Uncertainty Relations Represented by Tracial or Non-Tracial Positive Linear Maps

城西大学・理学部　　柳　研二郎

Kenjiro Yanagi
Department of Mathematics
Faculty of Science
Josai University

1 Introduction

量子情報理論では，量子状態 (density operator) ρ のもとで物理量 (self-adjoint operator) A を観測したときの期待値は $\mathrm{Tr}(\rho A)$ で表され，分散は $\mathrm{Var}_\rho(A) := \mathrm{Tr}(\rho A^2) - (\mathrm{Tr}(\rho A))^2$ で表されることが知られている．量子状態 ρ のもとで 2 つの物理量 A, B に対して Heisenberg uncertainty relation は次の不等式で与えられている．

$$\mathrm{Var}_\rho(A)\mathrm{Var}_\rho(B) \geq \frac{1}{4}|\mathrm{Tr}(\rho[A,B])|^2$$

さらにより強い不等式が Schrödinger によって得られている．

$$\mathrm{Var}_\rho(A)\mathrm{Var}_\rho(B) - |\mathrm{Re}(\mathrm{Cov}_\rho(A,B))|^2 \geq \frac{1}{4}|\mathrm{Tr}(\rho[A,B])|^2,$$

ただし $[A,B] := AB - BA$ は A, B の commutator であり，covariance は $\mathrm{Cov}_\rho(A) := \mathrm{Tr}(\rho AB) - \mathrm{Tr}(\rho A)\mathrm{Tr}(\rho B)$ で与えられる．Yanagi-Furuichi-Kuriyama [12] は one parameter correlation と one parameter Wigner-Yanase skew information を次のように定義した．$\alpha \in [0,1]$ に対して

$$\mathrm{Corr}_\rho^\alpha(A,B) = \mathrm{Tr}(\rho A^* B) - \mathrm{Tr}(\rho^{1-\alpha} A^* \rho^\alpha B), \quad I_\rho^\alpha(A) = \mathrm{Corr}_\rho^\alpha(A,A).$$

そして彼らは次のようなトレース不等式を得た．

$$I_\rho^\alpha(A) I_\rho^\alpha(B) \geq \left|\mathrm{Re}(\mathrm{Corr}_\rho^\alpha(A,B))\right|^2.$$

$\alpha = \frac{1}{2}$ のときはそれぞれ correlation $\mathrm{Corr}_\rho(A,B)$, Wiganer-Yanase skew information $I_\rho(A)$ である．また Luo [10] は不確定性を表す量として

$$U_\rho(A) = \sqrt{\mathrm{Var}_\rho(A)^2 - (\mathrm{Var}_\rho(A) - I_\rho(A))^2}.$$

を導入して，$U_\rho(A)$ についての Heisenberg 型の不等式の拡張を得た．

$$U_\rho(A)U_\rho(B) \geq \frac{1}{4}|\mathrm{Tr}(\rho[A,B])|^2.$$

Wigner-Yanase-Dyson skew information の凸性は，量子力学分野で長く問題として与えられていたが，Lieb [9] によって証明された．これは $\varphi(A,B) = \mathrm{Tr}A^\rho K^* B^{1-\rho} K$ で定義された写像 $\varphi : M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ が同時凹であることを示すことによって証明された．ただし $M_n(\mathbb{C})$ は $n \times n$ complex marices の全体とする． 以下この報告で用いられる記号等を導入する．$M_{n,sa}(\mathbb{C})$ を $n \times n$ self-adjoint matrices の全体，$M_{n,+}(\mathbb{C})$ を $n \times n$ positive semi-definite matrices の全体，$M_{n,+,1}(\mathbb{C})$ を $n \times n$ density matrices の全体とする．$A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して $Tr[A]$ は次の性質をもつことに注目する．
(1) $Tr(AB) = Tr(BA)$ (2) $A \geq 0 \Longrightarrow Tr(A) \geq 0$ (3) $Tr(A^*) = \overline{Tr(A)}$
(4) $Tr(\alpha A + \beta B) = \alpha Tr(A) + \beta Tr(B)$ for all $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ (5) $Tr(A)Tr(B) = Tr(B)Tr(A)$

2 UR for Non-Tracial Positive Linear Maps

通常の Trace の拡張となる写像 $\Phi : M_n(\mathbb{C}) \to M_m(\mathbb{C})$ で次の条件を満たすものを考える．
(1) $\Phi(AB) = \Phi(BA)$ (2) $A \geq 0 \Longrightarrow \Phi(A) \geq 0$ (3) $\Phi(A^*) = \Phi(A)^*$
(4) $\Phi(\alpha A + \beta B) = \alpha\Phi(A) + \beta\Phi(B)$ for all $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$
特に (1) が成り立たない場合は Non-Tracial という．次の Lemma が知られている．

Lemma 2.1 $A, B, X \in M_n(\mathbb{C})$ で $A > 0, B > 0$ とする．このとき次の (1)〜(3) は同値である．

$$(1)\ \begin{pmatrix} A & X \\ X^* & B \end{pmatrix} \geq 0 \qquad (2)\ A \geq XB^{-1}X^* \qquad (3)\ B \geq X^*A^{-1}X$$

Definition 2.1 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, $\rho \in M_{n,sa}(\mathbb{C})$ とする．また h を ρ のスペクトルを含む区間上で定義される *real-valued function* とするとき，次のように定義する．

$$Var^h_{\rho,\Phi}(A) = \Phi(h^{1/2}A^*Ah^{1/2}) - \Phi(h^{\frac{1}{2}}A^*h^{\frac{1}{2}})\Phi^{-1}\Phi(h^{\frac{1}{2}}Ah^{\frac{1}{2}}),$$

$$Cov^h_{\rho,\Phi}(A,B) = \Phi(h^{\frac{1}{2}}A^*Bh^{\frac{1}{2}}) - \Phi(h^{\frac{1}{2}}A^*h^{\frac{1}{2}})\Phi^{-1}\Phi(h^{\frac{1}{2}}Bh^{\frac{1}{2}}),$$

ただし $h(\rho)^{\frac{1}{2}}$ を省略して $h^{\frac{1}{2}}$, また $\Phi(h(\rho))^{-1}$ を省略して Φ^{-1} とそれぞれ書くことにした．

Theorem 2.1 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, $\rho \in M_{n,sa}(\mathbb{C})$ に対して次が成り立つ．

$$\begin{pmatrix} Var^h_{\rho,\Phi}(A) & Cov^h_{\rho,\Phi}(A,B) \\ Cov^h_{\rho,\Phi}(B,A) & Var^h_{\rho,\Phi}(B) \end{pmatrix} \geq 0.$$

Proof.

$$0 \leq \begin{pmatrix} h^{\frac{1}{2}}A^* & 0 & 0 \\ h^{\frac{1}{2}}B^* & 0 & 0 \\ h^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ah^{\frac{1}{2}} & Bh^{\frac{1}{2}} & h^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^{\frac{1}{2}}A^*Ah^{\frac{1}{2}} & h^{\frac{1}{2}}A^*Bh^{\frac{1}{2}} & h^{\frac{1}{2}}A^*h^{\frac{1}{2}} \\ h^{\frac{1}{2}}B^*Ah^{\frac{1}{2}} & h^{\frac{1}{2}}B^*Bh^{\frac{1}{2}} & h^{\frac{1}{2}}B^*h^{\frac{1}{2}} \\ h^{\frac{1}{2}}Ah^{\frac{1}{2}} & h^{\frac{1}{2}}Bh^{\frac{1}{2}} & h(\rho) \end{pmatrix}.$$

Φ の three-positivity property より,

$$\begin{pmatrix} \Phi(h^{\frac{1}{2}}A^*Ah^{\frac{1}{2}}) & \Phi(h^{\frac{1}{2}}A^*Bh^{\frac{1}{2}}) & \Phi(h^{\frac{1}{2}}A^*h^{\frac{1}{2}}) \\ \Phi(h^{\frac{1}{2}}B^*Ah^{\frac{1}{2}}) & \Phi(h^{\frac{1}{2}}B^*Bh^{\frac{1}{2}}) & \Phi(h^{\frac{1}{2}}B^*h^{\frac{1}{2}}) \\ \Phi(h^{\frac{1}{2}}Ah^{\frac{1}{2}}) & \Phi(h^{\frac{1}{2}}Bh^{\frac{1}{2}}) & \Phi(h(\rho)) \end{pmatrix} \geq 0.$$

よって

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \Phi(h^{\frac{1}{2}}A^*Ah^{\frac{1}{2}}) & \Phi(h^{\frac{1}{2}}A^*Bh^{\frac{1}{2}}) \\ \Phi(h^{\frac{1}{2}}B^*Ah^{\frac{1}{2}}) & \Phi(h^{\frac{1}{2}}B^*Bh^{\frac{1}{2}}) \end{pmatrix} \\ \geq\ &\begin{pmatrix} \Phi(h^{\frac{1}{2}}A^*h^{\frac{1}{2}}) \\ \Phi(h^{\frac{1}{2}}B^*h^{\frac{1}{2}}) \end{pmatrix} \Phi^{-1} \begin{pmatrix} \Phi(h^{\frac{1}{2}}Ah^{\frac{1}{2}}) & \Phi(h^{\frac{1}{2}}Bh^{\frac{1}{2}}) \end{pmatrix} \\ =\ &\begin{pmatrix} \Phi(h^{\frac{1}{2}}A^*h^{\frac{1}{2}})\Phi^{-1}\Phi(h^{\frac{1}{2}}Ah^{\frac{1}{2}}) & \Phi(h^{\frac{1}{2}}A^*h^{\frac{1}{2}})\Phi^{-1}\Phi(h^{\frac{1}{2}}Bh^{\frac{1}{2}}) \\ \Phi(h^{\frac{1}{2}}B^*h^{\frac{1}{2}})\Phi^{-1}\Phi(h^{\frac{1}{2}}Ah^{\frac{1}{2}}) & \Phi(h^{\frac{1}{2}}B^*h^{\frac{1}{2}})\Phi^{-1}\Phi(h^{\frac{1}{2}}Bh^{1/2}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{pmatrix} Var^h_{\rho,\Phi}(A) & Cov^h_{\rho,\Phi}(A,B) \\ Cov^h_{\rho,\Phi}(B,A) & Var^h_{\rho,\Phi}(B) \end{pmatrix} \geq 0.$$

□

Theorem 2.2 (Heisenberg Type) $\Phi(M_n(\mathbb{C}))$ が可換のとき, すなわち 任意の $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ に対して $\Phi(A)\Phi(B) = \Phi(B)\Phi(A)$ が成り立つとする. このとき任意の $A, B \in M_{n,sa}(\mathbb{C})$, 任意の$\rho \in M_{n,sa}(\mathbb{C})$ および ρ のスペクトルを含む区間上で定義された任意の *positive real-valued continuous function* h に対して次が成り立つ.

$$\begin{pmatrix} Var^h_{\rho,\Phi}(A) & \frac{1}{2}\Phi(h^{\frac{1}{2}}[A,B]h^{\frac{1}{2}}) \\ -\frac{1}{2}\Phi(h^{\frac{1}{2}}[A,B]h^{\frac{1}{2}}) & Var^h_{\rho,\Phi}(B) \end{pmatrix} \geq 0.$$

Theorem 2.3 (Schrödinger Type) *Theorem 2.2* と同じ条件のもとで次が成り立つ.

$$\begin{pmatrix} Var^h_{\rho,\Phi}(A) & \mathrm{Re}\{Cov^h_{\rho,\Phi}(A,B)\} + \frac{1}{2}\Phi(h^{\frac{1}{2}}[A,B]h^{\frac{1}{2}}) \\ \mathrm{Re}\{Cov^h_{\rho,\Phi}(A,B)\} - \frac{1}{2}\Phi(h^{\frac{1}{2}}[A,B]h^{\frac{1}{2}}) & Var^h_{\rho,\Phi}(B) \end{pmatrix} \geq 0.$$

Proofs of Theorem 2.2 and 2.3.

$$
\begin{aligned}
& Cov^h_{\rho,\Phi}(A,B) - Cov^h_{\rho,\Phi}(B,A) \\
= \ & \Phi(h^{\frac{1}{2}}ABh^{\frac{1}{2}}) - \Phi(h^{\frac{1}{2}}Ah^{\frac{1}{2}})\Phi^{-1}\Phi(h^{\frac{1}{2}}Bh^{\frac{1}{2}}) - \Phi(h^{\frac{1}{2}}BAh^{\frac{1}{2}}) + \Phi(h^{\frac{1}{2}}Bh^{\frac{1}{2}})\Phi^{-1}\Phi(h^{\frac{1}{2}}Ah^{\frac{1}{2}}) \\
= \ & \Phi(h^{\frac{1}{2}}[A,B]h^{\frac{1}{2}}) \quad (\Phi(M_n(\mathbb{C}))\ \text{の}\ \textit{commutatiity}\ \text{を用いる}) \\
= \ & 2i\mathrm{Im}\{Cov^h_{\rho,\Phi}(A,B)\}.
\end{aligned}
$$

$$
Cov^h_{\rho,\Phi}(A,B) + Cov^h_{\rho,\Phi}(B,A) = 2\mathrm{Re}\{Cov^h_{\rho,\Phi}(A,B)\}
$$

したがって

$$
2Cov^h_{\rho,\Phi}(A,B) = \Phi(h^{\frac{1}{2}}[A,B]h^{\frac{1}{2}}) + 2\mathrm{Re}\{Cov^h_{\rho,\Phi}(A,B)\}.
$$

よって

$$
|Cov^h_{\rho,\Phi}(A,B)|^2 = |\mathrm{Re}\{Cov^h_{\rho,\Phi}(A,B)\}|^2 + \frac{1}{4}|\Phi(h^{\frac{1}{2}}[A,B]h^{\frac{1}{2}})|^2.
$$

Theorem 2.1 より

$$
Var^h_{\rho,\Phi}(A) \geq Cov^h_{\rho,\Phi}(A,B)Var^h_{\rho,\Phi}(B)^{-1}Cov^h_{\rho,\Phi}(B,A).
$$

ここで $\Phi(M_n(\mathbb{C}))$ は commutative であるので

$$
Var^h_{\rho,\Phi}(A)\cdot Var^h_{\rho,\Phi}(B) \geq |Cov^h_{\rho,\Phi}(A,B)|^2 = |\mathrm{Re}\{Cov^h_{\rho,\Phi}(A,B)\}|^2 + \frac{1}{4}|\Phi(h^{\frac{1}{2}}[A,B]h^{\frac{1}{2}})|^2.
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
& Var^h_{\rho,\Phi}(A) \\
\geq \ & \left(|\mathrm{Re}\{Cov^h_{\rho,\Phi}(A,B)\}|^2 + \frac{1}{4}|\Phi(h^{\frac{1}{2}}[A,B]h^{\frac{1}{2}})|^2\right)(Var^h_{\rho,\Phi}(B))^{-1} \\
= \ & \left((\mathrm{Re}\{Cov^h_{\rho,\Phi}(A,B)\})^2 - \frac{1}{4}(\Phi(h^{\frac{1}{2}}[A,B]h^{\frac{1}{2}}))^2\right)(Var^h_{\rho,\Phi}(B))^{-1} \\
& \qquad (\Phi(h^{\frac{1}{2}}[A,B]h^{\frac{1}{2}})^* = -\Phi(h^{\frac{1}{2}}[A,B]h^{\frac{1}{2}})\ \text{を用いる}) \\
= \ & \left(\mathrm{Re}\{Cov^h_{\rho,\Phi}(A,B)\} + \frac{1}{2}\Phi(h^{\frac{1}{2}}[A,B]h^{\frac{1}{2}})\right)^*(Var^h_{\rho,\Phi}(B))^{-1} \\
& \qquad \left(\mathrm{Re}\{Cov^h_{\rho,\Phi}(A,B)\} - \frac{1}{2}\Phi(h^{\frac{1}{2}}[A,B]h^{\frac{1}{2}})\right). \\
& \qquad (\Phi(M_n(\mathbb{C}))\ \text{の commutativity を用いる})
\end{aligned}
$$

ゆえに

$$
\begin{pmatrix} Var^h_{\rho,\Phi}(A) & \mathrm{Re}\{Cov^h_{\rho,\Phi}(A,B)\} + \frac{1}{2}\Phi(h^{\frac{1}{2}}[A,B]h^{\frac{1}{2}}) \\ \mathrm{Re}\{Cov^h_{\rho,\Phi}(A,B)\} - \frac{1}{2}\Phi(h^{\frac{1}{2}}[A,B]h^{\frac{1}{2}}) & Var^h_{\rho,\Phi}(B) \end{pmatrix} \geq 0.
$$

これより　Theorem 2.3 が示された．また Theorem 2.1 より

$$
M = \begin{pmatrix} Var^h_{\rho,\Phi}(A) & -Cov^h_{\rho,\Phi}(B,A) \\ -Cov^h_{\rho,\Phi}(A,B) & Var^h_{\rho,\Phi}(B) \end{pmatrix} \geq 0.
$$

$\Phi(M_n(\mathbb{C}))$ は commutative であるので

$$N = \begin{pmatrix} Var^h_{\rho,\Phi}(A) & Cov^h_{\rho,\Phi}(A,B) \\ Cov^h_{\rho,\Phi}(B,A) & Var^h_{\rho,\Phi}(B) \end{pmatrix} \geq 0.$$

ゆえに

$$0 \leq M + N = \begin{pmatrix} 2Var^h_{\rho,\Phi}(A) & \Phi(h^{\frac{1}{2}}[A,B]h^{\frac{1}{2}}) \\ -\Phi(h^{\frac{1}{2}}[A,B]h^{\frac{1}{2}}) & 2Var^h_{\rho,\Phi}(B) \end{pmatrix}.$$

したがって Theorem 2.2 が示された． □

3 UR for Tracial positive Linear Maps

f, g を $\rho \in M_{n,sa}(\mathbb{C})$ のスペクトル上で定義された real valued functions とする．このとき f, g が次の条件を満たすとき monotone pair であるという．任意の $x, y \in D$ に対して $(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$. ([2, 7])

Definition 3.1 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, $\rho \in M_{n,sa}(\mathbb{C})$ に対して，次のように定義する．

$$I^{f,g}_{\rho,\Phi}(A) = \Phi(f(\rho)g(\rho)A^*A) - \Phi(f(\rho)A^*g(\rho)A),$$

$$Corr^{f,g}_{\rho,\Phi}(A,B) = \Phi(f(\rho)g(\rho)A^*B) - \Phi(f(\rho)A^*g(\rho)B).$$

Theorem 3.1 $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して $I^{f,g}_{\rho,\Phi}(A) + I^{f,g}_{\rho,\Phi}(A^*) \geq 0$. 特に，$A \in M_{n,sa}(\mathbb{C})$ に対しては $I^{f,g}_{\rho,\Phi}(A) \geq 0$.

Proof. Let $\rho = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E_i$ を ρ のスペクトル分解とする．このとき

$$\begin{aligned} & f(\rho)g(\rho)A^2 \\ = & \sum_i f(\lambda_i)g(\lambda_i)E_iA^2 = \sum_{i,j} f(\lambda_i)g(\lambda_i)E_iAE_jA \\ = & \sum_i f(\lambda_i)g(\lambda_i)E_iAE_iA + \sum_{i<j} f(\lambda_i)g(\lambda_i)E_iAE_jA + \sum_{i>j} f(\lambda_i)g(\lambda_i)E_iAE_jA \\ = & \sum_i f(\lambda_i)g(\lambda_i)E_iAE_iA + \sum_{i<j} f(\lambda_i)g(\lambda_i)E_iAE_jA + \sum_{i<j} f(\lambda_j)g(\lambda_j)E_jAE_iA, \end{aligned}$$

であるので，次を得る．

$$\begin{aligned} & \Phi(f(\rho)g(\rho)A^2) = \Phi(\sum_i f(\lambda_i)g(\lambda_i)E_iA^2) \\ = & \Phi(\sum_i f(\lambda_i)g(\lambda_i)E_iAE_iA) + \Phi(\sum_{i<j} f(\lambda_i)g(\lambda_i)E_iAE_jA + \sum_{i<j} f(\lambda_j)g(\lambda_j)E_jAE_iA) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_i f(\lambda_i)g(\lambda_i)\Phi(E_iAE_iA) + \sum_{i<j} \Phi(\{f(\lambda_i)g(\lambda_i) + f(\lambda_j)g(\lambda_j)\}E_iAE_jA) \\
&\geq \sum_i f(\lambda_i)g(\lambda_i)\Phi(E_iAE_iA) + \sum_{i<j} \Phi(\{f(\lambda_i)g(\lambda_j) + f(\lambda_j)g(\lambda_i)\}E_iAE_jA) \\
&= \Phi(f(\rho)Ag(\rho)A). \quad \square
\end{aligned}
$$

Definition 3.2 $A, B \in M_n(\mathbb{C}),\ \rho \in M_{n,sa}(\mathbb{C})$ に対して次のように定義する.

$$
Corr'^{f,g}_{\rho,\Phi}(A,B) = \frac{1}{2}\{Corr^{f,g}_{\rho,\Phi}(A,B) + Corr^{f,g}_{\rho,\Phi}(B^*,A^*)\}, \quad I'^{f,g}_{\rho,\Phi}(A) = \frac{1}{2}\{I^{f,g}_{\rho,\Phi}(A) + I^{f,g}_{\rho,\Phi}(A^*)\}.
$$

Theorem 3.2 $A, B \in M_{n,sa}(\mathbb{C})$ に対して次が成り立つ.

$$
\begin{pmatrix} I^{f,g}_{\rho,\Phi}(A) & Corr'^{f,g}_{\rho,\Phi}(A,B) \\ Corr'^{f,g}_{\rho,\Phi}(B,A) & I^{f,g}_{\rho,\Phi}(B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^{f,g}_{\rho,\Phi}(A) & \mathrm{Re}\{Corr^{f,g}_{\rho,\Phi}(A,B)\} \\ \mathrm{Re}\{Corr^{f,g}_{\rho,\Phi}(B,A)\} & I^{f,g}_{\rho,\Phi}(B) \end{pmatrix} \geq 0.
$$

Proof. $\Psi : M_{2n}(\mathbb{C}) \to M_{2m}(\mathbb{C})$ を次のように定義する.

$$
\Psi(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\Phi(A) + \Phi(D)) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

このとき Ψ は tracial positive linear map である. $A \in M_n(\mathbb{C}), \rho \in M_{n,sa}(\mathbb{C})$ に対して

$$
\begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \in M_{2n,sa}(\mathbb{C}).
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \Phi(f(\rho)g(\rho)A^*A) + \Phi(f(\rho)g(\rho)AA^*) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 2\Psi(\begin{pmatrix} f(\rho)g(\rho) & 0 \\ 0 & f(\rho)g(\rho) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix}) \\
&\geq 2\Psi(\begin{pmatrix} f(\rho) & 0 \\ 0 & f(\rho) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g(\rho) & 0 \\ 0 & g(\rho) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix}) \\
&= \begin{pmatrix} \Phi(f(\rho)A^*g(\rho)A) + \Phi(f(\rho)Ag(\rho)A^*) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

ゆえに次を得る.

$$
\Phi(f(\rho)g(\rho)A^*A) + \Phi(f(\rho)g(\rho)AA^*) \geq \Phi(f(\rho)A^*g(\rho)A) + \Phi(f(\rho)Ag(\rho)A^*).
$$

したがって

$$
I^{f,g}_{\rho,\Phi}(A) + I^{f,g}_{\rho,\Phi}(A^*) \geq 0.
$$

$\square$

Corollary 3.1 $\Phi(M_n(\mathbb{C}))$ が可換 のとき，$A, B \in M_{n,sa}(\mathbb{C})$ に対して次が成り立つ．

$$|\mathrm{Re}\{Corr_{\rho,\Phi}^{f,g}(A,B)\}|^2 \le I_{\rho,\Phi}^{f,g}(A) I_{\rho,\Phi}^{f,g}(B).$$

Theorem 3.3 $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して，次が成り立つ．

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\{\Phi(f(\rho)A^*g(\rho)A) + \Phi(f(\rho)Ag(\rho)A^*)\} &\ge \Phi(f(\rho)^{1/2}g(\rho)^{1/2}A^*f(\rho)^{1/2}g(\rho)^{1/2}A) \\ &\ge \Phi(f(\rho)A^*g(\rho))\Phi(f(\rho)g(\rho))^{-1}\Phi(f(\rho)Ag(\rho)).\end{aligned}$$

したがって $A \in M_{n,sa}(\mathbb{C})$ に対して，次が成り立つ．

$$I_{\rho,\Phi}^{f,g}(A) \le I_{\rho,\Phi}^{\sqrt{fg},\sqrt{fg}}(A) \le Var_{\rho,\Phi}^{fg}(A).$$

Proof. $\rho = \sum_{i=1}^n \lambda_i E_i$ を ρ のスペクトル分解とする．ただし $\lambda_i :\ i = 1, 2, \cdots, n$ は real numbers, $E_i, :\ i = 1, 2, \cdots, n$ は ortogonal projections で $\sum_{i=1}^n E_i = I$ を満たす．$f(\lambda_i)$, $g(\lambda_j)$ をそれぞれ f_i, g_j と略記する．このとき次が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \Phi(f(\rho)g(\rho)A^2) & W \\ W & \Phi(f(\rho)g(\rho)B^2) \end{pmatrix} \\
&\qquad \text{ただし } W = \Phi(f(\rho)g(\rho)AB) + \Phi(f(\rho)g(\rho)BA), \\
= &\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n f_ig_i\Phi(E_iA^2) & \sum_{i=1}^n f_ig_i\Phi(E_iAB) \\ \sum_{i=1}^n f_ig_i\Phi(E_iBA) & \sum_{i=1}^n f_ig_i\Phi(E_iB^2) \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n f_ig_i\Phi(E_iA^2) & \sum_{i=1}^n f_ig_i\Phi(E_iAB) \\ \sum_{i=1}^n f_ig_i\Phi(E_iAB) & \sum_{i=1}^n f_ig_i\Phi(E_iB^2) \end{pmatrix} \\
= &\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n f_ig_i\Phi(E_iA(\sum_{j=1}^n E_j)A) & \sum_{i=1}^n f_ig_i\Phi(E_iA(\sum_{j=1}^n E_j)B) \\ \sum_{i=1}^n f_ig_i\Phi(E_iB(\sum_{j=1}^n E_i)A) & \sum_{i=1}^n f_ig_i\Phi(E_iB(\sum_{j=1}^n E_j)B) \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n f_ig_i\Phi(E_iA(\sum_{j=1}^n E_i)A) & \sum_{i=1}^n f_ig_i\Phi(E_iB(\sum_{j=1}^n E_i)A) \\ \sum_{i=1}^n f_ig_i\Phi(E_iA(\sum_{j=1}^n E_j)B) & \sum_{i=1}^n f_ig_i\Phi(E_iB(\sum_{j=1}^n E_j)B) \end{pmatrix} \\
&\qquad (\sum_{j=1}^n E_j = I \text{ より}) \\
= &\ 2\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n f_ig_i\Phi(E_iAE_iA) & \sum_{i=1} f_ig_i\Phi(E_iBE_iA) \\ \sum_{i=1}^n f_ig_i\Phi(E_iAE_iB) & \sum_{i=1}^n f_ig_i\Phi(E_iBE_iB) \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} 2\sum_{i<j} f_ig_i\Phi(E_iAE_jA) & \sum_{i=1}^n (f_ig_i + f_jg_j)\Phi(E_iAE_jB) \\ \sum_{i<j} f_jg_j\Phi(E_jBE_iA) & 2\sum_{i<j} f_ig_i\Phi(E_iBE_jB) \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} 2\sum_{i<j} f_jg_j\Phi(E_jAE_iA) & \sum_{i<j} (f_ig_i + f_jg_j)\Phi(E_iBE_jA) \\ \sum_{i<j} f_ig_i\Phi(E_iAE_jB) & 2\sum_{i<j} f_jg_j\Phi(E_jBE_iB) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n f_i g_i \Phi(E_i A E_i A) & \sum_{i<j} f_i g_i \Phi(E_i B E_i A) \\ \sum_{i=1}^n f_i g_i \Phi(E_i A E_i B) & \sum_{i=1}^n f_i g_i \Phi(E_i B E_i B) \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} 2\sum_{i<j} \delta_{ij} \Phi(E_i A E_j A) & \sum_{i<j} \delta_{ij} \Delta_{ij} \\ \sum_{i<j} \delta_{ij} \Delta_{ij} & 2\sum_{i<j} \delta_{ij} \Phi(E_i B E_j B) \end{pmatrix} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad (\Phi \quad \text{は } tracial \text{ より}), \\
&\quad \text{ただし } \delta_{ij} = f_i g_i + f_j g_j, \quad \Delta_{ij} = \Phi(E_i A E_j B) + \Phi(E_j A E_i B) \\
&= 2\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n f_i g_i \Phi(E_i A E_i A) & \sum_{i=1}^n f_i g_i \Phi(E_i B E_i A) \\ \sum_{i=1}^n f_i g_i \Phi(E_i A E_i B) & \sum_{i=1}^n f_i g_i \Phi(E_i B E_i B) \end{pmatrix} \\
&\quad + \sum_{i<j} \begin{pmatrix} \delta_{ij} & 0 \\ 0 & \delta_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\Phi(E_i A E_j A) & \Delta_{ij} \\ \Delta_{ij} & 2\Phi(E_i B E_j B) \end{pmatrix} \\
&\geq 2\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n f_i g_i \Phi(E_i A E_i A) & \sum_{i=1}^n f_i g_i \Phi(E_i B E_i A) \\ \sum_{i=1}^n f_i g_i \Phi(E_i A E_i B) & \sum_{i=1}^n f_i g_i \Phi(E_i B E_i B) \end{pmatrix} \\
&\quad + \sum_{i<j} \begin{pmatrix} \xi_{ij} & 0 \\ 0 & \xi_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\Phi(E_i A E_j A) & \Delta_{ij} \\ \Delta_{ij} & 2\Phi(E_i B E_j B) \end{pmatrix} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad (f,\ g \text{ は } monotone\ pair \text{ より}), \\
&\quad \text{ただし } \xi_{ij} = f_i g_j + f_j g_i \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_i g_j \Phi(E_i A E_j A) & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_i g_j \Phi(E_i B E_j A) \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_i g_j \Phi(E_i A E_j B) & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_i g_j \Phi(E_i B E_j B) \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_i g_j \Phi(E_i A E_j A) & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_i g_j \Phi(E_i A E_j B) \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_i g_j \Phi(E_i B E_j A) & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_i g_j \Phi(E_i B E_j B) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\Phi(f(\rho)g(\rho)A) & V \\ V & 2\Phi(f(\rho)Bg(\rho)A) \end{pmatrix}, \\
&\quad \text{ただし } V = \Phi(f(\rho)Ag(\rho)B) + \Phi(f(\rho)Bg(\rho)A).
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{pmatrix} \Phi(f(\rho)g(\rho)A^2) & \frac{1}{2}W \\ \frac{1}{2}W & \Phi(f(\rho)g(\rho)B^2) \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \Phi(f(\rho)Ag(\rho)A) & \frac{1}{2}V \\ \frac{1}{2}V & \Phi(f(\rho)Bg(\rho)B) \end{pmatrix},
$$

ゆえに次を得る．

$$
\begin{pmatrix} I_{\rho,\Phi}^{f,g}(A) & \mathrm{Re}\{Corr_{\rho,\Phi}^{f,g}(A,B)\} \\ \mathrm{Re}\{Corr_{\rho,\Phi}^{f,g}(A,B)\} & I_{\rho,\Phi}^{f,g}(B) \end{pmatrix} \geq 0.
$$

□

Corollary 3.2 $\rho \in M_{n,+}(\mathbb{C})$, $A \in M_{n,sa}(\mathbb{C})$ に対して，次が成り立つ．

$$
I_{\rho,\Phi}^{\alpha}(A) \leq I_{\rho,\Phi}^{1/2}(A) \leq Var_{\rho,\Phi}(A).
$$

Acknowledgement The author was partially supported by JSPS KAKENHI 19K03525. This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University.

References

[1] T. Ando, *Convexity of certain maps on positive definite matrices and applications to Hadamard products*, Linear Algebra Appl. **26** (1979), 203–241.

[2] J. C. Bourin, *Some inequalities for norms on matrices and operators*, Linear Algebra Appl. **292** (1999), 139–154.

[3] M. D. Choi and S. K. Tsui,*Tracial positive linear maps of C^*-algebaras*, Proc. Amer. Math. Soc. **87** (1983), no. 1, 57–61.

[4] A. Dadkhah and M. S. Moslehian, *Quantum information inequalities via tracial positive linear maps*, J. Math. Anal. Appl. **447** (2017), no. 1, 666–680.

[5] A. Dadkhan, M. S. Moslehian and K. Yanagi, *Noncommutative versions of inequalities in quantum information theory*, Analysis and Mathematical Physics, **9**(2019), no. 4, 2151–2169.

[6] S. Friedland, V. Gheorghiu, and G. Gour, *Universal uncertainty relations*, Phys. Rev. Lett. **111** (2013), 230401.

[7] J. I. Fujii, *A trace inequality arising from quantum information theory*, Linear Algebra Appl. **400** (2004), 141–146.

[8] T. Furuta, J. Mićić Hot, J. Pečarić, and Y. Seo, *Mond-Pečarić Method in Operator Inequalities. Inequalities for Bounded Self-adjoint Operators on a Hilbert Space,* Element, Zagreb, Croatia, 2005.

[9] E. H. Lieb, *Convex trace functions and the Wigner–Yanase–Dyson conjecture*, Adv. Math. **11** (1973), 267–288.

[10] S. Luo, *Heisenberg uncertainty relation for mixed states*, Phys. Rev. A **72** (2005), 042110, pp.3.

[11] E. Schrödinger, *About Heisenberg uncertainty relation*, Proc. Prussian Acad. Sci. Phys. Math. Section **XIX** (1930), p.293.

[12] K. Yanagi, S. Furuichi, and K. Kuriyama, *A generalized skew information and uncertainty relation*, IEEE Trans. Info. Theory **51** (2005), 4401–4404.