $\lim_{n\to\infty} d(J_{\lambda_n^k f_k} x_n, x_n) = 0$ より

$$\begin{aligned}0 &\le f_k(J_{\lambda_n^k} x_n) - f_k(p) \\ &\le \frac{d(p, x_n)^2 - d(J_{\lambda_n^k f_k} x_n, p)^2 - d(J_{\lambda_n^k f_k} x_n, x_n)^2}{2\lambda_n^k} \\ &\le \frac{d(J_{\lambda_n^k f_k} x_n, x_n)(d(p, x_n) + d(J_{\lambda_n^k f_k} x_n, p)) - d(J_{\lambda_n^k f_k} x_n, x_n)^2}{2\inf_{m\in\mathbb{N}} \lambda_m^k} \to 0 \ (n \to \infty)\end{aligned}$$

を得る. よって

$$\lim_{n\to\infty} f_k(J_{\lambda_n^k f_k} x_n) = f_k(p) = \inf_{y\in X} f_k(y)$$

が各 $k = 1, 2, \ldots, N$ で成り立つ. ここで, $\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n_i}\}$ が $z \in X$ に Δ 収束すると仮定しよう. このとき, 再び $\lim_{n\to\infty} d(J_{\lambda_n^k f_k} x_n, x_n) = 0$ を用いれば $\{J_{\lambda_{n_i}^k f_k} x_{n_i}\}$ も $i \to \infty$ とすると z に Δ 収束する. また, f が下半連続かつ凸であることから Δ 下半連続となるので,

$$f_k(z) \le \lim_{i\to\infty} f_k(J_{\lambda_{n_i}^k f_k} x_{n_i}) = \inf_{y\in X} f_k(y)$$

となり, $z \in \operatorname{argmin}_{y\in X} f_k(y)$ が得られる．したがって, 数列 $\{d(x_n, z)\}$ はある $c_z \in \mathbb{R}$ に収束する．よって定理 1 より $\{x_n\}$ は Δ 収束し, その極限 $x_0 \in X$ は各 $k = 1, 2, \ldots, N$ に対して $x_0 \in \operatorname{argmin}_{y\in X} f_k(y)$ をみたす．したがって

$$x_0 \in \bigcap_{k=1}^{N} \operatorname*{argmin}_{y\in X} f_k(y)$$

となり, 定理が証明された. □

参考文献

[1] M. Bačák, *Convex analysis and optimization in Hadamard spaces*, De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, vol. 22, De Gruyter, Berlin, 2014.

[2] M. R. Bridson and A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 319, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[3] T. Hasegawa and Y. Kimura, *Convergence to a fixed point of a balanced mapping by the Mann algorithm in a Hadamard space*, Linear Nonlinear Anal. **4** (2018), 405–412.

[4] J. Jost, *Convex functionals and generalized harmonic maps into spaces of nonpositive curvature*, Comment. Math. Helv. **70** (1995), 659–673.

[5] Y. Kimura, *Explicit and implicit iterative schemes with balanced mappings in Hadamard spaces*, Thai J. Math., to appear.

[6] Y. Kimura and F. Kohsaka, *Two modified proximal point algorithms for convex functions in Hadamard spaces*, Linear Nonlinear Anal. **2** (2016), 69–86.

[7] U. F. Mayer, *Gradient flows on nonpositively curved metric spaces and harmonic maps*, Comm. Anal. Geom. **6** (1998), 199–253.