RBF 法を用いた３次元球殻熱対流に関する数値実験

植田　侑利（京大理・物理気候 M2）・向川　均（京大理）・榎本　剛（京大防災研）

1.　はじめに

RBF 法とチェビシェフノードを利用した手法の２つの離散化手法を組み合わせ、３次元球殻内におけるマントルの熱対流の時間発展の様子を数値計算により求める。Wright et al. (2010) を参照して数値実験を行い、最終的に熱対流の形状パラメータ依存性を検証する。

2.　マントルの３次元球殻熱対流モデル

マントルはブジネスク流体と仮定し、次の支配方程式と境界条件を満たすとする。

支配方程式（無次元）：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \tag{2.1}$$

$$\nabla \cdot [\eta(\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^T)] + Ra\, T\hat{\boldsymbol{r}} = \nabla p \tag{2.2}$$

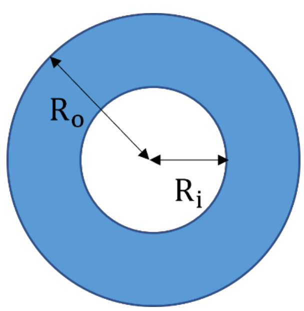
$$\frac{\partial T}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla T = \nabla^2 T \tag{2.3}$$

境界条件（無次元）：

$$u_r|_{r=R_i,R_o} = 0 \tag{2.4}$$

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right)\bigg|_{r=R_i,R_o} = r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\lambda}{r}\right)\bigg|_{r=R_i,R_o} = 0 \tag{2.5}$$

$$T(R_i,\theta,\lambda) = 1, T(R_o,\theta,\lambda) = 0 \tag{2.6}$$



第１図.　球殻断面

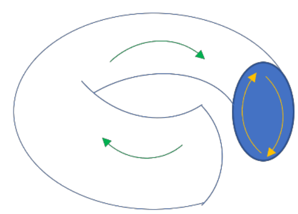
支配方程式はそれぞれ、連続の式、運動方程式、エネルギー保存の式を示す。また境界条件は、境界での不浸透性、応力なし条件、境界での温度を示す。

ソレノイドベクトル場（すべての点で発散が 0 となる場）では、速度場$\boldsymbol{u}$はポロイダルポテンシャルΦとトロイダルポテンシャルΨを用いて、

$$\boldsymbol{u} = \nabla \times \nabla \times \left((\Phi r)\hat{\boldsymbol{r}}\right) + \nabla(\Psi \hat{\boldsymbol{r}})$$

と書き表せる（Chandrasekhar(1961)）。

流体が等粘性で境界条件(2.5)（応力なし条件）を満たす場合、流体は純ポロイダル（$\Psi = 0$）とみなせる。



第２図.　トロイダル方向（緑）と
ポロイダル方向（橙）

本研究ではマントルを等粘性流体と仮定するため、速度場$\boldsymbol{u}$は、

$$\boldsymbol{u} = \nabla \times \nabla \times \left((\Phi r)\hat{\boldsymbol{r}}\right) \tag{2.7}$$

とΦのみで書き表せる。

$\Omega = \Delta\Phi$を導入し、支配方程式(2.2)に$r \cdot \nabla \times \nabla \times$を施して式(2.7)を用いると、次の方程式が得られる。

$$\Delta\Omega = Ra\, rT$$

$\Omega = \Delta\Phi$と合わせると、次の１組のポアソン方程式が得られる。

$$\Delta_s \Omega + \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \Omega}{\partial r}\right) = Ra\, rT \tag{2.8}$$

$$\Delta_s \Phi + \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) = r^2 \Omega \tag{2.9}$$

また、境界条件(2.4)、(2.5)をポロイダルポテンシャルで書き換えると、

$$\Phi|_{r=R_i,R_o} = 0 \qquad (2.11)$$

$$\left.\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}\right|_{r=R_i,R_o} = 0 \qquad (2.12)$$

となる。

3.　離散化

3.1RBF 法（球面方向）

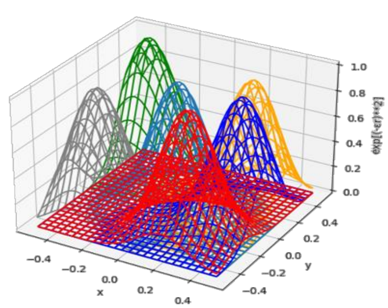
RBF 法は、動径基底関数(RBF：Radial Basis Function)の重み付け重ね合わせで関数近似する手法であり、任意の関数$f(x)$は RBF であるϕを用いて、

$$f(x_i) = \sum_{j=1}^{N} c_j\phi(d_{ij}) \quad (i = 1, \dots, N)$$

と展開できる。RBF として用いられる関数はいくつかあるが、本研究ではガウス型 RBF（GA RBF）：

$$\phi(d_{ij}) = \exp\left[-(\epsilon d_{ij})^2\right]$$

を用いる。d_{ij}はN個の節点間のユークリッド距離とし、ϕはd_{ij}にのみ依存するため、用いる座標系に依存しない。



第 3 図．ガウス型 RBF

3.2ラグランジュ補間（動径方向）

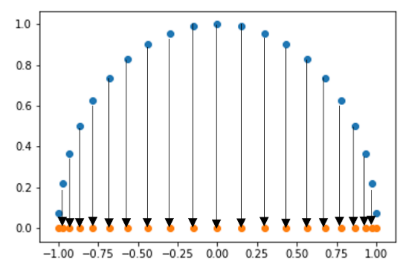
$M+2$個のチェビシェフノード：

$$x_j = \cos\frac{j}{M+1}\pi \quad (j = 0,1, \dots, M, M+1)$$

を用いて、任意の関数$f(x)$をラグランジュ補間で次のように離散化する。

$$f(x) = \sum_{k=0}^{M+1} m_k l_k(x)$$

$$l_k(x) = \prod_{\substack{m=0 \\ m\neq k}}^{M+1} \frac{x - x_m}{x_k - x_m}$$



第 4 図．チェビシェフノード

4.　支配方程式の解法

4.1 支配方程式の離散化

モデルの支配方程式(2.8)、(2.9)を、各離散化手法で離散化した微分演算子を用いて離散化すると、

$$L_s\Omega + \Omega L_r = Ra\,TR \qquad (4.1)$$

$$L_s\Phi + \Phi L_r = \Omega R^2 \qquad (4.2)$$

となる。ここで、Ωの境界条件を求めるために、影響行列法を用いて、ΦとΩを次のように表す。

$$\Omega = \Omega_h + Z\Omega^{R_i} + \Xi\Omega^{R_o} \qquad (4.3)$$

$$\Phi = \Phi_h + Z\Phi^{R_i} + \Xi\Phi^{R_o} \qquad (4.4)$$

Ω_h、Φ_hは各変数の特解成分、Ω^{R_i}、Ω^{R_o}、Φ^{R_i}、Φ^{R_o}は各変数の同次解成分、Z、Ξは係数行列を示す。微分演算子の固有値分解を用いて各成分を導出し、温度場TからポロイダルポテンシャルΦを導出する。

4.2 速度場の導出

各速度成分は、ポロイダルポテンシャルΦから

$$\boldsymbol{u} = \nabla\times\nabla\times\left((\Phi r)\hat{\boldsymbol{r}}\right) = (u_r, u_\theta, u_\lambda)$$
$$= \left(\frac{1}{r}\Delta_s\Phi, \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}(\Phi r), \frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\lambda}(\Phi r)\right)$$

と求められる。離散化した演算子を用いて表すと、

$$\boldsymbol{u} = (L_s\Phi R^{-1}, D_\theta\Phi R D_r R^{-1}, D_\lambda\Phi R D_r R^{-1})$$

と書き表せる。

4.3 温度場の時間変化率と時間積分

温度場の時間変化率は、エネルギー保存の式(2.3)から、

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\left(u_r\frac{\partial T}{\partial r} + u_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial\theta} + u_\lambda\frac{1}{r\cos\theta}\frac{\partial T}{\partial\lambda}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_s T + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)$$

となる。離散化した微分演算子を用いると、

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\left(\begin{array}{r} u_r\circ(TD_r + B_r) + u_\theta\circ TD_\theta R^{-1} \\ +u_\lambda\circ TD_\lambda R^{-1}\end{array}\right) + L_s T R^{-2} + (TL_r + B_g)R^{-2}$$

と表せる。

4.4 節点配置

球面上には、準一様な節点の球面螺旋節点(Bauer 2000)に従いN個、動径方向にはチェビシェフノードを用いてM個（境界含め$M+2$個）配置する。各節点は次のように配置する。

球面螺旋節点：

$$\lambda = m\theta_{co} = m(\pi-\theta)\ mod\ 2\pi$$
$$m = \sqrt{N\pi}$$
$$\cos\theta_k = 1 - \frac{2k-1}{N} \qquad (k = 1, \dots, N)$$

チェビシェフノード：

$$r_j = \frac{R_o + R_i}{2} + \frac{R_o - R_i}{2}\cos\frac{j}{M+1}\pi \qquad (j = 1, \dots, M)$$

$Ra = 7000$の場合、節点数は$N = 1024$、$M = 21$とする。

5. 数値計算

温度場Tの初期状態には、

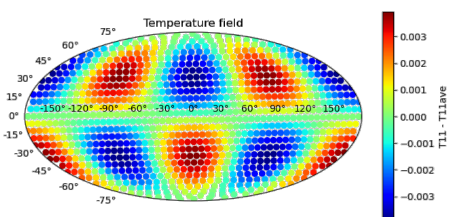
a. 四面体テストケース：

$$T = \frac{R_i(r-R_o)}{r(R_i-R_o)} + 0.01Y_3^2(\theta,\lambda)\sin\left(\frac{r-R_i}{R_o-R_i}\right)$$

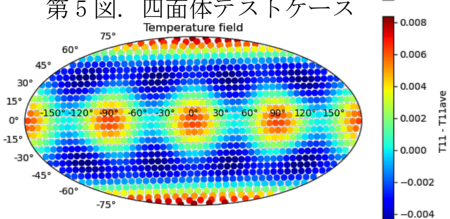
b. 立方体テストケース：

$$T = \frac{R_i(r-R_o)}{r(R_i-R_o)} + 0.01\left[Y_4^0(\theta,\lambda) + \frac{5}{7}Y_4^4(\theta,\lambda)\right]\sin\left(\frac{r-R_i}{R_o-R_i}\right)$$

を用いる。レイリー数は$Ra = 7000$とする。また、$R_o - R_i = 1.0$、$R_i/R_o = 0.55$とした。

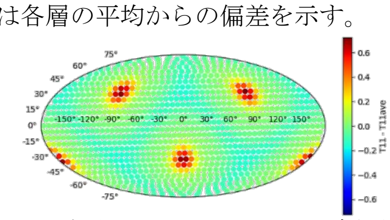


第5図. 四面体テストケース

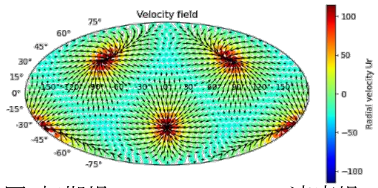


第6図. 立方体テストケース

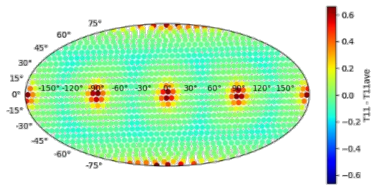
時間刻み幅を$\mathrm{d}t = 1.0\times10^{-4}$とし、$0 \le t \le 1$で時間積分した。$t = 1.0$での温度場と速度場は次のようになる。ただし、温度場は各層の平均からの偏差を示す。



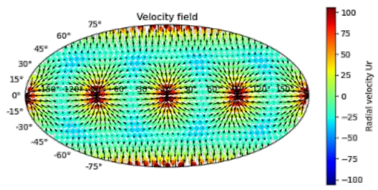
第7図. 初期場 a の$t = 1.0$での温度偏差場



第 8 図. 初期場 a の $t = 1.0$での速度場



第 9 図. 初期場 b の $t = 1.0$での温度偏差場



第 10 図. 初期場 b の$t = 1.0$での速度場

$t = 1.0$の温度場および速度場には、初期温度場に類似した温度分布パターンおよび速度分布パターンに収束する様子が見られた。このことから、温度場、速度場の収束パターンは、ある程度初期場に依存することが分かった。

6. まとめと今後の展望

RBF 法を用いた３次元球殻内熱対流の数値実験を行い、温度場および速度場の時間発展を数値計算によって求めた。$Ra = 7000$のレイリー数が比較的低い場合、温度場と速度場はそれぞれ定常解に収束し、収束した温度場および速度場は、初期温度場に依存性を持つことが分かった。今後はレイリー数を大きくした際、形状パラメータを変更すると、温度場の解がどのように変動するのかについて数値実験を行い、調査していきたい。

参考文献

Enomoto,T, 2020: 動径基底函数を用いた球面上のセミ・ラグランジュ移流, 京都大学防災研究所、京都大学防災研究所年報. B, 63, 158-164

Flyer, N. and Wright, G, B., 2007: Transport schemes on a sphere using radial basis functions, *J. Comput. Phys.*, *226*., 1059-1084

Peyret, R., 2002: Spectral Methods for Incompressible Viscous Flow, Springer, New York.

Trefethen, L. N., 2000: Spectral Methods in MATLAB, Soc. for Ind. and Appl. Math, Philadelphia, Pa.

Wright, G. B., N. Flyer, and D. A. Yuen, 2010: A hybrid radial basis function-pseudspectral method for thermal _convection in a 3-D spherical shell, *Geochemistry. Geophysics. Geosystems.*, *11,* Q07003, doi:10.1029/2009GC002985.

亀山　真典, 2010: マントル対流の「数値」「流体」「力学」(URL: https://www.gfd-dennou.org/seminars/gfdsemi/2010-08-20/01_kameyama/lecture01/pub-web/slide.pdf) (参照日 2023 年 1 月 23 日)