非線形拡散による解の特異性*

東京大学大学院数理科学研究科† 柳田 英二
Eiji Yanagida
Graduate School of Mathematical Sciences
University of Tokyo

本稿は，放物型偏微分方程式に対する特異性を保持する解についての報告である．拡散を伴う系において特異性を保持するための主なメカニズムとしては

(i) 外部からのエネルギーの注入 [4,5,8]

(ii) 特異性を持つポテンシャル項 [1,6,10]

(iii) 優線形の反応項 [2]

(iv) 特異点近傍での遅い拡散 [3,7,9]

が考えられるが，これまでの研究によってそれぞれに対して詳しい解析が行われ，顕著な性質が徐々に明らかになってきた．ここでは (iv) に関し，特に空間 1 次元の場合における最近の進展について解説する．

(iv) のようなメカニズムを内包する方程式として，具体的には非線形拡散を伴う方程式

$$u_t = \Delta u^m$$

を考える．この方程式は $m = 1$ のときは通常の熱方程式であり，$m > 1$ のときは透過媒質方程式と呼ばれる．$0 < m < 1$ のときは fast diffusion equation と呼ばれることが多いが，その理由は解 u が小さいところでは拡散の効果が極めて強くなるからである．逆に解の特異点（解が無限

[0]〒 153-8914 東京都目黒区駒場 3 − 8 − 1

大に発散する点）の近傍では拡散の効果が小さくなって特異性が崩れにくくなることから，空間次元やパラメータの値によっていろいろなタイプの特異性が現れる [3,7,9].

以下では，空間 1 次元として $0 < m < 1$ の場合の正値解についてを考える．方程式の解 $u(x,t)$ が $x > \xi(t)$ に対して定義され，$x = \xi(t)$ で特異性を持つ，すなわち

$$\lim_{x \downarrow \xi(t)} u(x,t) = \infty, \qquad t \in \mathbb{R},$$

であると仮定しよう．ただし特異点 $\xi(t)$ は一般に t に滑らかに依存する関数である．この場合，

$$u_t = (u^m)_{xx}, \qquad x \in (\xi(t), \infty), \tag{1}$$

を考えることになる．$\xi(t)$ が定数の場合は定在特異点と呼ばれ，このような特異点を持つ解の例としては

$$u(x,t) = \left\{ \frac{2m(1+m)}{1-m} \cdot \frac{t}{(x-\xi)^2} \right\}^{\frac{1}{1-m}}, \qquad (x,t) \in (\xi, \infty) \times (0, \infty),$$

がある．$\xi(t)$ が t に依存して変化する場合には移動特異点と呼ぶ．具体例としては特異進行波解

$$u(x,t) = h(c)(x - ct)^{-\frac{1}{1-m}}, \qquad x \in (ct, \infty),\ t \in \mathbb{R}.$$

がある．ただし $c > 0$ とし，

$$h(c) := \left\{ \frac{m}{(1-m)c} \right\}^{\frac{1}{1-m}}$$

である．

より一般の特異解を扱うために，初期値問題

$$\begin{cases} u_t = (u^m)_{xx}, & x > \xi(t),\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x > \xi(0), \end{cases} \tag{2}$$

を考える．ここで初期値 $u_0(x)$ は $x \in (\xi(0), \infty)$ について非負かつ連続であると仮定する．初期値問題 (2) の解が以下の性質を持つとき，これを特異解という．

(S1) $u(x,t)$ は $x \in (\xi(t), \infty)$ について C^2 級，$t \in (0,T)$ について C^1 級.

(S2) 各 $t > 0$ に対して $u(x,t) \to \infty$ $(x \downarrow \xi(t))$.

(S3) $(\xi(0), \infty)$ 内の任意の x の閉区間において $u(x,t) \to u_0(x)$ $(t \downarrow 0)$.

特異解の存在を示すための一つの方法は，各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，カットオフされた初期値とディリクレ境界条件に対する次の問題の有界な解を考えることである．

$$\begin{cases} u_t = (u^m)_{xx}, & x > \xi(t),\ t > 0, \\ u(\xi(t), t) = n, & t > 0, \\ u(x,0) = \min\{u_0(x), n\}, & x > \xi(0). \end{cases} \tag{3}$$

すると $\{u_n\}$ は各 $x > \xi(t)$ と $t > 0$ において n について単調増加な列であり，n が十分大きければ，u_n は (2) の解の近似となる．もし $\{u_n\}$ が $n \to \infty$ のとき (2) の解に収束するとき，この解を最小特異解という．実際，もし他の特異解が存在すれば，これは最小特異解より必ず大きい．

以下では，文献 [11] において示された結果の概略についてまとめる．まず，$\xi(t)$ が非減少の場合の特異解の存在について次の定理が成り立つ．

定理 1. $\xi(t)$ が $t \in [0,T)$ について非減少ならば，(2) は $t \in [0,T)$ に対して少なくとも 1 つの特異解が存在する．

逆に $\xi(t)$ が左方向に動くときには，burning core（$n \to \infty$ のとき $\{u_n\}$ が発散するような領域）が現れる．

定理 2. $t \in (0,T)$ に対して $\xi(t) < \xi(0)$ であると仮定する．このとき (3) の解の列 $\{u_n\}$ は以下の性質を持つ．

(i) 各 $t \in (0,T)$ に対し，$(\xi(t), \xi(0))$ 内の任意の閉区間において一様に $u_n(x,t) \to \infty$ $(n \to \infty)$ が成り立つ．

(ii) 各 $t \in (0,T)$ に対し，$(\xi(0), \infty)$ において $u_n(x,t) \to u_{min}(x,t)$ $(n \to \infty)$ が成り立つ．ここで $u_{min}(x,t)$ は (2) において $\xi(t) \equiv \xi(0)$ としたときの最小特異解である．

次の定理は特異点 $\xi(t)$ の近傍での解の挙動に関するものである．これは上で与えた具体例からもわかるように，定在特異点と移動特異点では漸近挙動が異なることを注意しておく．

定理 3. $\xi(t)$ は $t \in [0,T)$ について非増加であるとする．このとき (2) の特異解は以下の性質を持つ．

(i) $\xi(t) > \xi(0)$ をみたす $t \in (0,T)$ に対してある $\alpha(t) > 0$ および $\beta(t) > 0$ が存在し，

$$\alpha(t)\{x-\xi(t)\}^{-\frac{1}{1-m}} \le u(x,t) \le \beta(t)\{x-\xi(t)\}^{-\frac{2}{1-m}}, \quad x \in (\xi(t), \xi(t)+1),$$

が成り立つ．

(ii) $\xi'(t) > 0$ をみたす $t \in (0,T)$ に対して

$$u(x,t) = h(\xi'(t))\{x-\xi(t)\}^{-\frac{1}{1-m}} + o(\{x-\xi(t)\}^{-\frac{1}{1-m}}) \qquad (x \downarrow \xi(t))$$

が成り立つ．

さて，特異解に対しては $\xi(t)$ で $+\infty$ に発散するという緩い条件を課しているだけなので，初期値が複雑な挙動をする場合には解の一意性は自明ではなくなる．実際，(2) の特異解の一意性を示すためにはある程度の条件を課す必要がある．ここではまず，一意性が成り立つための簡単な十分条件を与えよう．

定理 4. 初期値 $u_0(x)$ が $x \in (\xi(0), \infty)$ について非負かつ非増加であるとする．このとき (2) はただ一つの（最小）特異解を持つ．

初期値 $u_0(x)$ が $x \in \xi(0)$ の近傍で複雑な振る舞いをする場合には，特異解の一意性が保証されるかどうかすぐにはわからない．しかしながら，初期値 $u_0(x)$ が $x \in \xi(0)$ の近傍において非増加な場合には，さらに以下のような条件を追加することによって一意性を示すことができる．

(A1) $u_0(x)$ は $x \in (\xi(0), \infty)$ について正かつ連続．

(A2) $u_0(x)$ は $x = \xi(0)$ の近傍で非増加で $u_0(x) \to \infty$ $(x \downarrow \xi(0))$.

(A3) $\liminf_{x\to\infty} x^{2/(1-m)} u_0(x) > 0$.

(A4) $\left\{u_0(x)^m\right\}'' / u_0(x)$ は $(\xi(0), \infty)$ において下に有界．

もし初期値がこの条件をみたせば，解は各時刻 $t > 0$ において同じ性質を持つことが示される．

定理 5. (A1)~(A4) を仮定する．このとき (2) はただ一つの特異解を持つ．

次の結果は，例として与えた特異進行波解が漸近安定であることを示している．

定理 6. 初期値が $u_0(x) \to 0 \ (x \to \infty)$ をみたすとする．もし $\xi(t)$ が $\xi'(t) \to c > 0 \ (t \to \infty)$ をみたせば，(2) の特異解は $x \in (\xi(t)+\rho, \infty)$ について一様に

$$u(x,t) \to h(c)(x-ct)^{-\frac{1}{1-m}} \qquad (t \to \infty)$$

をみたす．ここで $\rho > 0$ は任意の定数である．

$\xi(t)$ がすべての $t \in \mathbb{R}$ について定義されているとき，$t \in \mathbb{R}$ に対して定義された (1) の解を（時間）全域解という．次の定理は全域解の存在に関する結果である．

定理 7. $\xi(t)$ がある定数 $C_1, C_2, C_3 > 0$ に対して

$$0 < C_1 \le \xi'(t) \le C_2 < \infty, \quad |\xi''(t)| < C_3, \qquad t \in \mathbb{R},$$

をみたせば，(1) に全域特異解が存在する．

最後に，2 点で特異性を持つような解について述べる．$\xi(t)$ は t について非減少，$\eta(t)$ は非増加であると仮定し，（時間に依存した）有界区間上の初期値問題

$$\begin{cases} u_t = \left(u^m\right)_{xx}, & x \in (\xi(t), \eta(t)),\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in (\xi(0), \eta(0)), \end{cases} \tag{4}$$

を考える．この問題の特異解（区間の両端において発散している解）の存在は定理 1 と同様にして示すことができる．ここでは区間 $(\xi(t), \eta(t))$ が一点に縮む場合について考える．

定理 8. $t \in (0,T]$ に対して $\xi'(t) > 0$ および $\eta'(t) < 0$ であり，また $\eta(t) - \xi(t) \to 0 \ (t \uparrow T)$ をみたすと仮定する．このとき，任意の $\delta \in (0,T)$ に対してある定数 $C_1, C_2 > 0$ が存在し，(4) の特異解は

$$C_1\{\eta(t)-\xi(t)\}^{-\frac{1}{1-m}} \le \min_{x \in (\xi(t),\eta(t))} u(x,t) \le C_2\{\eta(t)-\xi(t)\}^{-\frac{1}{1-m}}, \quad t \in (T-\delta, T).$$

以上の定理は適当な比較関数の構成，交点数非増大の原理，無限次元力学系理論などを用いて証明されるが，その詳細については論文 [11] で公表の予定である．

文献

1. P. Baras and J. A. Goldstein, The heat equation with a singular potential, Trans. Amer. Math. Soc. **284** (1984), 121–139.
2. S. Sato and E. Yanagida, Solutions with moving singularities for a semilinear parabolic equation, J. Differential Equations **246** (2009), 724–748.
3. J. L. Vazquez and M. Winkler, The evolution of singularities in fast diffusion equations: Infinite-time blow-down, Siam J. Math. Anal. **14** (2011) , 1499-1535.
4. J. Takahashi and E. Yanagida, Time-dependent singularities in the heat equation, Commun. Pure Appl. Anal. **14** (2015), 969–979.
5. J. Takahashi and E. Yanagida, Time-dependent singularities for a semilinear parabolic equation with absorption, Commun. Contemp. Math. **18** (2016), 1550077. (27 pages).
6. J.-L. Chern, G. Hwang, J. Takahashi and E. Yanagida, On the evolution equation with a dynamic Hardy-type potential, J. Evol. Equ. **21** (2021), 2141–2165.
7. M. Fila, J. Takahashi and E. Yanagida, Solutions with moving singularities for equations of porous medium type, Nonlinear Analysis **179** (2019), 237–253.
8. M. Fujii, I. Okada and E. Yanagida, Isolated singularities in the heat equation behaving like fractional Brownian motion, J. Math. Anal. Appl. **504** (2021), No. 125322.
9. M. Fila, P. Macková, J. Takahashi and E. Yanagida, Anisotropic and isotropic persistent singularities of solutions of the fast diffusion equation, Differential and Integral Equations **35** (2022), 729–748.
10. I. Okada and E. Yanagida, Probabilistic approach to the heat equation with a dynamic Hardy-type potential, Stochastic Process. Appl. **145** (2022), 204–225.
11. M. Fila, J. Takahashi and E. Yanagida, Solutions with moving singularities for a one-dimensional nonlinear diffusion equation, in preparation.