Remark on higher order expansions of refined profiles to nonlinear Schrödiger equations

九州大学　山崎 陽平
Yohei Yamazaki
Faculty of Mathematics,
Kyushu University

1　序

次の非線形シュレディンガー方程式について考える．

$$i\partial_t u = -\Delta u + g(|u|^2)u. \tag{1}$$

ここで、$u : \mathbb{R}^{1+3} \to \mathbb{C}$ は未知関数とし、非線形項 $g(|u|^2)u$ は $g \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), g(0) = 0$ かつある定数 $C > 0$ が存在して、

$$|g^{(n)}(s)| \le C|s|^{2-n} \text{ for } |s| > 1 \text{ and } n = 0, 1, \cdots, 4, \tag{2}$$

を満たすとする．このとき，Kato [9] と Cazenave-Weissler [4] により，(1) は $H^1(\mathbb{R}^3)$ の初期値に対して，局所適切であることが知られている．本報告では，定在波の拡張である refined profile の高次の展開について考察する．

ある $\omega > 0$ が存在して，(NLS) の非自明解が $e^{i\omega t}\varphi(x)$ と表されるとき，$e^{i\omega t}\varphi(x)$ を定在波という．$e^{i\omega t}\varphi$ が定在波であることと φ が

$$-\Delta\varphi + \omega\varphi + g(|\varphi|^2)\varphi = 0 \tag{3}$$

の非自明解であることは同値である．安定な定在波は波動現象を記述すると考えられており，定在波の安定・不安定性を示すことは重要である．ここで、定在波が軌道安定であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $\delta > 0$ が存在し，$\|u(0) - \varphi\|_{H^1} < \delta$ を満たす任意の初

期値 $u(0)$ に対して，(NLS) の解 $u(t)$ が

$$\sup_{t>0}\inf_{x\in\mathbb{R}^3,\theta\in\mathbb{R}}\left\|u(t,\cdot)-e^{i\theta}\varphi(\cdot-x)\right\|_{H^1}<\varepsilon$$

を満たすときいう．定在波が軌道安定でないとき，軌道不安定という．

非線形項 $g(|u|^2)u=-|u|^{p-1}u\ (1<p<5)$ ときは，球対称で正値な (3) の解 ϕ_ω が存在し，$e^{i\omega t}\phi_\omega$ は基底状態解と呼ばれる．基底状解解 $e^{i\omega t}\phi_\omega$ の安定・不安定性について，次の結果が知られている．

定理 1. (Berestycki–Cazenave [1], Cazenave–Lions [12], Weinstein [3]) $\omega>0$ とする．このとき，

1. $1<p<\frac{7}{4}$ ならば，$e^{i\omega t}\phi_\omega$ は軌道安定，
2. $\frac{7}{4}\le p<5$ ならば，$e^{i\omega t}\phi_\omega$ は軌道不安定.

一般の定在波 $e^{i\omega t}\varphi$ の軌道安定・不安定性の判定法は Grillakis–Shatah–Strauss [8] によって与えられている．

方程式 (1) の解 $u(t)$ に対して，$\bar{u}(-t)$ も (1) の解となる．よって，軌道安定な定在波 $e^{i\omega t}\varphi_\omega$ について，(1) の解 $u(t)$ が

$$\lim_{t\to\infty}\inf_{x\in\mathbb{R}^3,\theta\in\mathbb{R}}\left\|u(t)-e^{i\theta}\varphi_\omega(\cdot-x)\right\|_{H^1}=0$$

を満たすならば，ある $x_0\in\mathbb{R}^3,\theta_0\in\mathbb{R}$ が存在して，$u(t,x)=e^{i(\omega t+\theta_0)}\varphi_\omega(x-x_0)$ となる．実際，任意の $\varepsilon>0$ について，ある $\delta,t_\delta>0,\theta_\delta\in\mathbb{R},x_\delta\in\mathbb{R}^3$ が存在して，$\left\|e^{i\theta_\delta}u(t_\delta,\cdot-x_\delta)-\varphi_\omega\right\|_{H^1}<\delta$ でかつ $\|v(0)-\varphi_\omega\|_{H^1}<\delta$ となる任意の解 $v(t)$ について，

$$\sup_{t>0}\inf_{x\in\mathbb{R}^3,\theta\in\mathbb{R}}\left\|v(t)-e^{i\theta}\varphi_\omega(\cdot-x)\right\|_{H^1}<\varepsilon$$

となる．特に，$v(0,x)=e^{-i\theta_\delta}\bar{u}(t_\delta,x-x_\delta)$ とすれば，$v(t,x)=e^{-i\theta_\delta}\bar{u}(t_\delta-t,x-x_\delta)$ で，

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^3,\theta\in\mathbb{R}}\left\|u(0)-e^{i\theta}\varphi_\omega(\cdot-x)\right\|_{H^1}\le\sup_{t>0}\inf_{x\in\mathbb{R}^3,\theta\in\mathbb{R}}\left\|v(t)-e^{i\theta}\varphi_\omega(\cdot-x)\right\|_{H^1}<\varepsilon$$

となる．よって，$\varepsilon\to0$ で

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^3,\theta\in\mathbb{R}}\left\|u(0)-e^{i\theta}\varphi_\omega(\cdot-x)\right\|_{H^1}=0.$$

定在波 $e^{i\omega t}\varphi_\omega$ と解 $u(t)$ との差を

$$v(t)=e^{-i\omega t}u(t)-\varphi_\omega$$

とすると，

$$i\partial_t v = (-\Delta + \omega + g(\varphi_\omega^2) + g'(\varphi_\omega^2)\varphi_\omega^2)v + g'(\varphi_\omega^2)\varphi_\omega^2 \bar{v} + F(v, \bar{v}) \tag{4}$$

を満たす．ここで，

$$F(v, \bar{v}) = g(|\varphi_\omega + v|^2)(\varphi_\omega + v) - (g(\varphi_\omega^2) + g'(\varphi_\omega^2)\varphi_\omega^2)v - g'(\varphi_\omega^2)\varphi_\omega^2 \bar{v}.$$

このとき，方程式 (4) の線形項は $\mathbb{C}$-線形でない．$\mathbb{C}$-線形な作用素として扱うため，

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v \\ \bar{v} \end{pmatrix}$$

とおくと，(4) は

$$i\partial_t \boldsymbol{v} = \mathcal{H}_\omega \boldsymbol{v} + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{v}) \tag{5}$$

を満たす．ここで，

$$-i\mathcal{H}_\omega = -i \begin{pmatrix} -\Delta + \omega + g(\varphi_\omega^2) + g'(\varphi_\omega^2)\varphi_\omega^2 & g'(\varphi_\omega^2)\varphi_\omega^2 \\ -g'(\varphi_\omega^2)\varphi_\omega^2 & \Delta - \omega - g(\varphi_\omega^2) - g'(\varphi_\omega^2)\varphi_\omega^2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

を定在波 $e^{i\omega t}\varphi_\omega$ 周りの線形化作用素といい，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{v})$ は非線形項である．よって，定在波 $e^{i\omega t}\varphi_\omega$ の近くにある (1) の解 $u(t)$ の挙動は，時刻無限大で，(5) の線形化方程式

$$i\partial_t \boldsymbol{v} = \mathcal{H}_\omega \boldsymbol{v} \tag{7}$$

の解 $(\boldsymbol{v}(t))_\uparrow$ と定在波 $e^{i\omega t}\varphi_\omega$ の和に漸近すると考えられる．ここで，

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_\uparrow = a,$$

であり，3 次元自由シュレディンガー方程式の解 $e^{it\Delta}u_0$ は

$$\left\| e^{it\Delta}u_0 \right\|_{L^\infty} \lesssim t^{-\frac{3}{2}} \|u_0\|_{L^1}$$

を満たすことに注意する．定在波の近くに初期値を持つ全ての解が，適当な意味で，時刻無限大で定在波に漸近するとき，その定在波は漸近安定であるという．

このとき，方程式 (1) の対称性から，

$$\mathcal{H}_\omega \begin{pmatrix} \varphi_\omega \\ -\varphi_\omega \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad \mathcal{H}_\omega \begin{pmatrix} \partial_\omega \varphi_\omega \\ \partial_\omega \varphi_\omega \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \varphi_\omega \\ -\varphi_\omega \end{pmatrix}$$

であるから，$\mathcal{H}_\omega$ は広義多重度が 2 以上の 0 固有値をもつ．さらに，Weyl の定理から $\mathcal{H}_\omega$ の本質的スペクトルは $(-\infty, -\omega] \cup [\omega, \infty)$ である．定在波が軌道安定であっても，一般

に，$\mathcal{H}_\omega$ は実数の固有値を持つ．$(-\omega,0)\cup(0,\omega)$ に含まれる実固有値を internal mode という．特に，

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

とすると，

$$\overline{\mathcal{H}_\omega}=\mathcal{H}_\omega,\quad \mathcal{H}_\omega=-\sigma_1\mathcal{H}_\omega\sigma_1$$

であるから，$\mathcal{H}_\omega$ のスペクトルは実軸と虚軸に対して対称になる．ここで，$\overline{\mathcal{H}_\omega}$ は $\mathcal{H}_\omega$ の各成分の複素共役を成分として持つ作用素である．

線形ポテンシャルを持つ非線形シュレディンガー方程式の小さな定在波に関して，線形化作用素が対称性からくる 0 固有値のみを持つ場合に，Soffer–Weinstein [11] が漸近安定性を示している．1 次元の非線形シュレディンガー方程式について，1 組の internal mode $\pm\lambda$ $(\lambda>0)$ を持ち，$2\lambda>\omega$ の場合は，非線形相互作用と一般化固有値関数の非直交条件の下で，Buslaev–Perel'man [2] によって，定在波の漸近安定性が示されている．3 次元の非線形シュレディンガー方程式について，1 組の internal mode $\pm\lambda$ $(\lambda>0)$ を持ち，$2\lambda>\omega$ の場合に，Fermi の黄金律と呼ばれる仮定の下で，Cuccagna [5] によって定在波の漸近安定性が示されている．一般の組の internal mode を持つ場合にも漸近安定性が示されている [6, 7, 13]．

Internal mode がない場合は，線形化方程式の解の本質的スペクトル部分に対して Strichartz 評価が成立すれば，非線形項の L^2-超臨界性により，解と定在波の差を制御できる．Internal mode がある場合は，線形化方程式の解の internal mode 成分は時間周期的であるため，線形評価だけでは解と定在波の差を制御できない．しかし，一般には非線形項の影響で internal mode 成分のエネルギーは倍周期の mode に遷移するため，有限回の遷移で本質的スペクトル成分に到達する．そのため，一般には非線形項の影響で internal mode 成分は減衰すると考えられる．先行研究 [5, 6, 7, 13] では，internal mode 成分のエネルギーが本質的スペクトル成分に遷移することを保証するため，Fermi の黄金律と呼ばれる非線形相互作用と本質的スペクトルに関する仮定し，漸近安定性を示している．

本報告では，internal mode 成分からくる非線形相互作用を取り出すために，Cuccagna–Maeda [6] で定義された，定在波の拡張である refined profile の高次展開について論じる．特に，(1) の球対称解に限りかつ internal mode が 1 組のときについて考察する．まず，refined profile を定義するための仮定を与える．

(H0) 非自明な区間 $\mathcal{O}\subset(0,\infty)$ について，定常方程式 (3) は正値球対称解 $\varphi_\cdot\in C^1(\mathcal{O},H^2)$ が存在する．

(H1) ある $\omega_* \in \mathcal{O}$ が存在して，定常方程式 (3) の φ_{ω_*} 周りでの線形化作用素 $L_{\omega_*,+}$ について，$\mathrm{Ker}(L_{\omega_*,+}|_{L^2_{rad}}) = \{0\}$ かつ $L_{\omega_*,+}$ の負固有値はただ一つである．ここで，

$$X_{rad} = \{u \in X \mid u \text{ is radial symmetry}\}$$

である．

(H2) $\frac{d}{d\omega}\|\varphi_\omega\|^2_{L^2}|_{\omega=\omega_*} > 0$ が成り立つ．

(H3) $|\omega - \omega_*| \ll 1$ となる任意の ω について，ある $\lambda(\omega)$ と自然数 N が存在して，$\mathcal{H}_\omega$ の離散スペクトル $\sigma(\mathcal{H}_\omega)$ は $\{0, \pm\lambda(\omega)\}$ であり，$(N-1)\lambda(\omega_*) < \omega_* < N\lambda(\omega_*)$ かつ $\mathrm{dimker}(\mathcal{H}_{\omega_*} \pm \lambda(\omega_*)) = 1$.

仮定 (H0)〜(H2) の下で，[8] より，定在波 $e^{i\omega t}\varphi_\omega$ は軌道安定であることが示せる．特に，(H3) を仮定せずに，$\mathcal{H}_\omega$ のスペクトルは $\mathbb{R}$ に含まれることが示せる．これらの仮定の下で，refined profile が以下の定理によって与えられる．

定理 2. (Cuccagna–maeda [6]) (H0)〜(H3) を仮定する．このとき，$\omega_* \in \mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$, $\{\lambda_j\}_{j=0}^{N-2} \subset C^1(\mathcal{O}', \mathbb{R})$ と $\{\varphi_{j,k}\}_{0\le j,k<N} \subset C^1(\mathcal{O}', \Sigma)$，$G_\pm \in \Sigma$ が存在して，$\lambda_0(\omega) = \lambda(\omega)$, $\varphi_{0,0}[\omega] = \varphi_\omega$, $\varphi_{1,0}[\omega] = (\zeta[\omega])_\uparrow$, $\varphi_{0,1}[\omega] = (\sigma_1\zeta[\omega])_\uparrow$ であり，

$$\varphi[\theta, \omega, z] = e^{i\theta} \sum_{0\le j,k<N} z^j \bar{z}^k \varphi_{j,k}[\omega]$$

かつ

$$\begin{aligned}\tilde{R}_1 =& (-\Delta + \omega)\varphi[\theta,\omega,z] + g(|\varphi[\theta,\omega,z]|^2)\varphi[\theta,\omega,z] \\ & - iD\varphi[\theta,\omega,z]\left(0, 0, -\sum_{j=0}^{N-2} |z|^{2j} z\lambda_j(\omega)\right) - e^{i\theta}(z^N G_+ + \bar{z}^N G_-)\end{aligned}$$

とおくと，

$$\left\|\tilde{R}_1\right\|_\Sigma \lesssim (|z| + |\omega - \omega_*|)|z|^N$$

となる．ここで，$\varphi[\theta,\omega,z]$ を *refined profile* と呼び，M は十分大きな実数とし，$\|u\|_\Sigma = \left\|\langle x\rangle^M u\right\|_{H^2}$, $\Sigma = \{u \in L^2 \mid \|u\|_\Sigma < \infty\}$ とする．

この refined profile を用い，次の 2 つ (H4), (H5) を仮定することで，定在波の漸近安定性が示されている．

(H4) $\mathcal{H}_\omega$ は本質的スペクトル $(-\infty, -\omega] \cup [\omega, \infty)$ に埋め込まれた固有値をもたず，$\pm\omega$ はレゾナンスでない．ここで，ω が $\mathcal{H}_\omega$ のレゾナンスであるとは，ある $s > \frac{1}{2}$ と

$\boldsymbol{u} \in (L^{2,-s})^2 \setminus (L^2)^2$ が存在して，$\mathcal{H}_\omega \boldsymbol{u} = \omega \boldsymbol{u}$ となるときいう．ただし，$\|u\|_{L^{2,-s}} = \|\langle x\rangle^{-s} u\|_{L^2}$.

(H5) Fermi の黄金律

$$(\mathcal{F}W^* \mathfrak{G})_\uparrow(\sqrt{N\lambda(\omega_*) - \omega_*}) \neq 0.$$

ここで，$\mathcal{F}$ は Fourier 変換，$W = \lim_{t\to\infty} e^{it\mathcal{H}_{\omega_*}} e^{-it\sigma_3(-\Delta+\omega_*)}$，$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ である．

定理 3. (Cuccagna–maeda [6]) (H0)〜(H5) を仮定する．このとき，ある $C, \delta_0 > 0$ が存在して，$\|u(0) - \varphi_{\omega_*}\|_{H^1} = \delta < \delta_0$ を満たす初期値 $u(0) \in H^1_{rad}$ に対して，ある $\omega_+ > 0, \eta_+ \in H^1, \theta(t) \in \mathbb{R}$ が存在して，$\|\eta_+\|_{H^1} + |\omega - \omega_+| < C\delta$ かつ

$$\lim_{t\to\infty} \left\| u(t) - e^{i\theta(t)}\varphi_{\omega_+} - e^{it\Delta}\eta_+ \right\|_{H^1} = 0.$$

注意. 定理 3 では初期値が球対称であることと internal mode が一組である仮定したが，平行移動不変性を考慮し，一般の個数の internal mode に対する refined profile を構成することで，Cuccagna–maeda [6] ではより一般的な仮定の下で漸近安定性を示している．

注意. 漸近安定性を示すときに，解 $u(t)$ と定在波の差 $v(t) = e^{-i\omega t}u(t) - \varphi_\omega$ を考察するのではなく，refined profile との差 $w(t) = e^{-i\omega t}u(t) - \varphi[\theta(t), \omega(t), z(t)]$ と各 $\theta(t), \omega(t), z(t)$ について apriori 評価を構成している．Internal mode 方向を引き抜くというアイディアは Cuccagna–Mizumachi [7] でも与えられている．

注意. 不安定な定在波に対する refined profile は [10] で与えられている．

非線形相互作用と本質的スペクトルの間のエネルギー遷移の仮定である (H5) の仮定無しには，一般に，漸近安定性は示せない．しかし，(H5) が不成立な場合は次が成立することを報告する．

定理 4. (H0)〜(H4) を仮定し，(H5) が成り立たないと仮定する．すなわち，

$$(\mathcal{F}W^* \mathfrak{G})_\uparrow(\sqrt{N\lambda(\omega_*) - \omega_*}) = 0$$

このとき，$\omega_* \in \mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$，$\{\lambda_j\}_{j=0}^{N-2} \subset C^1(\mathcal{O}', \mathbb{R})$ と $\{\varphi_{j,k}\}_{0\le j,k<N} \subset C^1(\mathcal{O}', \Sigma)$，$\varphi_{N,0}, \varphi_{0,N}$，$R_{N,0}, R_{0,N} \in C^1(\mathcal{O}', \Sigma)$，$G_{N+1,0}, G_{N,1}, G_{1,N}, G_{0,N+1} \in \Sigma$ が存在して，$\lambda_0(\omega) = \lambda(\omega)$，$\varphi_{0,0}[\omega] = \varphi_\omega$，$\varphi_{1,0}[\omega] = (\zeta[\omega])_\uparrow$，$\varphi_{0,1}[\omega] = (\sigma_1\zeta[\omega])_\uparrow, R_{N,0}[\omega_*] = R_{0,N}[\omega_*] = 0$ であり，

$$\varphi[\theta, \omega, z] = e^{i\theta} \sum_{0\le j,k<N} z^j \bar{z}^k \varphi_{j,k}[\omega] + e^{i\theta}(z^N \varphi_{N,0}[\omega] + \bar{z}^N \varphi_{0,N}[\omega])$$

かつ

$$
\begin{aligned}
\tilde{R}_2 =&(-\Delta+\omega)\varphi[\theta,\omega,z]+g(|\varphi[\theta,\omega,z]|^2)\varphi[\theta,\omega,z]\\
&-iD\varphi[\theta,\omega,z]\left(0,0,-\sum_{j=0}^{M}|z|^{2j}z\lambda_j(\omega)\right)\\
&-e^{i\theta}(z^N R_{N,0}[\omega]+\bar{z}^N R_{0,N}[\omega]+z^{N+1}G_{N+1}+z^N\bar{z}G_{N,1}+z\bar{z}^N G_{1,N}+\bar{z}^{N+1}G_{0,N+1})
\end{aligned}
$$

とおくと，

$$\left\|\tilde{R}_2\right\|_\Sigma \lesssim (|z|+|\omega-\omega_*|)|z|^{N+1}.$$

注意. 定理 4 では refined profile の N 次まで求めている．一般に，(H5) が成立する場合は，N 次の項である $\varphi_{N,0},\varphi_{0,N}$ が L^2 に属さない．

注意. (H5) が成立しない場合は，$R_{N,0}[\omega],R_{0,N}[\omega],G_{N+1,0},G_{N,1},G_{1,N},G_{0,N+1}$ を用いて，高次の Fermi 黄金律条件を設定し，仮定することで，(H5) が成立しない場合でも，漸近安定性が成立することが期待される．$R_{N,0}[\omega]=R_{0,N}[\omega]=0$ なら，高次の Fermi 黄金律条件はより単純になる．

本報告の 2 章では，定理 2 の証明を与える．3 章では定理 4 の証明を与える．

2　定理 2 の証明

重み付きソボレフ空間

$$H^{s,m}(\mathbb{R}^3)=\{u\in L^2(\mathbb{R}^3)\mid \|\langle x\rangle^m u\|_{H^s}<\infty\}$$

で定義し，$\mathcal{H}_\omega$ の $\lambda(\omega)$ に対する固有関数を

$$\zeta(\omega)=\begin{pmatrix}\zeta_+(\omega)\\ \zeta_-(\omega)\end{pmatrix}$$

とする．このとき，$\sigma_1\mathcal{H}_\omega\sigma_1=-\mathcal{H}_\omega$ であるから，$\sigma_1\zeta(\omega)$ は $-\lambda(\omega)$ に対する固有関数になる．ここで，仮定 (H0) より，φ_ω は (3) の H^2-解であり、$\omega>0$ でから，任意の $s,m>0$ について，$\varphi\in H^{s,m}(\mathbb{R}^3)$ である．同様に，$\zeta_+,\zeta_-\in H^{s,m}(\mathbb{R}^3)$. 特に，$\varphi_\omega$ は ω について C^1 であり，$\dim\ker(\mathcal{H}_{\omega_*}-\lambda(\omega_*))=1$ であるから，$\lambda(\omega),\zeta(\omega)$ は ω について C^1 として取れる．さらに，$\bar{\mathcal{H}}_\omega=\mathcal{H}_\omega$ より，ζ_+,ζ_- は実数値関数で $(\zeta,\sigma_3\zeta)_{L^2}=1$ としてよい．

形式的に，

$$\varphi[\omega,z]=\sum_{0\le j,k<N} z^j\bar{z}^k\varphi_{j,k}[\omega],\quad \varphi_{0,0}[\omega]=\varphi_\omega,\quad \varphi_{1,0}[\omega]=\zeta_+(\omega),\quad \varphi_{0,1}[\omega]=\zeta_-(\omega), \tag{8}$$

$$\tilde{z}(\omega,z)=-i\sum_{j=0}^{N-2}|z|^{2j}z\lambda_j(\omega),\quad \lambda_0(\omega)=\lambda(\omega), \tag{9}$$

$$\begin{aligned} g_{\boldsymbol{m}}&=g_{j,k}\\ &=g'(\varphi_\omega)\sum_{\substack{\boldsymbol{m}^1+\boldsymbol{m}^2=\boldsymbol{m}\\ \boldsymbol{m}^1,\boldsymbol{m}^2>\boldsymbol{0}}}\Big(\varphi_{\boldsymbol{m}^1}\varphi_{\bar{\boldsymbol{m}}^2}\varphi_\omega+\varphi_{\boldsymbol{m}^1}\varphi_{\boldsymbol{m}^2}\varphi_\omega+\varphi_{\bar{\boldsymbol{m}}^1}\varphi_{\boldsymbol{m}^2}\varphi_\omega\\ &\qquad+\sum_{\substack{\boldsymbol{m}^{1,1}+\boldsymbol{m}^{1,2}=\boldsymbol{m}^1\\ \boldsymbol{m}^{1,1},\boldsymbol{m}^{1,2}>\boldsymbol{0}}}\varphi_{\boldsymbol{m}^{1,1}}\varphi_{\bar{\boldsymbol{m}}^{1,2}}\varphi_{\boldsymbol{m}^2}\Big)\\ &\quad+\sum_{n=2}^{N-1}\frac{1}{n!}g^{(n)}(\varphi_\omega)\sum_{\substack{\boldsymbol{m}^1+\cdots+\boldsymbol{m}^{n+1}=\boldsymbol{m}\\ \boldsymbol{m}^1,\dots,\boldsymbol{m}^{n+1}>\boldsymbol{0}}}\prod_{j=1}^{n}\Big(\varphi_\omega\varphi_{\boldsymbol{m}^j}+\varphi_\omega\varphi_{\bar{\boldsymbol{m}}^j}\\ &\qquad+\sum_{\substack{\boldsymbol{m}^{j,1}+\boldsymbol{m}^{j,2}=\boldsymbol{m}^j\\ \boldsymbol{m}^{j,1},\boldsymbol{m}^{j,2}>\boldsymbol{0}}}\varphi_{\boldsymbol{m}^{j,1}}\varphi_{\bar{\boldsymbol{m}}^{j,2}}\Big)\varphi_{\bar{\boldsymbol{m}}^{n+1}} \end{aligned} \tag{10}$$

とおく．ここで，$\boldsymbol{m}=(j,k)\in\mathbb{Z}^2$ に対し，$\boldsymbol{m}=(j,k)>\boldsymbol{0}$ は $j\ge 0$，$k\ge 0$ かつ $(j,k)\neq(0,0)$ であることと定め，$\bar{\boldsymbol{m}}=(k,j)$ と定める．このとき，

$$-\Delta\varphi[\omega,z]=-\sum_{0\le j,k<N}z^j\bar{z}^k\Delta\varphi_{j,k}[\omega] \tag{11}$$

$$\begin{aligned} g(|\varphi[\omega,z]|^2)\varphi[\omega,z]&=\sum_{0\le j,k<N}z^j\bar{z}^k g(\varphi_\omega^2)\varphi_{j,k}[\omega]\\ &\quad+\sum_{0\le j,k<N,\,j+k\neq 0}z^j\bar{z}^k\big(g'(\varphi_\omega^2)\varphi_\omega^2(\varphi_{j,k}[\omega]+\varphi_{k,j}[\omega])+g_{j,k}\big)+I_g \end{aligned} \tag{12}$$

$$
\begin{aligned}
-iD_z\varphi\tilde{z} &= -\sum_{0\le j,k<N,j+k\neq 0} z^j\bar{z}^k \sum_{\substack{0\le j^1,k^1,l\\ j^1+l=j,k^1+l=k}} (j^1\lambda_l\varphi_{j^1,k^1} - k^1\lambda_l\varphi_{j^1,k^1}) + I_z \\
&= -\sum_{0\le j,k<N,j+k\neq 0} z^j\bar{z}^k(j-k)\lambda(\omega)\varphi_{j,k} - \sum_{1\le l<N-1}(|z|^{2l}z\lambda_l\zeta_+ - |z|^{2l}\bar{z}\lambda_l\zeta_-) \\
&\quad -\sum_{0\le j,k<N,j+k\neq 0} z^j\bar{z}^k \sum_{\substack{0\le j^1,k^1,l\\ j^1+l=j,k^1+l=k\\ 2\le j^1+k^1}} (j^1\lambda_l\varphi_{j^1,k^1} - k^1\lambda_l\varphi_{j^1,k^1}) + I_z \qquad (13)
\end{aligned}
$$

となる．ここで，

$$
\lambda_{j.k} = \begin{cases} \lambda_j, & j=k+1, \\ \lambda_k, & j+1=k, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}
$$

とする．さらに，

$$
K_{j,k}[\omega] = g_{j,k} - \sum_{\substack{0\le j^1,k^1,l\\ j^1+l=j,k^1+l=k\\ 2\le j^1+k^1}} (j^1\lambda_l\varphi_{j^1,k^1} - k^1\lambda_l\varphi_{j^1,k^1}) \qquad (14)
$$

とおくと，$j+k>0$ ならば，

$$
(-\Delta+\omega_*)\varphi[\theta,\omega,z] + g(|\varphi[\theta,\omega,z]|^2)\varphi[\theta,\omega,z] - iD\varphi[\theta,\omega,z]\left(0,0,-\sum_{j=0}^{N-2}|z|^{2j}z\lambda_j(\omega)\right) \qquad (15)
$$

の $z^j\bar{z}^k$ 係数が 0 になることと，

$$
\begin{aligned}
(-\Delta+\omega+g(\varphi_\omega^2)+g'(\varphi_\omega^2)\varphi_\omega^2)\varphi_{j,k} + g'(\varphi_\omega^2)\varphi_\omega^2\varphi_{k,j} - (j-k)\lambda(\omega)\varphi_{j,k} \\
-(\lambda_{j,k}\zeta_+ - \lambda_{k,j}\zeta_-) + K_{j,k} = 0 \qquad (16)
\end{aligned}
$$

であることが同値である．

Case $j=k=0$

方程式 (15) の $z^0\bar{z}^0$ 係数は

$$
(-\Delta+\omega+g(\varphi_\omega^2)\varphi_\omega^2)\varphi_{0,0} = 0
$$

であるから，$\varphi_{0,0}[\omega]=\varphi_\omega$ だったので，(16) が成立する．

Case $j=1,k=0$

方程式 (16) は

$$(-\Delta+\omega+g(\varphi_\omega^2)+g'(\varphi_\omega^2)\varphi_\omega^2)\varphi_{1,0}+g'(\varphi_\omega^2)\varphi_\omega^2\varphi_{0,1}-\lambda\varphi_{1,0}=0$$

であるから，$\varphi_{1,0}=\zeta_+,\varphi_{0,1}=\zeta_-$ とすれば，(16) が成立する．同様に，$j=0,k=1$ の場合も (16) が成立する．

Case $j=k,j+k=L$

$0\le j',k'\le L/2,j'+k'<L$ について，$\varphi_{j',k'}\in H^{s,m},\lambda_{j',k'}\in\mathbb{R}$ が存在して、(16) が成立すると仮定する．このとき，(16) は

$$(-\Delta+\omega+g(\varphi_\omega^2)+g'(\varphi_\omega^2)\varphi_\omega^2)\varphi_{j,j}+g'(\varphi_\omega^2)\varphi_\omega^2\varphi_{j,j}+K_{j,j}=0$$

である．このとき，実数値関数 $K_{j,j}$ は $H^{s,m}$ に属し，$0\le j',k'\le L/2,j'+k'<L$ となる $\varphi_{j',k'},\lambda_{j',k'}$ によって定められている．よって，$L_{\omega,+}=-\Delta+\omega+g(\varphi_\omega^2)+2g'(\varphi_\omega^2)\varphi_\omega^2$ の kernel は自明であるので，(16) の解 $\varphi_{j,j}\in H^{s,m}$ が一意に求まる．

Case $j=k+1,j+k=L$ と $j+1=k,j+k=L$

$0\le j',k'<L/2+1,j'+k'<L$ について，$\varphi_{j',k'}\in H^{s,m},\lambda_{j',k'}\in\mathbb{R}$ が存在して、(16) が成立すると仮定する．このとき，(16) はそれぞれ

$$\begin{aligned}&(-\Delta+\omega+g(\varphi_\omega^2)+g'(\varphi_\omega^2)\varphi_\omega^2)\varphi_{j,j-1}\\&\qquad+g'(\varphi_\omega^2)\varphi_\omega^2\varphi_{j-1,j}-\lambda\varphi_{j,j-1}-\lambda_{j,j-1}\zeta_++K_{j,j-1}=0\\&(-\Delta+\omega+g(\varphi_\omega^2)+g'(\varphi_\omega^2)\varphi_\omega^2)\varphi_{j-1,j}\\&\qquad+g'(\varphi_\omega^2)\varphi_\omega^2\varphi_{j,j-1}+\lambda\varphi_{j-1,j}+\lambda_{j-1,j}\zeta_-+K_{j-1,j}=0\end{aligned}$$

である．このとき，実数値関数 $K_{j,j-1}$ と $K_{j-1,j}$ は $H^{s,m}$ に属し，$0\le j',k'<L/2+1,j'+k'<L$ となる $\varphi_{j',k'},\lambda_{j',k'}$ によって定められている．よって，$\lambda_{j,j-1}=\lambda_{j-1,j}$ として，(16) は

$$(\mathcal{H}_\omega-\lambda)\begin{pmatrix}\varphi_{j,j-1}\\\varphi_{j-1,j}\end{pmatrix}-\lambda_{j,j-1}\zeta+\begin{pmatrix}K_{j,j-1}\\-K_{j-1,j}\end{pmatrix}=0 \tag{17}$$

と表せるので，

$$-\lambda_{j,j-1}(\zeta,\sigma_3\zeta)_{L^2}+\left(\begin{pmatrix}K_{j,j-1}\\-K_{j-1,j}\end{pmatrix},\sigma_3\zeta\right)_{L^2}=0$$

となるようにすれば，

$$\begin{pmatrix}\varphi_{j,j-1}\\\varphi_{j-1,j}\end{pmatrix}\perp\sigma_3\zeta$$

となるような (17) の解 $\varphi_{j,j-1},\varphi_{j-1,j}$ が $H^{s,m}$ でただ一つ定まる．

Case $1<|j-k|<N, j+k=L$

$0\le j'\le j, 0\le k'\le k, j'+k'<L$ または $0\le j'\le k, 0\le k'\le j, j'+k'<L$ について，$\varphi_{j',k'}\in H^{s,m},\lambda_{j',k'}\in\mathbb{R}$ が存在して、(16) が成立すると仮定する．このとき，(16) はそれぞれ

$$(-\Delta+\omega+g(\varphi_\omega^2)+g'(\varphi_\omega^2)\varphi_\omega^2)\varphi_{j,k}+g'(\varphi_\omega^2)\varphi_\omega^2\varphi_{k,j}-(j-k)\lambda(\omega)\varphi_{j,k}+K_{j,k}=0 \tag{18}$$

$$(-\Delta+\omega+g(\varphi_\omega^2)+g'(\varphi_\omega^2)\varphi_\omega^2)\varphi_{k,j}+g'(\varphi_\omega^2)\varphi_\omega^2\varphi_{j,k}-(k-j)\lambda(\omega)\varphi_{k,j}+K_{k,j}=0 \tag{19}$$

である．このとき，$K_{j,k}$ と $K_{k,j}$ は $H^{s,m}$ に属し，$0\le j'\le j, 0\le k'\le k, j'+k'<L$ または $0\le j'\le k, 0\le k'\le j, j'+k'<L$ となる $\varphi_{j',k'},\lambda_{j',k'}$ によって定められている．連立方程式 (18) と (19) を書き換えると

$$(\mathcal{H}_\omega-(j-k)\lambda)\begin{pmatrix}\varphi_{j,k}\\ \varphi_{k,j}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}K_{j,k}\\ -K_{k,j}\end{pmatrix}=0$$

かつ $0<|j-k|\le N-1$ であるから，(18) と (19) の解 $\varphi_{j,k},\varphi_{k,j}$ が $H^{s,m}$ でただ一つ定まる．

以上より，L に関する数学的帰納法より，$0\le j,k<N$ に対して，$z^j\bar{z}^k$ の係数が 0 になるように，$\{\lambda_j\}_{j=0}^{N-2}\subset C^1(\mathcal{O}',\mathbb{R})$ と $\{\varphi_{j,k}\}_{0\le j,k,j+k<N}\subset C^1(\mathcal{O},\Sigma)$ を定めることができる．このとき，z^N と $\bar{z}^N$ の $\omega=\omega_*$ での係数をそれぞれ G_+,G_- とすれば，定理の主張が成立する．特に，

$$G_+=K_{N,0}[\omega_*],\quad G_-=-K_{0,N}[\omega_*]$$

である．

3　定理 4 の証明

引きつづき，定理 4 を証明する．定理 2 の証明で，$z,\bar{z}$ について，N 次の項で 0 にできていない項は $(N,0),(0,N)$ に対応する項で，$N+1$ 次の項で 0 にできていない項は $(N+1,0),(N,1),(1,N),(0,N+1)$ に対応する項である．よって、$(N,0),(0,N)$ に対応する連立方程式

$$(\mathcal{H}_\omega-N\lambda)\begin{pmatrix}\varphi_{N,0}\\ \varphi_{0,N}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}K_{N,0}\\ -K_{0,N}\end{pmatrix}=0 \tag{20}$$

を解けばよい．

仮定 (H4) が成立することと (H5) が成立しないことより，

$$\begin{aligned}0=&-\frac{\pi}{2\sqrt{N\lambda-\omega_*}}\int_{|\xi|^2=N\lambda-\omega_*}|(\mathcal{F}(W^*\mathfrak{G}))_\uparrow(\xi)|^2 d\sigma(\xi)\\=&\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathrm{Re}\big(((-\Delta+\omega_*)\sigma_3-N\lambda(\omega_*)-i\varepsilon)^{-1}\sigma_3W^*\mathfrak{G},iW^*\mathfrak{G}\big)_{L^2}\\=&\mathrm{Re}((\mathcal{H}_{\omega_*}-N\lambda(\omega_*)-i0)^{-1}\sigma_3\mathfrak{G},i\mathfrak{G})_{L^2}\end{aligned}\tag{21}$$

である．ここで，

$$\mathfrak{G}=\begin{pmatrix}G_+\\G_-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}K_{N,0}[\omega_*]\\-K_{0,N}[\omega_*]\end{pmatrix}.$$

レゾルベント等式より

$$\begin{aligned}&(\mathcal{H}_{\omega_*}-N\lambda(\omega_*)-i0)^{-1}\sigma_3\mathfrak{G}\\=&((-\Delta+\omega_*)\sigma_3-N\lambda(\omega_*)-i0)^{-1}(\sigma_3\mathfrak{G}-V(\mathcal{H}_{\omega_*}-N\lambda(\omega_*)-i0)^{-1}\sigma_3\mathfrak{G})\end{aligned}\tag{22}$$

である．ここで，$V=\mathcal{H}_{\omega_*}-(-\Delta+\omega_*)\sigma_3$．(21) と (22) より

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\ (-\Delta+\omega_*-(N\lambda(\omega_*)+i0)\sigma_3)^{-1}(\mathfrak{G}-\sigma_3V(\mathcal{H}_{\omega_*}-N\lambda(\omega_*)-i0)^{-1}\sigma_3\mathfrak{G}),\\&\qquad i\mathfrak{G}-i\sigma_3V(\mathcal{H}_{\omega_*}-N\lambda(\omega_*)-i0)^{-1}\sigma_3\mathfrak{G})_{L^2}\\=&\mathrm{Re}((\mathcal{H}_{\omega_*}-N\lambda(\omega_*)-i0)^{-1}\sigma_3\mathfrak{G},i\mathfrak{G})_{L^2}\\&+\mathrm{Re}((\mathcal{H}_{\omega_*}-N\lambda(\omega_*)-i0)^{-1}\sigma_3\mathfrak{G},-i\sigma_3V(\mathcal{H}_{\omega_*}-N\lambda(\omega_*)-i0)^{-1}\sigma_3\mathfrak{G})_{L^2}=0\end{aligned}\tag{23}$$

である．ここで，

$$\boldsymbol{f}=\begin{pmatrix}f_+\\f_-\end{pmatrix}=\mathfrak{G}-\sigma_3V(\mathcal{H}_{\omega_*}-N\lambda(\omega_*)-i0)^{-1}\sigma_3\mathfrak{G}$$

とおく．$\mathfrak{G}$ と V の各成分は $H^{s,m}(s,m>0)$ だから，f_+,f_- も $H^{s,m}(s,m>0)$ である．(23) かつ

$$\mathrm{Re}\ ((-\Delta+\omega_*+N\lambda(\omega_*)+i0)^{-1}f_-,if_-)_{L^2}=\mathrm{Re}\ ((-\Delta+\omega_*+N\lambda(\omega_*))^{-1}f_-,if_-)_{L^2}=0$$

より，

$$\mathrm{Re}\ ((-\Delta+\omega_*-(N\lambda(\omega_*)+i0))^{-1}f_+,if_+)_{L^2}=0.\tag{24}$$

ここで，$(-\Delta+\omega_*+N\lambda(\omega_*)+i0)^{-1}f_-$ は

$$(-\Delta+\omega_*+N\lambda(\omega_*))u=f_-$$

の解であり，$f_- \in H^{s,m}$ かつ $\omega_* + N\lambda(\omega_*) > 0$ であるので，$(-\Delta + \omega_* + N\lambda(\omega_*) + i0)^{-1} f_- \in H^{s,m}$．さらに，$\hat{f}_+ \in H^{m,s}_{rad}$ かつ (24) より，$|\xi|^2 = N\lambda(\omega_*) - \omega_*$ となる ξ に対して，$\hat{f}_+(\xi) = 0$ である．特に十分大きな m に対して，

$$\int_0^\infty \frac{r^2}{|N\lambda(\omega_*) - \omega_* - r^2|^2} |\hat{f}_+(r)|^2 dr < \infty.$$

ただし，$\hat{f}_+(r) = \hat{f}_+(\xi)$ $(|\xi| = r)$ とみなす．同様に，任意の自然数 l に対して，十分大きな m を取れば，

$$\int_0^\infty r^2 \left| (\Delta)^l \left(\frac{1}{|N\lambda(\omega_*) - \omega_* - r^2|^2} \hat{f}_+(r) \right) \right|^2 dr < \infty.$$

よって，$(-\Delta + \omega_* - (N\lambda(\omega_*) + i0))^{-1} f_+ \in H^{s,l}$．レゾルベント等式 (22) より，$-(\mathcal{H}_{\omega_*} - N\lambda(\omega_*) - i0)^{-1}\sigma_3 \mathfrak{G}$ は $H^{s,m}(s, m > 0)$ に属し，(20) の解であるので，

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \varphi_{N,0}[\omega] \\ \varphi_{0,N}[\omega] \end{pmatrix} &= -\left(\mathcal{H}_{\omega_*} - N\lambda(\omega_*) - i0\right)^{-1} \sigma_3 \mathfrak{G}, \\
R_{N,0}[\omega] &= K_{N,0}[\omega] - K_{N,0}[\omega_*], \\
R_{0,N}[\omega] &= -K_{N,0}[\omega] + K_{0,N}[\omega_*]
\end{aligned}$$

として，(15) の $z^{N+1}, z^N \bar{z}, z\bar{z}^N, \bar{z}^{N+1}$ の係数をそれぞれ $G_{N+1,0}, G_{N,1}, G_{1,N}, G_{0,N+1}$ と定めれば，定理 4 が得られる．

参考文献

[1] H. Berestycki, T. Cazenave, *Instabilité des états stationnaires dans les équations de Schrödinger et de Klein-Gordon non linéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris **293**, (1981), 489–492.

[2] V. S. Buslaev, G. Perel'man, *On the stability of solitary waves for nonlinear Schrödinger equations. Nonlinear evolution equations*, 75–98, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 **164**, Adv. Math. Sci., **22**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

[3] T. Cazenave, P. L. Lions, *Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations*, Commun. Math. Phys. **85** (1982), 549–561.

[4] T. Cazenave, F. B. Weissler, *The cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in H^s*, Nonlinear Anal. **14** (1990), 807–836.

[5] S. Cuccagna, *On asymptoric stability of ground states of NLS*, Reviews in Mathematical Physics, **15**, no. 8 (2003) 877–903.

[6] S. Cuccagna, M. Maeda, *Revisiting asymptotic stability of solitons of nonlinear Schrödinger equations via refined profile method*, J. Evol. Equ. **22**, 51 (2022).

[7] S. Cuccagna, T. Mizumachi, *On Asymptotic Stability in Energy Space of Ground States for Nonlinear Schrödinger Equations*, Commun. Math. Phys. 284, 51–77 (2008)

[8] M. Grillakis, J. Shatah, W. Strauss, *Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry. I*, J. Funct. Anal. **74** (1987), no. 1, 160–197.

[9] T. Kato, *On nonlinear Schrödinger equations* Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **46** (1987), no. 1, 113–129.

[10] M. Maeda, Y Yamazaki, *Center stable manifold for ground states of nonlinear Schrödinger equations with internal modes*, arXiv:2206.08156.

[11] A. Soffer, M. I. Weinstein, *Multichannel nonlinear scattering for nonintegrable equations*, Comm. Math. Phys. **133** (1990), no. 1, 119–146.

[12] M. I. Weinstein, *Modulational stability of ground states of nonlinear Schrödinger equations*, SIAM J. Math. Anal. **16** (1985) 472–491.

[13] G. Zhou, I.M. Sigal, *Relaxation of Solitons in Nonlinear Schrdinger Equations with Potential*, Advances in Mathematics **216**, Issue 2, 443–490.