負幕の幾何平均に関する数域半径不等式
Numerical radius inequalities related to the geometric means of negative power

大阪教育大学・数学教育　　瀬尾　祐貴

Yuki Seo

Department of Mathematics Education, Osaka Kyoiku University

1. はじめに

本稿は、[9] に基づいている。

ヒルベルト空間上の有界線形作用素に対する作用素ノルムは、ユニタリ不変であるが、その数域半径は、ユニタリ相似にしかならない。その意味で、本質的な相違があるはずであるが、ここでは、作用素の幾何平均の観点から、両者の違いについて考察するのが、本稿の目的である。

最初に、用語について説明する。$B(\mathcal{H})$ をヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素の全体とする。$A \in B(\mathcal{H})$ が、正とは、任意のベクトル $x \in \mathcal{H}$ に対して、$\langle Ax, x\rangle \geq 0$ が成り立つときを言い、$A \geq 0$ とかく。また、A が可逆な正作用素の時に、$A > 0$ とかく。2 つの自己共役作用素 A, B に対して、$A - B$ が正の時に、$A \geq B$ とかき、これを Löwner の半順序という。作用素 $A \in B(\mathcal{H})$ に対して、その作用素ノルム $\|A\|$、数域半径 $w(A)$、スペクトル半径 $r(A)$ をそれぞれ

$$
\begin{aligned}
\|A\| &= \sup\{\|Ax\| : \|x\| = 1, x \in \mathcal{H}\} \\
w(A) &= \sup\{|\langle Ax, x\rangle| : \|x\| = 1, x \in \mathcal{H}\} \\
r(A) &= \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}
\end{aligned}
$$

と定義する。作用素ノルムは、ユニタリ不変: 任意のユニタリ作用素 U, V に対して、$\|UAV\| = \|A\|$ がなりたつ。数域半径はユニタリ不変にはならなくて、一般的にはユニタリ相似: 任意のユニタリ U に対して、$w(U^*AU) = w(A)$ がなりたつ。さて、この 3 つの半径には、

$$r(A) \leq w(A) \leq \|A\|$$

の関係があり、A が自己共役作用素の時は、すべて一致する:

$$r(A) = w(A) = \|A\|.$$

作用素の幾何平均を考えるために、まず、数の場合から類推してみる。2 つの正の数 a, b に対して、その幾何平均は $\sqrt{ab}$、もっと一般的に、加重幾何平均は、$a^{1-\alpha}b^{\alpha}$ $(\alpha \in [0, 1])$ である。これの非可換版、即ち、作用素版を考える。2 つの正作用素 A, B に対する加重幾何平均は、数の場合を考えると $\alpha \in [0, 1]$ に対して、$A^{1-\alpha}B^{\alpha}$ を考えるのは自然であるが、作用素の非可換性により、これは正作用素どころか、自己共役作用素にすらならない。そこで、正の数 a, b に対して、$((1-\alpha)a^p + \alpha b^p)^{\frac{1}{p}} \to a^{1-\alpha}b^{\alpha}$ as $p \to 0$ なので、同じように考えて、$((1-\alpha)A^p + \alpha B^p)^{\frac{1}{p}}$ で $p \to 0$ の時の極限を考えてみる。これは、きちんとノルム収束して $e^{(1-\alpha)\log A + \alpha \log B}$ になる。そこで、

$$A \diamondsuit_{\alpha} B = e^{(1-\alpha)\log A + \alpha \log B} \qquad \text{for } \alpha \in [0, 1]$$

とおいて、これは、カオス的幾何平均と呼ばれている。しかし、単調性などの幾何平均として持つべき性質を満たさないことから、一時は作用素の幾何平均として、考察の対象から外れていたが、近年では量子情報理論などの分野の考察からその重要性が再認識されている。現在は、log-Euclidean mean とも呼ばれている。なかなか、よい非可換版の幾何平均を定式化するのは難しい。3 つ目は、数の幾何平均 $\sqrt{ab}$ は、方程式 $x^2 = ab$ の正の解である。作用素の場合、$A \geq 0, X \geq 0$ のとき、AX は正とは限らないが、XAX はいつでも正作用素である。（実際は、任意の作用素 X に対して、$X^*AX \geq 0$ である。）そこで、方程式 $x^2 = ab$ を $xa^{-1}x = b$ としてみる。これの作用素版として、$XA^{-1}X = B$ という作用素方程式を考え、この方程式の正の作用素解 X を求める。単純に考えると $X = A^{1/2}B^{1/2}$ とすれば、$X^* = B^{1/2}A^{1/2}$ となり、問題の方程式の解になるが、残念ながら、この X は正作用素ではない。A^{-1} が消えて、B が残るように試行錯誤をしてみると

$$X = A^{1/2}\left(A^{-1/2}BA^{-1/2}\right)^{1/2}A^{1/2}$$

とおけばよいことに気づく。これは、先ほどの注意で、正作用素になり、実際に代入すれば、$XA^{-1}X = B$ になり、方程式の解になっている。これを A と B の作用素幾何平均と呼んでみようというのが3つ目の提案である。かなり複雑な式ではあるが、作用素の正性を保持しながら考えるとこのようなことになってしまう。しかし、何回か書いていくうちに、その内、そんなに複雑でもないように感じる。もう少し一般的に加重作用素幾何平均を、

$$A \sharp_\alpha B = A^{\frac{1}{2}}\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^{\alpha}A^{\frac{1}{2}} \qquad \text{for all } \alpha \in [0,1]$$

とおく。$\alpha = \frac{1}{2}$ のときが、方程式 $XA^{-1}X = B$ の解である。A と B が可換の時は、$A \sharp_\alpha B = A^{1-\alpha}B^\alpha$ となっているので、数の場合の拡張になっていることが分かる。そして、この $A \sharp_\alpha B$ は、幾何平均として持つべき様々な性質を持つことが知られ、作用素論で非可換な幾何平均を考察する上でもっと大切な概念である。歴史的には、[7] を、詳しい性質を見る場合は [6] を参考にせよ。さて、この 3 つの作用素の幾何平均は、A と B が可換のときは、すべて一致して、

$$A \diamondsuit_\alpha B = A \natural_\alpha B = A^{1-\alpha}B^\alpha \qquad \text{for all } \alpha \in [0,1]$$

となるが、一般的には、代数的な関係、即ち、作用素順序的な関係はない。実際、$A^{1-\alpha}B^\alpha$ は自己共役作用素でさえないので、Löwner の半順序を考えることさえできない。しかし、作用素ノルムでは、

$$\|A \sharp_\alpha B\| \leq \|A \diamondsuit_\alpha B\| \leq \left\|A^{1-\alpha}B^\alpha\right\| \quad \text{for all } \alpha \in [0,1] \tag{1.1}$$

という美しい関係式が常に成り立つ。作用素幾何平均のノルムが一番小さくて、積版 $A^{1-\alpha}B^\alpha$ のノルムが一番大きい。では、これの数域半径版はどうなるのだろうか？前 2 つの幾何平均 $A \sharp_\alpha B$ と $A \diamondsuit_\alpha B$ は正作用素なので、数域半径と一致する。しかし、3 つめの幾何平均 $A^{1-\alpha}B^\alpha$ は自己共役作用素ですらないので、もしかすると、数域半径の場合は順序が逆転するかもしれない。しかし、幸いなことに同じ関係が成り立つことが分かる。

$$w(A \sharp_\alpha B) \leq w(A \diamondsuit_\alpha B) \leq w(A^{1-\alpha}B^\alpha) \quad \text{for all } \alpha \in [0,1]. \tag{1.2}$$

(1.1) と (1.2) は、きれいな対応関係がついている。しかし、これでは、作用素ノルムと数域半径の違いはでていない。そこで、パラメータ α の範囲を 0 と 1 の間以外の部分で考察をしてみる。もっと言うと、負の冪の時にどうなるのか？そして、今回は負冪のときに、作用素ノルム不等式とは違う数域半径不等式についていくつか結果を導くことができたので、ここで、報告をしたい。

2. 負冪の幾何平均に関する作用素ノルム不等式

負冪の幾何平均に関する数域半径不等式を考察するために、作用素ノルム不等式がどうなるのか考える必要がある。まず、負冪の幾何平均をきちんと定式化しておこう。

$$A \natural_\beta B = A^{\frac{1}{2}} \left(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}\right)^\beta A^{\frac{1}{2}} \qquad \text{for all } \beta \in [-1, 0).$$

冪が負の場合は、一般的に幾何平均としてのよい性質を満たさないので、その意味で、これは、$\beta-$ 擬幾何平均と呼ばれている。その定式化は $\sharp_\alpha$ と全く同じであることに注意する。β-擬幾何平均についての詳しい性質については、[4] を参照のこと。β の範囲は実数全体に広げることも可能であるが、様々な幾何平均的な性質は利用できなくなる。ここでは、β の範囲は $[-1, 0)$ に限定しておく。次に、カオス的幾何平均はその定義によって、パラメータはすべての実数を取りえるので、

$$A \diamondsuit_\beta B = e^{(1-\beta)\log A + \beta \log B} \qquad \text{for all } \beta \in \mathbb{R}$$

としておく。最後に、積版は、定義からこれもすべての実数で定義できるので、

$$A^{1-\beta} B^\beta \qquad \text{for all } \beta \in \mathbb{R}$$

としておく。負の数を意識するために、ここではあえて、α ではなくて、β と記号を変えている。さて、このとき、次の結果がわかる。例えば、[5, 8] をみよ。

Theorem 2.1. *A と B を可逆な正作用素とする。このとき、*

$$\|A \diamondsuit_\beta B\| \le \|A \natural_\beta B\| \le \left\|A^{1-\beta} B^\beta\right\| \qquad \textit{for all } \beta \in [-1, -\tfrac{1}{2}].$$

注意 (1.1) と比較すると、$A \diamondsuit_\beta B$ と $A \sharp_\beta B$ の関係が逆転している。積版 $A^{1-\beta}B^\beta$ のノルムはいずれも一番大きな値を取っている。実際は、

$$\|A \diamondsuit_\beta B\| \le \|A \natural_\beta B\| \qquad \text{for all } \beta \in [-1, 0), \tag{2.1}$$

$$\|A \natural_\beta B\| \le \left\|A^{1-\beta} B^\beta\right\| \qquad \text{for all } \beta \in [-1, -\tfrac{1}{2}]. \tag{2.2}$$

が成立している。後半は、$[-1, -\frac{1}{2}]$ の範囲でしか成立しない。例えば、$\beta = -\frac{1}{3}$ などで、簡単に反例を見つけることができる。

さて、定理 2.1 に対する数域半径不等式はどうなるのか？前 2 つは正作用素なので、そのまま数域半径に置き換わる。$\alpha \in [0, 1]$ の場合と同様に考えて、次のような結果が成立するのではないかと予想できる。

予想 A と B を可逆な正作用素とする。このとき、

$$w(A \diamondsuit_\beta B) \le w(A \natural_\beta B) \le w(A^{1-\beta} B^\beta) \qquad \text{for all } \beta \in [-1, -\tfrac{1}{2}].$$

区間 $[0, 1]$ の場合に、うまくいったので、当然成立するものと考えた。ところが、これが成立しない。次のように簡単な反例を見つけることができる。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{and} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

とおく。$\beta = -\frac{1}{2}$ で、

$$A \natural_{-\frac{1}{2}} B = A^{\frac{1}{2}} (A^{\frac{1}{2}} B^{-1} A^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^{\frac{3}{2}} B^{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

簡単な計算で、$w(A^{\frac{3}{2}}B^{-\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{5}}{3}) < w(A \natural_{-\frac{1}{2}} B) = \frac{\sqrt{5}}{3}$.
従って、

$$w(A \natural_\beta B) \le w(A^{1-\beta}B^\beta) \qquad \text{for all } \beta \in [-1, -\tfrac{1}{2}]$$

は一般的に成立するとは限らないことが分かる。勿論、成立する場合もある。同じ A と B に対して、$\beta = -1$ で、

$$A \natural_{-1} B = AB^{-1}A = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^2B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{4}{9} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

同様な計算により、$w(A^2B^{-1}) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{9} + \frac{\sqrt{41}}{9}\right) > \frac{5}{9} = w(A \natural_{-1} B)$.

従って、

$$w(A \natural_\beta B) \le w(A^{1-\beta}B^\beta) \qquad \text{for } \beta = -1$$

は、成立する。

ここで、初めて、作用素ノルム $\|\cdot\|$ と数域半径 $w(\cdot)$ の違いが、幾何平均を用いた評価をするときに、現れたようにみえる。もう少し、注意深く 3 つの数域半径の関係を見る必要がある。

3. 負冪の幾何平均に関する数域半径不等式

A, B は可逆な正作用素とする。このとき、(2.1) より、両方とも正作用素なので、

$$w(A \diamondsuit_\beta B) \le w(A \natural_\beta B) \qquad \text{for all } \beta \in [-1, 0)$$

が成り立ち、(2.2) から直接わかるわけではないが、カオス的幾何平均の性質を用いて、

$$w(A \diamondsuit_\beta B) \le w(A^{1-\beta}B^\beta) \qquad \text{for all } \beta \in \mathbb{R}$$

がわかる。従って、カオス的幾何平均との関係はわかるが、$w(A \natural_\beta B)$ と $w(A^{1-\beta}B^\beta)$ については、どのようになっているのか？そのままでは、順序はつかないわけであるが、どのような関係なら成立するのか？パラメータを一つ増やすことで、次の関係が成立することがわかる。

Theorem 3.1. A と B を可逆な正作用素とする。このとき、

$$w(A \natural_\beta B) \le w(A^{2(1-\beta)q}B^{2\beta q})^{\frac{1}{2q}} \qquad \textit{for all } \beta \in [-1, -\tfrac{1}{2}] \textit{ and } q \ge 1.$$

定理 3.1 において、$q = 1$ とすれば、次の結果をもつ。

Theorem 3.2. A と B を可逆な正作用素とする。このとき、

$$w(A \diamondsuit_\beta B) \le w(A^{\frac{1-\beta}{2}}B^\beta A^{\frac{1-\beta}{2}}) \le w(A \natural_\beta B) \le w(A^{2(1-\beta)}B^{2\beta})^{\frac{1}{2}}$$

for all $\beta \in [-1, -\frac{1}{2}]$.

作用素ノルムでは、Cordes 型の不等式、即ち、

$$\|AB\| \le \|A^pB^p\|^{\frac{1}{p}} \qquad \text{for all } p \ge 1$$

が成立するが、数域半径では、それが成立しない。実際は、成立する範囲が限定され、次が成立する。

$$w(AB) \le w(A^pB^p)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{for all } p \ge 2.$$

ここにも、作用素ノルムと数域半径との違いが表れている。この事実により、$w(A^{1-\beta}B^{\beta})$ に関しては、次のような系列が成立する。

Theorem 3.3. A と B を可逆な正作用素とする。このとき、

$$w(A \diamondsuit_{\beta} B) \leq w(A^{\frac{1-\beta}{2}}B^{\beta}A^{\frac{1-\beta}{2}}) \leq w(A^{1-\beta}B^{\beta}) \leq w(A^{2(1-\beta)}B^{2\beta})^{\frac{1}{2}}$$

for all $\beta \in \mathbb{R}$.

作用素ノルム版だと、負冪であっても、3 つの作用素の幾何平均に美しい関係式が成立したのに対して、数域半径では、微妙な相違があり、それがユニタリ不変性とユニタリ相似性との違いなのかと感じた。定理 3.2 と定理 3.3 を比べてみると、$w(A \natural_{\beta} B)$ と $w(A^{1-\beta}B^{\beta})$ の違いというか、直接の順序関係はないが、その存在範囲はかなり絞り込めたのではないかと思う。

今後の課題としては、$\beta \in [-1, 0)$ に対して、β-擬幾何平均 $A \natural_{\beta} B$ と $A^{1-\beta}B^{\beta}$ の数域半径の違いをもう少し精密に評価できないか。また、Karcher 幾何平均をはじめとする n 変数版幾何平均に関する数域半径不等式がどうなるのかも興味深い問題である。

4. 補足

オガナイザーの松岡先生に、丁寧にわかりやすい講究録にしてくださいという依頼をうっかりとしていて、まだページ数があるので、少し補足をしたい。数学の考え方の一つに「横ずらしの考え方」というのがある [3]。数学教育的にはまだ認知されていないが、新しい結果を見つけるときの代表的な考え方の一つである。実際、最近も若い研究者が作用素環での結果を導くときに、この「横ずらしの考え方」を用いているまさにその瞬間を見ることができた。「1 つの結果や性質が得られたとき、その見方や考え方を横に見ながら、問題の条件を少し変えたり、条件を緩めたりして、その結果や性質がどうなるのかを調べてみる。そのような作業を通じて、さらによりよい方法を求めたり、もっと一般的な状況についてまとめてみる」という考え方を言う。「解決したい課題、もしくは新しい結果を導くときに、これまでにわかっている結果を横において、それを斜めに見ながら、新しい結果がどうなるのか？これまでの結果はどこがうまくいっていて、今回はどこが困難な点なのか？」などを考えながら、すすめる考え方のことである。研究者であれば、当然考える一つの手立てであるが、学校現場では、この考え方はあまり表に出てこない。教科書では、例題の説明をし、それをもとに練習問題を解くという形で矮小化されている。その考え方をこそ、学ばなければいけないと考える。今回の研究過程は、この「横ずらしの考え方」がうまくいった事例にまさになっていると考えられる。それは、第 2 節の定理 2.1 である。課題は、負冪の時に、カオス的幾何平均と β-擬幾何平均のノルム不等式がどうなるのか。当然 (1.1) 式がどうやって導かれたのか？そこが出発点になる。(1.1) 式は実は、Ando-Hiai 不等式の直接の結果から導かれた。従って、安直ではあるが、負冪の場合のノルム不等式を導くためには、負冪の Ando-Hiai 不等式を考えることができれば、十分だと気が付く。ここでは、便宜上、行列に話を限定することにする。

Ando-Hiai による log-majorization theorem とは、次の結果である [1]。任意の $\alpha \in (0, 1]$ に対して

$$A^r \sharp_{\alpha} B^r \prec_{(\log)} (A \sharp_{\alpha} B)^r \qquad \text{for all } r \geq 1$$

が成立する。このことは、容易に次のノルム不等式を導く。ただし、$|||\cdot|||$ はユニタリ不変ノルムを表わす。

$$\left|\left|\left|(A^p \sharp_{\alpha} B^p)^{\frac{1}{p}}\right|\right|\right| \leq \left|\left|\left|(A^q \sharp_{\alpha} B^q)^{\frac{1}{q}}\right|\right|\right| \qquad \text{for } 0 < q < p.$$

ここで、Lie-Trotter の公式により、

$$A \diamondsuit_{\alpha} B = \lim_{q \to 0}(A^q \sharp_{\alpha} B^q)^{\frac{1}{q}} \qquad \text{for } \alpha \in (0,1]$$

が成立するので、$q \to 0$ で、$p = 1$ とすれば、A, B を正定値行列とするとき、

$$\|A \sharp_{\alpha} B\| \le \|A \diamondsuit_{\alpha} B\| \quad \text{for all } \alpha \in [0,1]$$

が成り立つ。ここでのポイントは 2 つ。一つは、log-majorization theorem、もう一つは Lie-Trotter の公式である。しかし、Lie-Trotter の公式は、実は、冪は実数全体で成立することが知られている。従って、特に、$\beta \in [-1,0)$ であっても、Lie-Trotter の公式は成立することになる。つまり、問題は負冪の時に log-majorization theorem がどうなるのかわかればいいことになる。そして、この定理の一番大切なところは、次の不等式である。$\alpha \in [0,1]$ に対して、

$$A \sharp_{\alpha} B \le I \qquad \Longrightarrow \qquad A^r \sharp_{\alpha} B^r \le I \qquad \text{for all } r \ge 1.$$

これを特に、Ando-Hiai 不等式という [2]。問題は随分明確になり、上の Ando-Hiai 不等式で $\beta \in [-1,0)$ のときにどうなるのか？$\alpha \in (0,1]$ のときに成立するのだから、ここで、「横ずらしの考え方」の登場である。Ando-Hiai の証明を左において、それを横目で見つつ、α を β に変えて、どうなるのか。じっくりと Ando-Hiai の証明を眺めることになる。すると、$r \ge 1$ では、うまくいかないことはすぐに気が付く。では、$0 < r \le 1$ のときは、どうなるのか？まず、$\frac{1}{2} \le r \le 1$ とし、$0 \le \varepsilon \le \frac{1}{2}$ に対して、$r = 1 - \varepsilon$ とおく。$C = A^{\frac{1}{2}} B^{-1} A^{\frac{1}{2}}$ とさらにおく。そのとき、$B^{-1} = A^{-\frac{1}{2}} C A^{-\frac{1}{2}}$ かつ $A \natural_{\beta} B = A^{\frac{1}{2}} C^{-\beta} A^{\frac{1}{2}}$ となる。もし、$A \natural_{\beta} B \le I$ ならば、$C^{-\beta} \le A^{-1}$ となり、$A \le C^{\beta}$ がわかる。Löwner-Heinz inequality によって、$0 \le \varepsilon \le \frac{1}{2}$ に対して、$A^{\varepsilon} \le C^{\beta\varepsilon}$ がわかる。$-\beta \in (0,1]$ かつ $1 - \varepsilon \in [\frac{1}{2}, 1]$ なので、

$$\begin{aligned}
A^r \natural_{\beta} B^r &= A^{\frac{1-\varepsilon}{2}}(A^{\frac{\varepsilon-1}{2}} B^{1-\varepsilon} A^{\frac{\varepsilon-1}{2}})^{\beta} A^{\frac{1-\varepsilon}{2}} \\
&= A^{\frac{1-\varepsilon}{2}}(A^{\frac{1-\varepsilon}{2}} (B^{-1})^{1-\varepsilon} A^{\frac{1-\varepsilon}{2}})^{-\beta} A^{\frac{1-\varepsilon}{2}} \\
&= A^{\frac{1-\varepsilon}{2}}(A^{\frac{1-\varepsilon}{2}} (A^{-\frac{1}{2}} C A^{-\frac{1}{2}})^{1-\varepsilon} A^{\frac{1-\varepsilon}{2}})^{-\beta} A^{\frac{1-\varepsilon}{2}} \\
&= A^{\frac{1-\varepsilon}{2}}(A^{-\frac{\varepsilon}{2}} [A \sharp_{1-\varepsilon} C] A^{-\frac{\varepsilon}{2}})^{-\beta} A^{\frac{1-\varepsilon}{2}} \\
&= A^{\frac{1}{2}-\varepsilon}[A^{\varepsilon} \sharp_{-\beta} (A \sharp_{1-\varepsilon} C)] A^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \\
&\le A^{\frac{1}{2}-\varepsilon}[C^{\alpha\varepsilon} \sharp_{-\alpha} (C^{\alpha} \sharp_{1-\varepsilon} C)] A^{\frac{1}{2}-\varepsilon}
\end{aligned}$$

という評価を得る。最後の不等式は行列幾何平均の単調性による。指数の直接計算により、

$$C^{\beta\varepsilon} \sharp_{-\beta} (C^{\beta} \sharp_{1-\varepsilon} C) = C^{\beta(2\varepsilon-1)}.$$

そして、再び Löwner-Heinz inequality と $0 \le 1 - 2\varepsilon \le 1$ により、$C^{-\alpha} \le A^{-1}$ は、$C^{-\beta(1-2\varepsilon)} \le A^{-(1-2\varepsilon)}$ を導きます。 従って、

$$A^r \natural_{\beta} B^r \le A^{\frac{1}{2}-\varepsilon} C^{\beta(2\varepsilon-1)} A^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \le A^{\frac{1}{2}-\varepsilon} A^{-1+2\varepsilon} A^{\frac{1}{2}-\varepsilon} = I.$$

だから、$\frac{1}{2} \le r \le 1$ の場合は、証明ができたことになる。$0 < r < \frac{1}{2}$ の場合は、上の手法を繰り返すことで、結果を得ることができる。したがって、私たちは、次の結果が分かる。$\beta \in [-1,0)$ に対して、

$$A \sharp_{\beta} B \le I \qquad \Longrightarrow \qquad A^r \sharp_{\beta} B^r \le I \qquad \text{for all } 0 < r \le 1.$$

これと、anti-symmetric tensor power の手法により、私たちは、負冪の Ando-Hiai log-majorization がわかる。$\beta \in [-1,0)$ に対して、

$$(*) \qquad A^r \natural_\beta B^r \prec_{(\log)} (A \natural_\beta B)^r \qquad \text{for all } r \in (0,1].$$

これにより、

$$\left|\!\left|\!\left|(A^q \natural_\beta B^q)^{\frac{1}{q}}\right|\!\right|\!\right| \le \left|\!\left|\!\left|(A^p \natural_\beta B^p)^{\frac{1}{p}}\right|\!\right|\!\right| \qquad \text{for all } 0 < q < p.$$

特に、任意のユニタリ不変ノルム $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ に対して、

$$|\!|\!|A \diamondsuit_\beta B|\!|\!| \le |\!|\!|A \natural_\beta B|\!|\!| \qquad \text{for all } \beta \in [-1,0)$$

が分かる。オリジナルの Ando-Hiai の証明と見比べると、まったく同じ手法の繰り返しに気が付く。まさに、「横ずらしの考え方」のよさが発揮された場面である。もっと、この考え方の良さが学校数学でも強調されることを期待したい。補足ということで、証明の背後にある大切な考え方について述べてみた。負冪の Ando-Hiai 不等式の証明については、[5] を見ていただきたい。

Acknowledgements. The author is partially supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP19K03542.

References

[1] T. Ando and F. Hiai, *Log majorization and complementary Golden-Thompson type inequality*, Linear Algebra Appl. **197** (1994), 113–131.

[2] M. Fujii and E. Kamei, *Ando-Hiai inequality and Furuta inequality*, Linear Algebra Appl. **416** (2006), 541–545.

[3] 瀬尾祐貴　藤井正俊　「教員養成から見た数学の考え方」数学教育研究, 大阪教育大学数学教室　第 39 号　(2010), 51–60.

[4] J.I. Fujii and Y. Seo, *Tsallis relative operator entropy with negative paramaeters*, Adv. Oper. Theory, **1** (2016), no.2, 219–236.

[5] M. Kian and Y. Seo, *Norm inequalities related to the matrix geometric mean of negative power*, Scientiae Mathematicae Japonicae (in Editione Electronica) e-2018 Whole Number 31 2018-7.

[6] F. Kubo and T. Ando, *Means of positive linear operators*, Math. Ann. **246** (1980), 205–224.

[7] W. Pusz and S.L. Woronowicz, *Functional calculus for sesquilinear forms and the purification map*, Rep. Math. Phys., **8**, (1975), 159–170.

[8] Y. Seo, *Matrix trace inequalities on Tsallis relative entropy of negative order*, J. Math. Anal. Appl. **472** (2019), no. 2, 1499–1508.

[9] Y. Seo, *Numerical radius inequalities related to the geometric means of negative power*, Operators and Matrices, **13** (2019), no.2, 489–493.