京都大学防災研究所年報 第 66 号 B
DPRI Annuals, No. 66 B, 2023

極配置法に基づく建物振動の統一的理解の連結制振への拡張

Extension of Unified Understanding Based on Pole Allocation for Building Vibration to Joint Damper

池田芳樹・松本祐輝 (1)

Yoshiki IKEDA and Yuki MATSUMOTO (1)

(1) 京都大学大学院工学研究科（現・清水建設株式会社）

(1) Graduate School of Engineering, Kyoto University (currently, Shimizu Corporation)

Synopsis

For two adjacent buildings connected by a joint damper, an inverse problem is formulated based on the pole allocation method in control theory. The structural system is simplified as a two-degree-of-freedom (2-DOF) lumped-mass damped shear model. The unified governing equation, which expresses the relationship between an assigned control target and the structural parameters for an earthquake-resistant building, a seismically isolated building, or a passively controlled building, is extended to structural control by a joint damper. The introduced equation automatically constrains the variances of the structural parameters under the assigned modal properties. The integration of the pole allocation method and the fixed-point theory directly estimates the additional damping effect on the objective buildings from the optimum capacity of joint damper, which improves the trial-and-error steps at the preliminary design stage. Numerical examples verify the theoretical integration using a 20-DOF building model in which two 10-DOF models are connected by a joint damper between the top lumped masses.

キーワード：建物，連結制振，統一的理解，極配置，定点理論，制御効果
Keywords: building, joint damper, unified understanding, pole allocation, fixed-point theory, control effect

1. はじめに

著者らは，多質点系1本棒せん断振動型モデルに制御工学で広く利用されている極配置法を適用して，建物の振動を共通に支配する数式が存在することを明らかにした（池田，2021；Ikeda，2021；池田・松本，2022；松本・池田，2022；Ikeda and Matsumoto, 2022；松本・池田，2023a）．この式は統一式または支配方程式と呼ばれ，基礎免震，中間層免震，同調型マスダンパ（TMD: Tuned Mass Damper）によるパッシブ制振さらには層間ダンパによるパッシブ制振で，固有振動モードに対応する極を指定すると，免震・制振装置を表現するパラメータの値が自動的に制約されることを意味している．この式によって，免震・制振構造の制御効果を物理的に理解し易くなり，TMDでは試行錯誤的な装置の設計を改善することが可能になった．本論文では，今まで1棟の建物で考察してきた統一式を，隣り合う建物2棟を繋いだダンパによって振動低減を図る連結制振に拡張している（池田・松本，2023；松本・池田，2023b）．

連結制振は，互いに隣接する建物をダンパで連結して，1棟または2棟の振動低減を図る制振である．その基本特性の把握では，2棟の建物を2本の均質な断面をもつ連続体せん断梁でモデル化した文献（Luco and De Barros, 1998；Tubaldi, 2015）があるものの，多くは2棟を質点系でモデル化している．建物

を質点系でモデル化したほぼ全ての研究は，ダンパを模擬したダッシュポットのみで2つの1質点1自由度系（S-DOF : single degree of freedom）非減衰モデルを繋いだ2質点2自由度系（2-DOF : two degrees of freedom）モデルに，TMDと同様に定点理論を適用した研究（岩浪ら，1986）から派生している．制御対象構造物が非減衰の場合には，構造物の入力に対する出力の周波数伝達関数にダッシュポットの減衰係数を変化させても動かすことができない2つの不動点が現れ，この不動点は定点と言われている．周波数伝達関数の高さを定点より下げることはできないため，その定点で伝達関数が最大値となるように減衰係数を決定することが定点理論の考え方である．これは，TMDの定点理論（Den Hartog，1956）と同じダンパーの最適化手法である．定点は2つあり，慣例でP点とQ点と言われることが多い．これら2つの定点に対応して，最適な減衰係数を求める2次方程式が2つ存在するため，定点理論は2つの減衰係数の平均をダッシュポットの最適値にしている．この定点理論は，ダッシュポットの減衰係数の最適化手法を提案しており，連結制振を考察する上で基準となるダンパ設計法になっている．

定点理論は，同一著者によって連結部にダッシュポットと並列にばねも置かれたモデルに拡張されたが，それは数値解析に依存する最適化であった（岩浪ら，1993）．その後，この問題で閉じた解が誘導された（蔭山ら，2000）．連結部にばねを追加すると，2棟間の質量比が同じ場合にも制御効果が得られるようになるが，その値が大きくなると周波数伝達関数の定点で極大値が一致しなくなり，ばねがない場合の定点理論が定義する「最適減衰」は得られなくなる（岩浪ら，1993）．また，追加した連結ばねに依存しない定点が存在することも明らかにされた（蔭山ら，2000）．これらの周波数伝達特性は閉じた解でより明確になった．

さらに，2棟の質量比と剛性比の積が一定の場合に，連結ばねが不要になることも指摘された（蔭山ら，2000）．連結ばねが必要な顕著な場合は，2棟の質量が大きく異なり，かつ小さい質量をもつ建物単独の固有振動数が大きい質量をもつ建物単独の固有振動数より低い時に限られる．この連結ばねが必要な場合は，高さがほぼ同じ建物が隣接する状況では稀であると考えられる．連結制振は，建物2棟の振動性状すなわち揺れの違いを利用する制振である．連結ばねを加えることは，2棟の揺れを揃えることにも機能するため，原理上やや矛盾がある．

連結制振では，隣接建物を異なる高さで複数のダンパで繋ぐ方法もある（Xu, He and Ko, 1999；Zhang and Xu, 1999；Zhu, Ge and Huang, 2011）．本論文は，隣接2棟の建物高さがほぼ同じ場合を想定しており，最上階付近にダンパを設置し，2棟を同時に振動低減することを考えている．

連結制振に関する文献（岩浪ら，1986；岩浪ら，1993；蔭山ら，2000）は，制御対象を2-DOFの非減衰モデルに制約しているものの，ダンパ自体の最適減衰を求める問題をほぼ解決した．その一方で，制振の目的である構造物に与える減衰効果を直接表現する理論にはなっていない．ダンパの最適化には，定点理論のほかにも，モード減衰比を最大にする方法（Basili, De Angelis and Pietrosanti, 2019）やダンパの平均的なエネルギ吸収を大きくする方法（Zhu and Iemura, 2000）も提案されているが，やはり減衰効果を直接表現してはいない．また，パラメトリック解析や数値解析に依存するダンパの最適化や効果の提示（Xu *et al*., 1999；Zhang and Xu, 1999；Zhu *et al*., 2011；Gattulli, Potenza and Lepidi, 2013）は，特に設計の初期段階で構造設計者にやや不親切であり，閉じた形の式で効果を評価できることが望まれる．

連結部にダッシュポットとばねがあるモデルに定点理論を適用した場合に，2棟の質量比と振動数比により固有モード特性が3つに分類できるという指摘（楊ら，2007）は，連結制振の特性を新たな観点で調べた結果である．ダッシュポットのみを連結部で考慮する初期のモデルでも，固有モード特性が分類された（満田ら，2014）．そこでは，2棟の建物の質量比と剛性比の関係でモード特性が異なることが，閉じた表現で明らかにされた．モード特性を分類している点は楊ら（2007）と同じであるが，ダッシュポットの大きさを変動させると，それに連動してモード特性が変わるという観点がある．これは，ダッシュポットの最適減衰を重要視する定点理論では見過ごされていた観点であった．質量比と剛性比の積が一定の場合は，蔭山ら（2000）が指摘する連結ばねが不要な場合に相当し，2棟への付加減衰効果をダッシュポットの減衰係数のある範囲内で，厳密に同じにすることができることも明らかにされている．そして，この条件に該当しなくても，実用上の減衰係数の範囲では，2棟の付加減衰効果をほぼ同じにできることが示されている．

連結制振でも，アウトフレームといった副構造を利用した方法（伊藤ら，2008； Moon，2011；Fu，2013；Pipitone，Barone and Palmeri，2018；Reggio, Restuccia and Ferro，2018；Reggio, Restuccia, Martelli and Ferro，2019；Pipitone, Barone and Palmeri，2020）や慣性質量ダンパによる連結制振（村瀬・竹脇, 2021）では，主構造の応答のみを抑えることを志向している．多くの制振は，設置した装置を揺らして地震エネルギを吸収する原理であるため，2つの構造物を同

時に応答低減しないことは比較的簡単と考えられる．しかしながら，実建物への適用を考慮すると，片方の建物の応答が著しく大きくなってしまう制振は現実的ではなく，2棟の応答を同時低減する観点は重要である．

以上の研究背景を踏まえて，本論文は次の構成になっている．

第2章では，極配置法に基づく建物振動の統一的理解を連結制振に拡張し，それを定点理論と統合することで，隣接2棟で同じ減衰効果を予測する式を誘導する．2.1節から2.4節で，今まで1棟の建物で考察してきた統一式を，2-DOFモデルにおける連結制振に拡張する．2.5節では，既往の定点理論（岩浪ら，1986）の座標変換を行い，新たな座標系で最適減衰の閉じた数式を誘導する．定点理論は機械分野から提案されており，制御対象構造物の変位は入力の変位を含む絶対座標系で表現されている．建物では，入力の変位は制御できない地表の変位を意味するため，定点理論を建物に適用するためには，建物の変位を地表からの相対量に変更する必要がある．それに伴って，ダッシュポットの最適減衰係数の表現を確認する必要もある．2.6節では，2.4節までで誘導した統一式を座標変換した定点理論と統合する．この統合により，2棟の建物に等しく与える減衰効果が，建物の質量比と振動数比から得られるようになる．

第3章では，2.6節で得た減衰効果予測式の基本的性質を調べる．予測式が，2棟の質量比と固有振動数比のみに依存することから，それらの変動によって効果がどのように変化していくのかを主に示す．

第4章では，減衰効果予測式の多自由度系（M-DOF: multi degree of freedom）モデルにおける利用法を，2棟の10-DOF建物モデルを最上質点で連結した20-DOFモデルの固有値解析を用いて提案する．2.6節で誘導された効果予測式は2-DOFモデルに基づいているため，それをM-DOFモデルに適用するための補正法を示す．固有値解析と地震応答解析では，2棟の応答をほぼ同じにする目的が達成できていることを示す．固有値解析は建物の減衰比という観点から，地震応答解析は時刻歴応答という観点から，目的が達成できていることを調べている．

最後に第5章では本論文の成果を整理する．

2. 連結制振への極配置法の適用

2.1 運動方程式と状態方程式

1 質点 S-DOF 減衰建物を連結制振した 2 質点 2-DOF モデルを考える（Fig.1）．

このモデルが地震を受けた場合の運動方程式は，

$$\begin{bmatrix} m_A & 0 \\ 0 & m_B \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_A \\ \ddot{x}_B \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} c_A+c_J & -c_J \\ -c_J & c_B+c_J \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_A \\ \dot{x}_B \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_A+k_J & -k_J \\ -k_J & k_B+k_J \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_A \\ x_B \end{Bmatrix}=-\begin{bmatrix} m_A & 0 \\ 0 & m_B \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}\ddot{y}_0 \tag{1}$$

で表現される．ここに，

m_A ：建物 A を表現する質点の質量
m_B ：建物 B を表現する質点の質量
k_A ：建物 A のせん断剛性
k_B ：建物 B のせん断剛性
k_J ：連結部の軸ばね
c_A ：建物 A の減衰係数
c_B ：建物 B の減衰係数
c_J ：連結ダンパの減衰係数
x_A ：建物 A の質点の基礎固定端からの変位
x_B ：建物 B の質点の基礎固定端からの変位
$\ddot{y}_0$ ：地動入力加速度

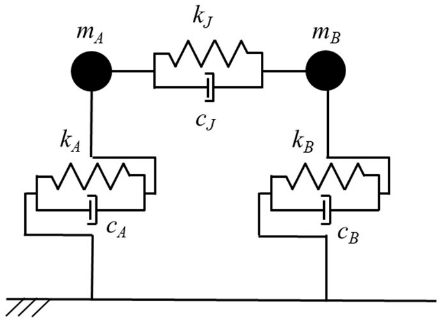

Fig.1 2-DOF model for joint damper

ω_A を建物 A 単体の固有円振動数，ω_B を建物 B 単体の固有円振動数，h_A を建物 A 単体の減衰係数，h_B を建物 B 単体の減衰係数，μ を建物 A の建物 B に対する質量比とすると，

$$\omega_A^2=\frac{k_A}{m_A},\quad \omega_B^2=\frac{k_B}{m_B} \tag{2}$$

$$2h_A\omega_A=\frac{c_A}{m_A},\quad 2h_B\omega_B=\frac{c_B}{m_B} \tag{3}$$

$$\mu=\frac{m_B}{m_A} \tag{4}$$

の関係がある．連結ダンパの見かけの固有振動数 ω_J と減衰比 h_J を

$$\omega_J^2=\frac{k_J}{m_B} \tag{5}$$

$$2h_J\omega_B=\frac{c_J}{m_B} \tag{6}$$

として定義すると，式(7)と式(8)を得る．

$$\frac{k_J}{m_A}=\frac{m_B}{m_A}\frac{k_J}{m_B}=\mu\omega_J^2 \tag{7}$$

$$\frac{c_J}{m_A}=\frac{m_B}{m_A}\frac{c_J}{m_B}=2\mu h_J\omega_B \tag{8}$$

式(2)から式(8)を運動方程式(1)に代入すると

$$\begin{Bmatrix}\ddot{x}_A\\ \ddot{x}_B\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}2h_A\omega_A+2\mu h_J\omega_B & -2\mu h_J\omega_B\\ -2h_J\omega_B & 2h_B\omega_B+2h_J\omega_B\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{x}_A\\ \dot{x}_B\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\omega_A^2+\mu\omega_J^2 & -\mu\omega_J^2\\ -\omega_J^2 & \omega_B^2+\omega_J^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_A\\ x_B\end{Bmatrix}=-\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}\ddot{y}_0 \tag{9}$$

が得られ，これを状態方程式に書き直す．

$$\begin{Bmatrix}\ddot{x}_A\\ \ddot{x}_B\\ \dot{x}_A\\ \dot{x}_B\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}-2h_A\omega_A-2\mu h_J\omega_B & 2\mu h_J\omega_B & -\omega_A^2-\mu\omega_J^2 & \mu\omega_J^2\\ 2h_J\omega_B & -2h_B\omega_B-2h_J\omega_B & \omega_J^2 & -\omega_B^2-\omega_J^2\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{x}_A\\ \dot{x}_B\\ x_A\\ x_B\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}1\\ 1\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}\ddot{y}_0 \tag{10}$$

2.2 指定する極による特性方程式

Fig.1 の解析モデルは 2 つの振動モードをもつ．制御目標となる j 次モードの固有円振動数を ω_j，それに対応するモード減衰比を h_j とおくと，その特性方程式は

$$(s^2+2h_1\omega_1 s+\omega_1^2)(s^2+2h_2\omega_2 s+\omega_2^2)=0 \tag{11}$$

となる．これを極 s で展開すれば，次式が得られる．

$$s^4+2(h_1\omega_1+h_2\omega_2)s^3+(\omega_1^2+4h_1h_2\omega_1\omega_2+\omega_2^2)s^2+2\omega_1\omega_2(h_2\omega_1+h_1\omega_2)s+\omega_1^2\omega_2^2=0 \tag{12}$$

2.3 系の特性方程式

状態方程式(10)に対応する特性方程式は

$$\begin{vmatrix}-2h_A\omega_A-2\mu h_J\omega_B-s & 2\mu h_J\omega_B & -\omega_A^2-\mu\omega_J^2 & \mu\omega_J^2\\ 2h_J\omega_B & -2h_B\omega_B-2h_J\omega_B-s & \omega_J^2 & -\omega_B^2-\omega_J^2\\ 1 & 0 & -s & 0\\ 0 & 1 & 0 & -s\end{vmatrix}=0 \tag{13}$$

である．この行列式に公式

$$|A|=|A_{22}||A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}| \tag{14}$$

を適用する．分割行列を

$$A_{11}=\begin{bmatrix}-2h_A\omega_A-2\mu h_J\omega_B-s & 2\mu h_J\omega_B\\ 2h_J\omega_B & -2h_B\omega_B-2h_J\omega_B-s\end{bmatrix},\quad A_{12}=\begin{bmatrix}-\omega_A^2-\mu\omega_J^2 & \mu\omega_J^2\\ \omega_J^2 & -\omega_B^2-\omega_J^2\end{bmatrix},\quad A_{21}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ A_{22}=\begin{bmatrix}-s & 0\\ 0 & -s\end{bmatrix} \tag{15}$$

とおくと，容易に系の特性方程式が得られる．

$$\begin{aligned}&s^4+2\{h_A\omega_A+h_B\omega_B+(1+\mu)h_J\omega_B\}s^3\\ &+\{\omega_A^2+\omega_B^2+(1+\mu)\omega_J^2\\ &\quad+4(h_Ah_B\omega_A\omega_B+h_Ah_J\omega_A\omega_B+\mu h_Bh_J\omega_B^2)\}s^2\\ &+2\{h_A\omega_A(\omega_B^2+\omega_J^2)\\ &\quad+h_B\omega_B(\omega_A^2+\mu\omega_J^2)+h_J\omega_B(\omega_A^2+\mu\omega_B^2)\}s\\ &+\omega_A^2\omega_B^2+\mu\omega_B^2\omega_J^2+\omega_A^2\omega_J^2=0\end{aligned} \tag{16}$$

2.4 極配置問題

目標とする特性方程式(12)に系の特性方程式(16)を一致させる条件は，

$$h_A\omega_A+h_B\omega_B+(1+\mu)h_J\omega_B=h_1\omega_1+h_2\omega_2 \tag{17}$$

$$\begin{aligned}&\omega_A^2+\omega_B^2+(1+\mu)\omega_J^2\\ &\quad+4(h_Ah_B\omega_A\omega_B+h_Ah_J\omega_A\omega_B+\mu h_Bh_J\omega_B^2)\\ &\quad=\omega_1^2+4h_1h_2\omega_1\omega_2+\omega_2^2\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}&h_A\omega_A(\omega_B^2+\omega_J^2)+h_B\omega_B(\omega_A^2+\mu\omega_J^2)\\ &\quad+h_J\omega_B(\omega_A^2+\mu\omega_B^2)=\omega_1\omega_2(h_2\omega_1+h_1\omega_2)\end{aligned} \tag{19}$$

$$\omega_A^2\omega_B^2+\mu\omega_B^2\omega_J^2+\omega_A^2\omega_J^2=\omega_1^2\omega_2^2 \tag{20}$$

の 4 式である．式(19)を式(20)で辺々除すと

$$\begin{aligned}&\frac{h_A\omega_A(\omega_B^2+\omega_J^2)}{\omega_A^2\omega_B^2+\mu\omega_B^2\omega_J^2+\omega_A^2\omega_J^2}\\ &+\frac{h_B\omega_B(\omega_A^2+\mu\omega_J^2)}{\omega_A^2\omega_B^2+\mu\omega_B^2\omega_J^2+\omega_A^2\omega_J^2}\\ &+\frac{h_J\omega_B(\omega_A^2+\mu\omega_B^2)}{\omega_A^2\omega_B^2+\mu\omega_B^2\omega_J^2+\omega_A^2\omega_J^2}=\frac{h_1}{\omega_1}+\frac{h_2}{\omega_2}\end{aligned} \tag{21}$$

を得る．上式の左辺の分子と分母を剛性と減衰係数で表現する．

$$\omega_A^2\omega_B^2+\mu\omega_B^2\omega_J^2+\omega_A^2\omega_J^2=\frac{k_Ak_B}{m_Am_B}+\frac{k_Bk_J}{m_Am_B}+\frac{k_Ak_J}{m_Am_B} \tag{22}$$

$$h_A\omega_A(\omega_B^2+\omega_J^2)=\frac{c_A}{2}\left(\frac{k_B}{m_Am_B}+\frac{k_J}{m_Am_B}\right) \tag{23}$$

$$h_B\omega_B(\omega_A^2+\mu\omega_J^2)=\frac{c_B}{2}\left(\frac{k_A}{m_Am_B}+\frac{k_J}{m_Am_B}\right) \tag{24}$$

$$h_J\omega_B(\omega_A^2+\mu\omega_B^2)=\frac{c_J}{2}\left(\frac{k_A}{m_Am_B}+\frac{k_B}{m_Am_B}\right) \tag{25}$$

これら 4 式を用いて，式(21)の左辺を整理すると

$$\begin{aligned}&\frac{c_A(k_B+k_J)}{2(k_Ak_B+k_Bk_J+k_Jk_A)}+\frac{c_B(k_A+k_J)}{2(k_Ak_B+k_Bk_J+k_Jk_A)}\\ &+\frac{c_J(k_A+k_B)}{2(k_Ak_B+k_Bk_J+k_Jk_A)}=\frac{h_1}{\omega_1}+\frac{h_2}{\omega_2}\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left(\frac{c_A}{k_A+\cfrac{1}{\cfrac{1}{k_B}+\cfrac{1}{k_J}}}+\frac{c_B}{k_B+\cfrac{1}{\cfrac{1}{k_A}+\cfrac{1}{k_J}}}+\frac{c_J}{k_J+\cfrac{1}{\cfrac{1}{k_A}+\cfrac{1}{k_B}}}\right)\\ &=\frac{h_1}{\omega_1}+\frac{h_2}{\omega_2}\end{aligned} \tag{27}$$

が得られる．式(27)の左辺の各項で，分母が剛性，

分子は減衰係数になっており, Fig.2 の 3-DOF モデルから得られた

$$\frac{1}{2}\left(\frac{c_1}{k_1}+\frac{c_2}{k_2}+\frac{c_3}{k_3}\right)=\frac{h_1}{\omega_1}+\frac{h_2}{\omega_2}+\frac{h_3}{\omega_3} \tag{28}$$

と同じ型をしている（池田・松本，2022；松本・池田，2023a）．ここで，k_i と c_i はそれぞれ i 層のせん断剛性と減衰係数，ω_j と h_j はそれぞれ j 次モードの固有円振動数と減衰比である．

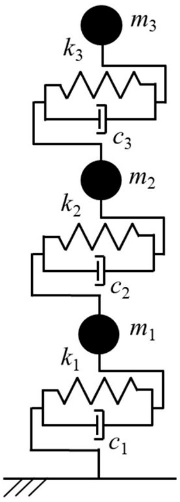

Fig.2　3-DOF model

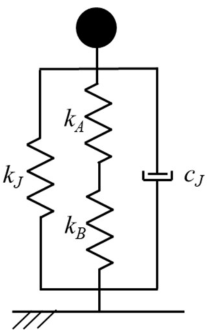

Fig.3　Equivalent S-DOF model to understand the 3rd term on the left side of Equation (27)

式(27)の左辺の第 3 項は，Fig.3 に示すモデルで考えると理解し易い. その分母は k_A と k_B の直列ばねと k_J を並列に配置した合成ばねを表現しており，その合成ばねに分子の c_J が並列に配置されている.

2.5 定点理論における座標変換と最適減衰の閉じた数式表現

2 棟をダッシュポットのみで繋いだ場合の定点理論は，すでに発表されている（岩浪ら，1986）．この文献は機械分野の論文であるため，構造物の変位に入力の変位が含まれる座標系を採用している．この構造物の変位は，建築構造分野では地動を含めた絶対変位という意味である．そこで，定点理論を式(1)が表現する座標系で書き換える.

定点理論では，ダンパに比較してきわめて小さい構造物自体の減衰および 2 棟を繋ぐ軸ばねを無視しているから，式(3)と式(7)で $c_A=c_B=k_J=0$ とおく．その場合には，式(9)は次のように簡略化される.

$$\begin{Bmatrix}\ddot{x}_A\\ \ddot{x}_B\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}2\mu h_J\omega_B & -2\mu h_J\omega_B\\ -2h_J\omega_B & 2h_J\omega_B\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{x}_A\\ \dot{x}_B\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\omega_A^2 & 0\\ 0 & \omega_B^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_A\\ x_B\end{Bmatrix}=-\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}\ddot{y}_0 \tag{29}$$

連結ばねk_J は, 2棟の質量比と剛性比の積が一定の場合には不要となることが指摘されている（蔭山ら，2000）. また，この連結ばねが必要な顕著な場合は，2棟の質量が大きく異なり，かつ小さい質量をもつ建物単独の固有振動数が大きい質量をもつ建物単独の固有振動数より低い場合に限られることも指摘されている．本論文は，高さがほぼ同じ隣接建物の最上階付近にダンパを設置し，2棟を同時に振動低減することを想定している. 連結制振は建物2棟の揺れの違いを利用する制振であり，2棟をばねで繋ぐことは2棟の揺れを揃えることにもなるため，原理上やや矛盾がある.

建物が固有円振動数 ω で地動により強制加振され, 地動変位を $y=Y\exp(i\omega t)$，固定端からの建物変位を $x_A=X_A\exp(i\omega t)$ と $x_B=X_B\exp(i\omega t)$ におくと

$$\begin{bmatrix}\omega_A^2-\omega^2+2i\mu h_J\omega_B\omega & -2i\mu h_J\omega_B\omega\\ -2ih_J\omega_B\omega & \omega_B^2-\omega^2+2ih_J\omega_B\omega\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_A\\ X_B\end{Bmatrix}=\omega^2\begin{Bmatrix}Y\\ Y\end{Bmatrix} \tag{30}$$

から

$$\begin{Bmatrix}X_A\\ X_B\end{Bmatrix}=\frac{\begin{Bmatrix}\omega_B^2-\omega^2+2ih_J\omega_B\omega(1+\mu)\\ \omega_A^2-\omega^2+2ih_J\omega_B\omega(1+\mu)\end{Bmatrix}\omega^2 Y}{(\omega_A^2-\omega^2)(\omega_B^2-\omega^2)+2ih_J\omega_B\omega\{(\omega_A^2-\omega^2)+\mu(\omega_B^2-\omega^2)\}} \tag{31}$$

ここで,

$$\xi=\frac{\omega}{\omega_A},\quad \gamma=\frac{\omega_B}{\omega_A} \tag{32}$$

を導入すると,

$$\begin{Bmatrix}\dfrac{X_A}{Y}\\ \dfrac{X_B}{Y}\end{Bmatrix}=\frac{\begin{Bmatrix}(\gamma^2-\xi^2)+2ih_J\gamma\xi(1+\mu)\\ (1-\xi^2)+2ih_J\gamma\xi(1+\mu)\end{Bmatrix}\xi^2}{(1-\xi^2)(\gamma^2-\xi^2)+2ih_J\gamma\xi\{1+\mu\gamma^2-(1+\mu)\xi^2\}} \tag{33}$$

となり，左辺の振幅比の絶対値は

$$\left|\frac{X_A}{Y}\right|=\sqrt{\frac{(\gamma^2-\xi^2)^2\xi^4+4h_J^2\gamma^2\xi^6(1+\mu)^2}{(1-\xi^2)^2(\gamma^2-\xi^2)^2+4h_J^2\gamma^2\xi^2\{1+\mu\gamma^2-(1+\mu)\xi^2\}^2}}$$

(34)

$$\left|\frac{X_B}{Y}\right| = \sqrt{\frac{(1-\xi^2)^2\xi^4 + 4h_J^2\gamma^2\xi^6(1+\mu)^2}{(1-\xi^2)^2(\gamma^2-\xi^2)^2 + 4h_J^2\gamma^2\xi^2\{1+\mu\gamma^2-(1+\mu)\xi^2\}^2}} \tag{35}$$

となる．建物 A と B それぞれにダンパを表現する c_J に依存しない定点がある．建物 A では，条件(36)が伝達関数(34)の不動点を意味する．

$$\begin{aligned}&(1-\xi^2)^2(\gamma^2-\xi^2)^2 : (\gamma^2-\xi^2)^2\xi^4 \\ &= 4h_J^2\gamma^2\xi^2\{1+\mu\gamma^2-(1+\mu)\xi^2\}^2 : 4h_J^2\gamma^2\xi^6(1+\mu)^2\end{aligned} \tag{36}$$

物理的意味を考えて符号を選択すると，次式を得る．

$$\xi^2 = \frac{2+(1+\gamma^2)\mu}{2(1+\mu)} \tag{37}$$

同様に，建物 B では条件(38)が伝達関数(35)の不動点を意味する．

$$\begin{aligned}&(1-\xi^2)^2(\gamma^2-\xi^2)^2 : (1-\xi^2)^2\xi^4 \\ &= 4h_J^2\gamma^2\xi^2\{1+\mu\gamma^2-(1+\mu)\xi^2\}^2 : 4h_J^2\gamma^2\xi^6(1+\mu)^2\end{aligned} \tag{38}$$

物理的意味を考えて符号を選択すると，次式を得る．

$$\xi^2 = \frac{1+\gamma^2+2\mu\gamma^2}{2(1+\mu)} \tag{39}$$

建物 A の伝達関数で定点高さを求めるために，式(37)を

$$\left|\frac{X_A}{Y}\right|_{h_J=0} = \sqrt{\frac{\xi^4}{(1-\xi^2)^2}} \tag{40}$$

に代入する．

$$\frac{\xi^2}{1-\xi^2} = \pm\frac{2+(1+\gamma^2)\mu}{(1-\gamma^2)\mu} \tag{41}$$

同様に，建物 B の伝達関数で定点高さを求めるために，式(39)を

$$\left|\frac{X_B}{Y}\right|_{h_J=0} = \sqrt{\frac{\xi^4}{(\gamma^2-\xi^2)^2}} \tag{42}$$

に代入する．

$$\frac{\xi^2}{\gamma^2-\xi^2} = \pm\frac{1+\gamma^2+2\mu\gamma^2}{\gamma^2-1} \tag{43}$$

ダンパで移動できない定点の高さを揃える条件は，

$$\frac{2+(1+\gamma^2)\mu}{(1-\gamma^2)\mu} = \pm\frac{1+\gamma^2+2\mu\gamma^2}{\gamma^2-1} \tag{44}$$

となる．上式で負の符号が物理的意味をもち

$$\gamma = \frac{\omega_B}{\omega_A} = \frac{1}{\mu} \tag{45}$$

の関係が得られる．式(45)は文献（岩浪ら，1986）と同じ式であり，座標系に依存しないことがわかる．

2 つの定点の高さを揃える条件(45)を式(40)と式(42)に代入すると，定点の高さが得られる．

$$\left|\frac{X_A}{Y}\right| = \left|\frac{\xi^2}{1-\xi^2}\right| = \left|\frac{\mu+1}{\mu-1}\right| \tag{46}$$

$$\left|\frac{X_B}{Y}\right| = \left|\frac{\xi^2}{\gamma^2-\xi^2}\right| = \left|\frac{\mu+1}{\mu-1}\right| \tag{47}$$

上式で表現される定点（P 点と Q 点という）に対応する無次元振動数は，式(37)と式(39)に式(45)を代入して得られる．

$$\xi_P^2 = \frac{1+\mu}{2\mu} \tag{48}$$

$$\xi_Q^2 = \frac{1+\mu}{2\mu^2} \tag{49}$$

P 点で伝達関数が最大になる減衰（P 点の最適減衰）を求める．式(34)に条件(45)を代入する．

$$\left(\frac{X_A}{Y}\right)^2 = \frac{(\frac{1}{\mu^2}-\xi^2)^2\xi^4 + 4h_J^2\frac{1}{\mu^2}\xi^6(1+\mu)^2}{(1-\xi^2)^2(\frac{1}{\mu^2}-\xi^2)^2 + 4h_J^2\frac{1}{\mu^2}\xi^2\{1+\mu\frac{1}{\mu^2}-(1+\mu)\xi^2\}^2} \tag{50}$$

分母と分子に μ^4 を乗じた

$$\left(\frac{X_A}{Y}\right)^2 = \frac{(1-\mu^2\xi^2)^2\xi^4 + 4\mu^2(1+\mu)^2h_J^2\xi^6}{(1-\xi^2)^2(1-\mu^2\xi^2)^2 + 4(1+\mu)^2h_J^2\xi^2(1-\mu\xi^2)^2} \tag{51}$$

の分母を整理してから，$\lambda = \xi^2$ と置き換える．

$$\begin{aligned}&(1-\xi^2)^2(1-\mu^2\xi^2)^2 + 4(1+\mu)^2h_J^2\xi^2(1-\mu\xi^2)^2 \\ &= \mu^4\lambda^4 + 2\mu^2\{2(1+\mu)^2h_J^2-(1+\mu^2)\}\lambda^3 \\ &\quad + \{\mu^4+4\mu^2+1-8\mu(1+\mu)^2h_J^2\}\lambda^2 \\ &\quad + 2\{2(1+\mu)^2h_J^2-(1+\mu^2)\}\lambda+1\end{aligned} \tag{52}$$

同様に分子を整理して，$\lambda = \xi^2$ と置き換える．

$$\begin{aligned}&(1-\mu^2\xi^2)^2\xi^4 + 4\mu^2(1+\mu)^2h_J^2\xi^6 \\ &= \mu^4\lambda^4 + \{4\mu^2(1+\mu)^2h_J^2 - 2\mu^2\}\lambda^3 + \lambda^2\end{aligned} \tag{53}$$

したがって，式(51)は以下となる．

$$\left(\frac{X_A}{Y}\right)^2 = \frac{\mu^4\lambda^4 + \{4\mu^2(1+\mu)^2h_J^2-2\mu^2\}\lambda^3+\lambda^2}{\left[\begin{aligned}&\mu^4\lambda^4 + 2\mu^2\{2(1+\mu)^2h_J^2-(1+\mu^2)\}\lambda^3 \\ &+\{\mu^4+4\mu^2+1-8\mu(1+\mu)^2h_J^2\}\lambda^2 \\ &+2\{2(1+\mu)^2h_J^2-(1+\mu^2)\}\lambda+1\end{aligned}\right]} \tag{54}$$

式(54)の極大値を得るために λ で微分し，分子だけを考える．

$$\begin{aligned}&\mu^8\lambda^5 + \{8\mu^5(1+\mu)^2h_J^2-\mu^8-4\mu^6\}\lambda^4 \\ &+\{16\mu^3(1+\mu)^4h_J^4-2\mu^3(1+\mu)^2(\mu^3+7\mu+4)h_J^2+4\mu^6+6\mu^4\}\lambda^3 \\ &+\{-16\mu^2(1+\mu)^4h_J^4+8\mu^2(1+\mu)^2(2+\mu^2)h_J^2-6\mu^4-4\mu^2\}\lambda^2 \\ &+\{4\mu^2+1-2(1+\mu)^2(1+3\mu^2)h_J^2\}\lambda-1=0\end{aligned} \tag{55}$$

この式に式(48)から得られる

$$\xi_P^2 = \frac{1+\mu}{2\mu} = \lambda \tag{56}$$

を代入すると

$$\begin{aligned}&\mu^4(1+\mu)^5 + 2\mu^2(1+\mu)^4\{8(1+\mu)^2 h_J^2 - \mu^3 - 4\mu\}\\&+4\mu(1+\mu)^3\{16(1+\mu)^4 h_J^4 - 2(1+\mu)^2(\mu^3+7\mu+4)h_J^2 + 4\mu^3 + 6\mu\}\\&+8\mu(1+\mu)^2\{-16(1+\mu)^4 h_J^4 + 8(1+\mu)^2(2+\mu^2)h_J^2 - 6\mu^2 - 4\}\\&+16(1+\mu)\{4\mu^2 + 1 - 2(1+\mu)^2(1+3\mu^2)h_J^2\} - 32\mu = 0\end{aligned} \tag{57}$$

が得られる．式(57)を h_J に関して整理した

$$\begin{aligned}&-64\mu(1+\mu)^6(1-\mu)h_J^4\\&\quad+8(1+\mu)^3(-\mu^6+6\mu^4-4\mu^3-9\mu^2+12\mu-4)h_J^2\\&\quad-\mu^9-3\mu^8+6\mu^7+18\mu^6-21\mu^5-39\mu^4\\&\qquad+48\mu^3+24\mu^2-48\mu+16=0\end{aligned} \tag{58}$$

は，岩浪ら（1986）の式(14)で表現される Q 点の減衰の式に一致する．すなわち，座標系を変えると P 点と Q 点は反転する．この文献では h_J の係数を因数分解していないが，因数分解により式は簡潔に表現できる．

$$\begin{aligned}&-64\mu(1+\mu)^6(1-\mu)h_J^4\\&\quad-8(1+\mu)^3(1-\mu)^4(\mu+2)^2h_J^2+(1-\mu)^5(\mu+2)^4=0\end{aligned} \tag{59}$$

同様に，Q 点で伝達関数が最大になる減衰（Q 点の最適減衰）を求める．式(55)に対応する式

$$\begin{aligned}&\mu^6\lambda^5+\{8\mu^5(1+\mu)^2h_J^2-\mu^4(4\mu^2+1)\}\lambda^4\\&+\{16\mu^3(1+\mu)^4h_J^4-2\mu^2(1+\mu)^2(4\mu^3+7\mu^2+1)h_J^2+2\mu^4(2+3\mu^2)\}\lambda^3\\&+\{-16\mu^2(1+\mu)^4h_J^4+8\mu^2(1+\mu)^2(1+2\mu^2)h_J^2-2\mu^4(3+2\mu^2)\}\lambda^2\\&+\{\mu^4(4+\mu^2)-2\mu^2(1+\mu)^2(3+\mu^2)h_J^2\}\lambda-\mu^4=0\end{aligned} \tag{60}$$

に，式(49)から得られる

$$\xi_Q^2 = \frac{1+\mu}{2\mu^2} = \lambda \tag{61}$$

を代入すると

$$\begin{aligned}&(1+\mu)^5+2(1+\mu)^4\{8\mu(1+\mu)^2h_J^2-(1+4\mu^2)\}\\&+4(1+\mu)^3\{16\mu(1+\mu)^4h_J^4-2(1+\mu)^2(4\mu^3+7\mu^2+1)h_J^2+2\mu^2(2+3\mu^2)\}\\&+8\mu^2(1+\mu)^2\{-16(1+\mu)^4h_J^4+8(1+\mu)^2(1+2\mu^2)h_J^2-2\mu^2(3+2\mu^2)\}\\&+16\mu^4(1+\mu)\{\mu^2(4+\mu^2)-2(1+\mu)^2(3+\mu^2)h_J^2\}-32\mu^8=0\end{aligned} \tag{62}$$

式(62)を h_J に関して整理した

$$\begin{aligned}&64\mu(1+\mu)^6(1-\mu)h_J^4\\&\quad+8(1+\mu)^3(-4\mu^6+12\mu^5-9\mu^4-4\mu^3+6\mu^2-1]h_J^2\\&\quad+16\mu^9-48\mu^8+24\mu^7+48\mu^6-39\mu^5-21\mu^4\\&\qquad+18\mu^3+6\mu^2-3\mu-1=0\end{aligned} \tag{63}$$

は，岩浪ら（1986）の式(13)で表現される P 点の減衰の式に一致する．この式も因数分解により簡潔に表現できる．

$$\begin{aligned}&64\mu(1+\mu)^6(1-\mu)h_J^4-8(1+\mu)^3(1-\mu)^4(1+2\mu)^2h_J^2\\&\quad-(1-\mu)^5(1+2\mu)^4=0\end{aligned} \tag{64}$$

式(59)と式(64)は h_J^2 に関する 2 次式であるから，2 次方程式の解の公式に当てはめる．P 点の最適減衰は，

$\mu \le 1$ の場合 $$h_{P,J,opt} = \frac{(1-\mu)(2+\mu)}{2(1+\mu)\sqrt{2(1+\mu)}} \tag{65}$$

$1 < \mu$ の場合 $$h_{P,J,opt} = -\frac{(1-\mu)(2+\mu)}{2(1+\mu)\sqrt{2(1+\mu)}} \tag{66}$$

同様に，Q 点の最適減衰を求める．

$\mu \le 1$ の場合 $$h_{Q,J,opt} = \frac{(1-\mu)(1+2\mu)}{2(1+\mu)\sqrt{2\mu(1+\mu)}} \tag{67}$$

$1 < \mu$ の場合 $$h_{Q,J,opt} = -\frac{(1-\mu)(1+2\mu)}{2(1+\mu)\sqrt{2\mu(1+\mu)}} \tag{68}$$

最適減衰比 $h_{J,opt}$ は 2 つの定点で互いに異なるから，それを平均する．式(65)と式(67)の平均が式(69)になり，式(66)と式(68)の平均が式(70)になる．この平均は，座標系を変更して P 点と Q 点を得る式が反転したことが，結果的に最適減衰比に影響しないことを意味している．

$\mu \le 1$ の場合

$$h_{J,opt} = \frac{1-\mu}{4(1+\mu)\sqrt{2(1+\mu)}}\left(2+\mu+\frac{1+2\mu}{\sqrt{\mu}}\right) \tag{69}$$

$1 < \mu$ の場合

$$h_{J,opt} = -\frac{1-\mu}{4(1+\mu)\sqrt{2(1+\mu)}}\left(2+\mu+\frac{1+2\mu}{\sqrt{\mu}}\right) \tag{70}$$

これらを一式にまとめると最適減衰比は次式となる．

$$h_{J,opt} = \frac{|1-\mu|}{4(1+\mu)\sqrt{2(1+\mu)}}\left(2+\mu+\frac{1+2\mu}{\sqrt{\mu}}\right) \tag{71}$$

岩浪ら（1986）による最適減衰の算定法を，座標系を変更した上で閉じた数式で表現することは，次章以降に連結制振に拡張した統一式(27)を利用する上で重要な役割を果たす．

2.6 統一式と定点理論の統合

統一式(27)を定点理論と結び付ける．2.5 節で紹介したように，定点理論は $c_A = c_B = k_J = 0$ を仮定している．その場合，式(27)は

$$\frac{1}{2}\frac{c_J}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{k_A}+\dfrac{1}{k_B}}} = \frac{1}{2}\frac{c_J}{\dfrac{k_A k_B}{k_A + k_B}} = \frac{h_1}{\omega_1} + \frac{h_2}{\omega_2} \tag{72}$$

になる．$h_{J,opt}$ に対応する減衰係数を $c_{J,opt}$ とおくと，式(2)，式(4)および式(32)から

$$c_{J,opt} = 2m_B\omega_B h_{J,opt} = 2\mu\gamma m_A\omega_A h_{J,opt} \tag{73}$$

$$\frac{k_A k_B}{k_A + k_B} = \frac{\mu\gamma^2}{1+\mu\gamma^2} m_A\omega_A^2 \tag{74}$$

式(73)と式(74)を式(72)に代入すると

$$\frac{1+\mu\gamma^2}{\gamma}\frac{h_{J,opt}}{\omega_A} = \frac{h_1}{\omega_1} + \frac{h_2}{\omega_2} \tag{75}$$

を得る．2 棟で減衰比を同じにする目標 ($h = h_1 = h_2$) を掲げると，次式が得られる．

$$\frac{1+\mu\gamma^2}{\gamma}\frac{h_{J,opt}}{\omega_A} = h\left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2}\right) \tag{76}$$

2 棟の非減衰建物がダッシュポットでのみ繋がっているため，近似的に ω_1 と ω_2 は ω_A と ω_B に置き換えられる．どのモードが建物 A になるかは確定できないが，2 棟の減衰効果を同じにするという条件ではそれは問題にならない．

$$\frac{1+\mu\gamma^2}{\gamma}\frac{h_{J,opt}}{\omega_A} = h\left(\frac{1}{\omega_A} + \frac{1}{\omega_B}\right) \tag{77}$$

$$h = \frac{1+\mu\gamma^2}{1+\gamma} h_{J,opt} \tag{78}$$

上式に式(71)を代入すれば，

$$h = \frac{(1+\mu\gamma^2)\left|1-\mu\right|}{4(1+\gamma)(1+\mu)\sqrt{2(1+\mu)}}\left(2+\mu+\frac{1+2\mu}{\sqrt{\mu}}\right) \tag{79}$$

となる．上式は，統一式を定点理論に導入することにより，2 棟の建物に与える減衰効果 h が建物の質量比 μ と振動数比 γ で決まることを意味している．

3. ２質点系モデルによる連結制振の基本特性

Fig.4は，質量比μを0.8，入力の建物Aに対する円振動数比ξを1.25とした場合に，2棟の建物の周波数伝達関数を示している．実線が建物A，破線が建物Bの伝達関数であり，連結ダンパの減衰比h_Jは0.01，0.0835（μ =0.8の時の最適減衰比）および0.5の3種類である．

ダンパの減衰比が0.01の時には，建物Aの伝達関数のピークはξ=1.0で現れ，建物Bの伝達関数のピークはξ=1.25で現れる．ダンパの減衰比が0.5と大きくなると2棟は一体になり，伝達関数のピークは1.0と1.25の平均であるξ=1.12近くに現れる．ダンパの減衰比に依存しないP点とQ点も確認できる．

Fig.5は，建物の質量比μとダンパの最適減衰比$h_{J,opt}$の関係を式(69)と式(70)に基づいて描いている．これらの式によりダンパの最適減衰比の閉じた表現を得ているが，Fig.5は岩浪ら（1986）の文献の図5と同じである．質量比が0.5から2.5の範囲では，式(65)と式(67)との差ならびに式(66)と式(68)との差は小さく，それらの平均である式(69)と式(70)は良い近似を与えている．2棟の質量が同じ場合には，ダンパの最適減衰比はゼロになり，連結制振が成立しない．

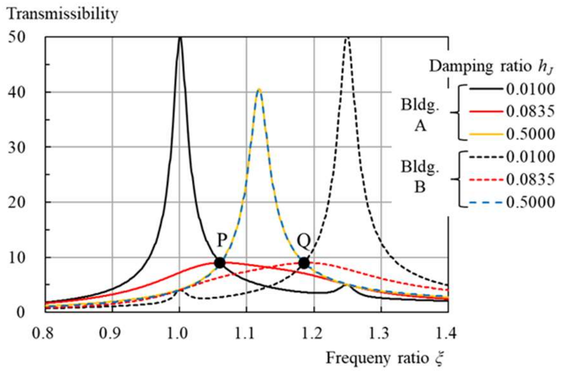

Fig.4　Frequency transmissibilities based on Equations (34) and (35) (μ = 0.8 and ξ =1.25)

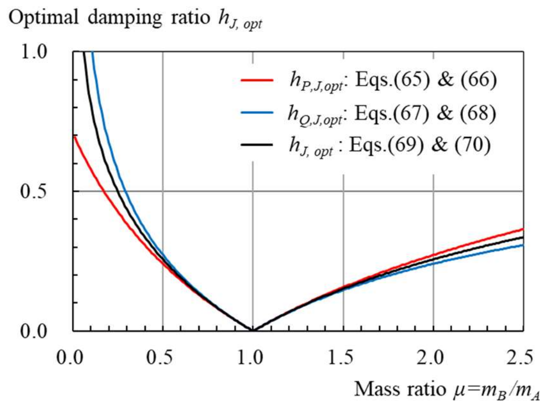

Fig.5　Optimal damping ratio $h_{J,\,opt}$ for joint damper

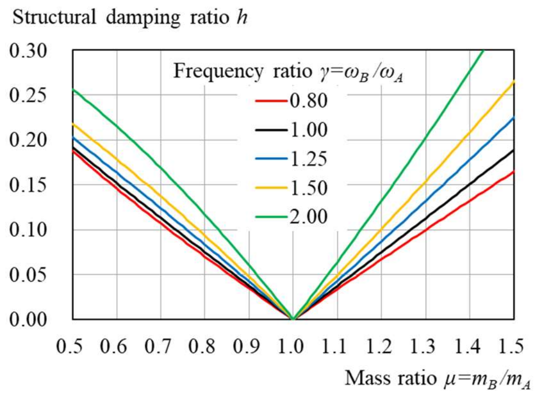

Fig.6　Structural damping ratio h

Fig.6は，2棟の建物の減衰比hを，建物の質量比μを横軸にして式(79)に基づいて描いている．減衰比hは質量比μと固有振動数γの関数であるが，質量比の影響の方が大きい．同じ質量比では固有振動数比が

高い方が建物の減衰は大きくなり，質量比が小さいと固有振動数比の影響を受け難くなっている．統一式と定点理論を統合したことにより，連結制振の目標である建物の減衰効果を容易に予測できるようになった．

本論文は，高さがほぼ同じ隣接建物の最上階付近にダンパを設置し，2棟を同時に振動低減することを想定している．一般に，建物の1次固有振動数は，建物高さと鉄骨造または鉄筋コンクリート造というような構造種別の影響を大きく受ける．その結果，隣接2棟の構造種別が同じならば，2棟の固有振動数比は1.0に近い場合が現実的と考えるべきである．

Fig.5とFig.6は横軸を質量比にしているため，Fig.5をFig.6に重ね合わせることができる（Fig.7）．建物の減衰比hはダンパの最適減衰比$h_{J,opt}$と同じオーダであり，連結制振ではダンパが建物の減衰に直接的に寄与している．これは，離接建物でダンパの大きな反力が確保できるためであり，連結制振の長所としてすでに指摘されていた（蔭山ら，2000）．そして，式(78)の右辺で$h_{J,opt}$に乗じる係数で，この長所の説明が可能になった．

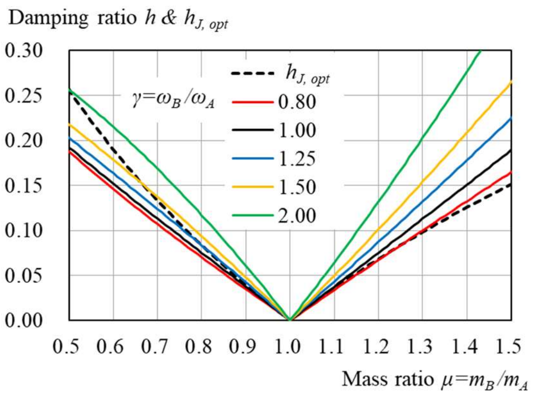

Fig.7　Structural damping ratio h in comparison to optimal damping ratio $h_{J,opt}$ for joint damper

4. 建物減衰予測式の多自由度系での利用法

統一式と定点理論の統合によって得られた建物減衰の予測式(79)は，2-DOFモデルに基づいており，結果として各建物の1次振動モードを対象にしている．本論文は，高さがほぼ同じ隣接建物の最上階付近に連結ダンパを設置して，両棟を同時に振動低減することを想定しているため，主な制御対象は各建物の1次モードである．しかしながら，質点数が増えると，各建物で1次モードの応答低減を目的としても，2次モード以上の影響を考慮する必要がある．ここでは，各建物をM-DOFモデルにした場合で，予測式(79)の利用法を数値解析により示す．

4.1 数値解析モデル

1棟を建物Aとして，10質点10自由度系（10-DOF）1本棒せん断振動型モデルとする．Table 1に，その各質点の質量，各層のせん断剛性と減衰係数を示す．減衰係数は，内部粘性型（剛性比例型）減衰で1次モードに対して1%を与えた場合に対応する値である．建物モデルの総質量は 5000×10^{3}kg（5000ton）である．Table 2に固有振動数とモード減衰比を，Fig.8に1次から3次までのモード形を刺激関数で示す．

Table 1　Structural parameters for Model A

Lumped mass No.	Mass (10^{3}kg)	Story	Stiffness (MN/m)	Damping coefficient (MNs/m)
10	600	10	318.7	1.090
9	450	9	367.7	1.257
8	450	8	441.3	1.509
7	450	7	514.8	1.760
6	470	6	588.4	2.012
5	470	5	656.5	2.347
4	490	4	784.5	2.682
3	510	3	882.6	3.018
2	560	2	980.7	3.353
1	550	1	1078.7	3.688

Table 2　Natural frequencies and modal damping ratios of Model A

Mode No.	Natural frequency (Hz)	Damping ratio (%)
1	0.931	1.00
2	2.389	2.57
3	3.887	4.18
4	5.344	5.74
5	6.686	7.18
6	7.856	8.44
7	8.966	9.63
8	10.01	10.76
9	11.19	12.02
10	12.45	13.38

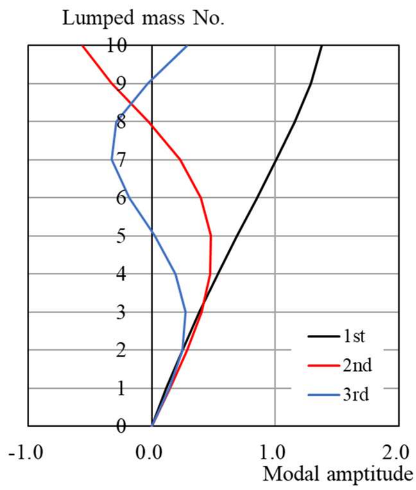

Fig.8　1st to 3rd mode shapes (Model A)

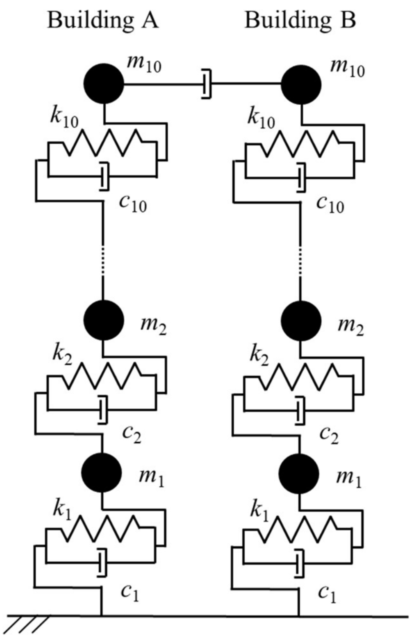

Fig.9 20-DOF model

Table 3 Total mass ratios and 1st frequency ratios for Models B1, B2, B3 and B4

Model	B1	B2	B3	B4
Mass ratio μ	0.9	1.1	0.9	1.1
Frequency ratio γ	1.25	1.25	0.80	0.80

Table 4 Lumped-mass distribution for Models B1, B2, B3 and B4

Lumped mass No.	B1 & B3	B2 & B4
10	540	660
9	405	495
8	405	495
7	405	495
6	423	517
5	423	517
4	441	539
3	459	561
2	504	616
1	495	605
Total mass	4500	5500
Mass ratio μ	0.9	1.1

(Unit for mass: 10^3kg)

Table 5 Stiffness distribution for Models B1, B2, B3 and B4

Story	B1	B2	B3	B4
10	448.2	547.8	183.6	224.4
9	517.1	632.1	211.8	258.9
8	620.6	758.5	254.2	310.7
7	724.0	884.9	296.6	362.5
6	827.4	1011.3	338.9	414.2
5	965.3	1179.9	395.4	483.3
4	1103.2	1348.4	451.9	552.3
3	1241.2	1517.0	508.4	621.3
2	1379.1	1685.5	564.9	690.4
1	1517.0	1854.1	621.3	759.4

(Unit: MN/m)

Table 6 Damping distribution for Models B1, B2, B3 and B4

Story	B1	B2	B3	B4
10	1.226	1.498	0.785	0.959
9	1.414	1.728	0.905	1.106
8	1.697	2.074	1.086	1.328
7	1.980	2.420	1.267	1.549
6	2.263	2.766	1.448	1.770
5	2.640	3.226	1.690	2.065
4	3.017	3.687	1.931	2.360
3	3.394	4.148	2.173	2.655
2	3.771	4.609	2.414	2.951
1	4.148	5.070	2.655	3.246

(Unit: MNs/m)

Table 7 Natural frequencies of Models B1, B2, B3 and B4

Mode No.	B1 & B2	B3 & B4
1	1.164	0.745
2	2.986	1.911
3	4.859	3.110
4	6.680	4.275
5	8.357	5.348
6	9.820	6.285
7	11.21	7.173
8	12.52	8.011
9	13.99	8.951
10	15.57	9.963
Frequency ratio γ	1.25	0.80

(Unit for frequency: Hz)

隣接する建物Bとして，建物Aに対する総質量比μと1次モードの振動数比γを変えたTable 3に示す4モデルを考える．Fig.9に建物Aと建物Bを最上質点で連結した20質点20自由度系（20-DOF）モデルを示す．

これらのモデルの高さ方向の剛性分布は，建物Aの分布の比例倍とする．したがって，建物Bのモード形は建物Aに完全に一致する．減衰は，建物Bでも1次モードに対して1%の内部粘性減衰を仮定する．Table 4からTable 6に，建物Bの4モデルに関する質量，剛性および減衰を示す．Table 7には，4モデルに対応する固有振動数を示す．

4.2 各建物の1次有効質量に対する最適ダンパ減衰

式(79)は，各建物の1次モードを対象にしている．そこで，式(73)に基づいてダンパの最適減衰係数を計算する際に，質量m_Bとして建物Bの1次有効質量を用いる．式(80)で得られる有効質量はモードの規準化に依存せず，その全モード次数にわたる総和は建物の全質量に等しいことが知られている（Clough and Penzien, 1982）．

$$M_j = \frac{(\sum_{i=1}^{n} m_i u_{ij})^2}{\sum_{i=1}^{n} m_i u_{ij}^2} \tag{80}$$

ここに，M_j はj次モードの有効質量，m_i は質点iの質量，u_{ij} は質点iのj次モードの振幅，nは質点数である．例題の20-DOFモデルでは，nは10になる．Table 8に各建物の1次有効質量，1次固有振動数およびダンパの最適減衰を示す．

Table 8　1st effective modal masses, 1st natural frequencies, and optimal damping coefficients for joint dampers

Model	A	B1	B2	B3	B4
Effective modal mass M_1 (10^3kg)	3771	3394	4148	3394	4148
Mass ratio μ	-	0.9	1.1	0.9	1.1
Optimal damp. ratio $h_{J,\,opt}$ (%)	-	3.95	3.57	3.95	3.57
Natural freq. f_1 (Hz)	-	1.164	1.164	0.745	0.745
Freq. ratio γ	-	1.25		0.80	
Opt. damp. coefficient $c_{J,\,opt}$ (MNs/m)	-	1.961	2.168	1.254	1.387

4.3 1次有効質量から計算した建物の目標付加減衰の補正

ダンパの最適減衰係数を式(73)で計算する際に各建物の 1 次モードの値を用いたが，この最適減衰係数をもつダンパを 20-DOF モデルに取り付けると，ダンパは実際には 1 次モード以外にも効いている．言い換えると，効果予測式(79)を 20-DOF モデルにそのまま適用すると，ダンパが高次モードにも効くために，1 次モードの減衰効果は過小評価される．そこでモードの刺激性を考慮して，式(79)を補正することを考える．

ダッシュポットで表現したダンパは建物間の相対速度に対して効き，固有値問題ではこの相対速度は相対モード変位に対応する．2 棟はダッシュポットのみで繋がっているため，非減衰固有値問題として 20-DOF モデルを扱う場合には，2 棟は完全に独立した 10 組のモード形を示す．これは Fig.10 に示すように，20-DOF 全体系モデルの 1 次と 2 次のモードが一組で各建物の 1 次モードであり，全体系の 3 次と 4 次のモードが一組で各建物の 2 次モードになることを意味する．

今，ある一組のモードで，最上質点の刺激関数の絶対値の和が 2 棟の最大相対変位であると考える．非減衰固有値問題では 2 棟は完全に独立しているため，各棟の刺激関数は固定点を基準にした振幅である．したがって，2 棟間の相対応答を問題にした場合には，それらの和や差を考える必要がある．差は相対応答を過小評価するので採用せず，和を採用すると，j 次モードの最大相対変位は

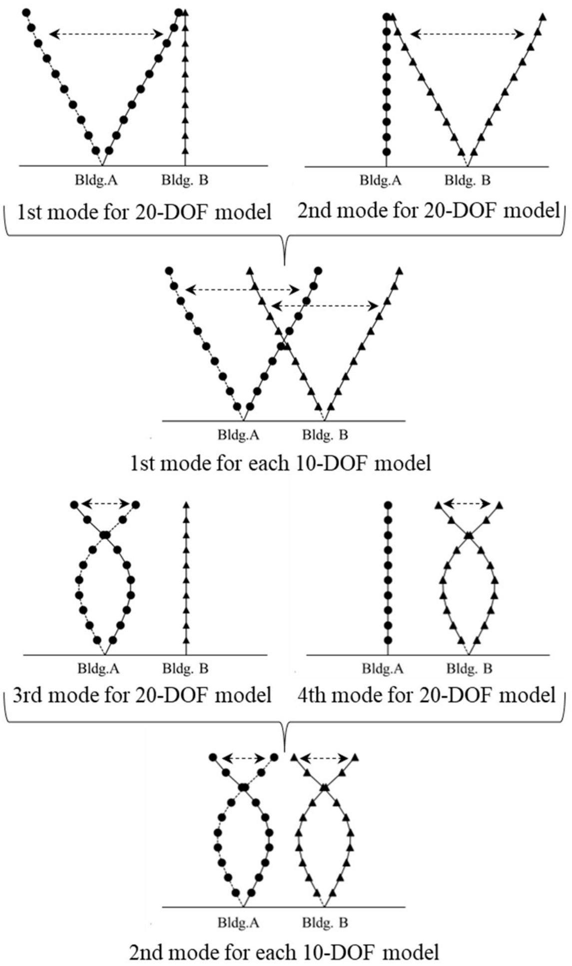

Fig.10　1st to 4th modes for 20-DOF model

$$\left|u_{10j}^{A}\beta_j^{A}\right|+\left|u_{10j}^{B}\beta_j^{B}\right| \tag{81}$$

となる．ここで，$u_{10j}^{A}\beta_j^{A}$ と $u_{10j}^{B}\beta_j^{B}$ は建物 A と B の最上質点（ともに質点 10）の j 次モードの刺激関数である．Fig.11 は，式(82)に示す j 次モードの最大相対変位の総和に対する比を表現している．

$$\frac{\left|u_{10j}^{A}\beta_j^{A}\right|+\left|u_{10j}^{B}\beta_j^{B}\right|}{\sum_{j=1}^{10}\left(\left|u_{10j}^{A}\beta_j^{A}\right|+\left|u_{10j}^{B}\beta_j^{B}\right|\right)} \tag{82}$$

図中の記号は，例えば A1 は建物 A 単独の 1 次モード，B2 は建物 B 単独の 2 次モードを意味する．したがって，A1 と B1 の合計は式(81)で j を 1 にした場合に対応し，A2 と B2 の合計は j を 2 にした場合に対応する．本数値解析では 2 棟の建物のモード形が完全に一致するため，建物 B の 4 ケースとも j 次モードで建物 A と B の比率は等しく，しかも 4 ケースの同一モードの比率も等しい．

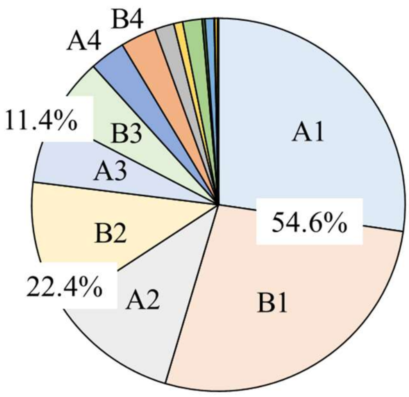

Fig.11　Joint damper contribution to each mode

Table 9　Comparison of damping ratios in the 1st modes

Model for Bldg.B	Damping ratio by Eq.(79) (%)	Additional damping ratio in the 1st mode (%)			Ave./ Eq.(79)
		Bldg.A	Bldg.B	Average	
B1	4.22	8.14	8.01	8.07	1.91
B2	4.32	9.42	6.72	8.07	1.87
B3	3.46	5.48	7.52	6.50	1.88
B4	3.38	6.19	6.67	6.43	1.90
Average of Ave./Eq.(79)					1.89

A1 と B1 の合計は，1 次モードで 54.6%，2 次モードで 22.4%，3 次モードで 11.4%になっている．高次モードほど，刺激関数の絶対値がその総和に占める割合は小さくなっている．各棟の 1 次モードの値を使ってダンパの最適減衰係数を Table 8 のように計算しても，20-DOF モデルに取り付けるとダンパは実際には 1 次モード以外にも効いている．具体的に説明すると，1 次モードの値を使ってダンパの最適減衰係数を計算しても，2 次以上のモードに 45.4%（＝100.0－54.6）が使われていることになる．そこで Table 8 の最適減衰係数に 1.83 倍（1.000/0.546）の割り増しを行う．この割り増しには刺激関数を用いているため，高次モードほど 2 棟間の相対変位に対して低い刺激性しかもたないことを考慮している．

次に，このダンパの最適減衰係数の割増係数 1.83 が妥当であることを示す．建物 B の 4 ケースで Table 8 の最下欄に示した最適減衰係数をもつダッシュポットを取り付け，20-DOF モデルのシステム行列の固有値（極）から 1 次モードの付加減衰比を算定する．建物 A と B 自体の 1 次モードの減衰比を 1%に仮定したため，20-DOF モデルの 1 次モードの減衰比から 1%を減じた値が付加減衰比である．Table 9 は，この付加減衰比を 2-DOF モデルに基づく理論式(79)から得た値と比較している．

B1モデルの場合，20-DOFモデルの1次モードの減衰比は建物Aで8.14%，建物Bで8.01%であり，その平均は8.07%になっている．この平均は式(79)から得られた減衰比4.22%の1.91倍である．式(79)で算定した減衰比に対する20-DOFモデルの付加減衰比の平均倍率は1.89倍であり，これは先にFig.11から求めた1.83倍にほぼ一致する．これは，建物減衰予測式(79)で得られる減衰比を高次モードの影響を考慮して割り増した補正が，妥当であることを示している．

式(78)によれば，建物に与える付加減衰比はダンパの減衰比（容量）に比例している．したがって，ダンパの容量を割り増した影響は，建物に与える減衰効果の補正に影響する．

4.4 地震応答解析による制振効果の確認

前節に示した4つの20-DOFモデルを用いて地震応答解析を行い，提案した付加減衰効果の予測法が2棟の応答を同時に制御するという目的をほぼ達成していることを示す．極配置法が線形系を対象にしており，2棟の1次固有振動数が0.745Hzから1.164Hzの範囲にあることから，短周期成分が多い1940年Imperial Valley地震で記録されたEl Centro波（NS成分）を，最大速度を25cm/sに規準化して入力する．この規準化に対応する最大加速度は255.0cm/s^{2}である．

Fig.12 から Fig.15 は，建物 A と B1 の 2 つの最上質点をダッシュポットで表現するダンパにより繋いだ場合の最大応答値分布である．Fig.12 は階を表現する質点の加速度，Fig.13 と Fig.14 はそれに対応する固定端に対する速度と変位，そして Fig.15 は質点間の相対変位で，建物の層間変位になっている．2 本の破線は 2 棟が独立している非制御時の応答であり，2 本の実線が連結した 20-DOF モデルの制御時の応答である．黒線は建物 A，赤線は建物 B の応答を示す．ダッシュポットの最適減衰係数 $c_{J,\,opt}$ は，Table 8に示す定点理論から得た 1.961MNs/m を設定している．

この時の 1 次モード減衰比は建物 A で 9.14%，建物 B で 9.01%であり，これらの値から建物自体の減衰比 1%を差し引いた値が Table 9 の 8.14%と 8.01%である．最大速度（Fig.13）の建物 A 質点 7 で制御時の応答が非制御時よりも若干大きい現象が見られるものの，2 棟で制御効果が得られていることは明らかである．非制御時の加速度と速度の応答は 2 棟で異なるが，制御時には近い値になっている．

同様に，Fig.16からFig.19は，建物AとB2の最大応答値分布である．このモデルの1次固有振動数比γは前述のモデルと同じ1.25であるため，最大応答値分布はFig.12からFig.15と極めて似ている．2つのモデルとも，建物Aよりも建物Bで応答低減率が高い．1次固有振動数は建物Aで0.931Hz，建物Bで1.164Hzである．建物Aの方が建物Bよりも柔らかいため，建物Aが自ら揺れて，建物Bのダンパにもなっていると考え

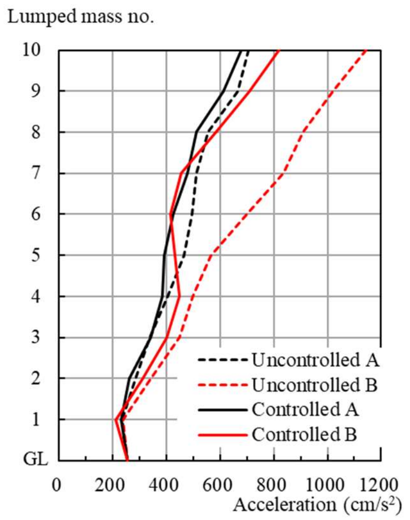

Fig.12 Peak acceleration distributions of Model A-B1

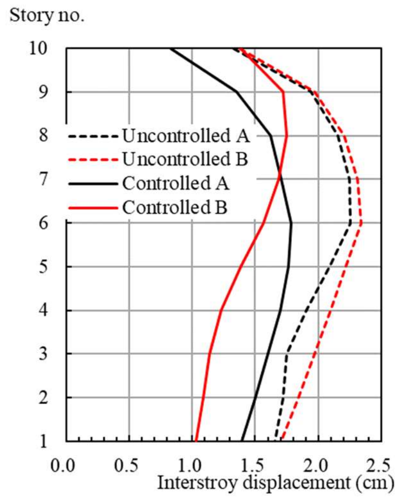

Fig.15 Peak interstory displacement distributions of Model A-B1

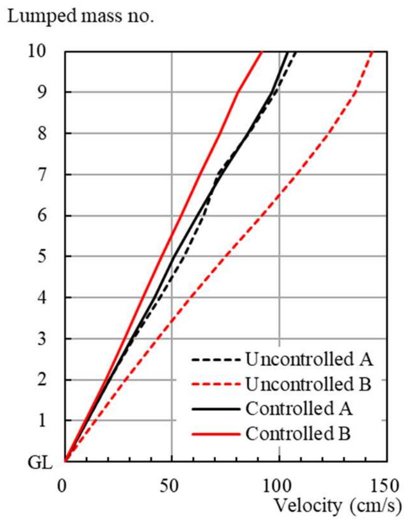

Fig.13 Peak velocity distributions of Model A-B1

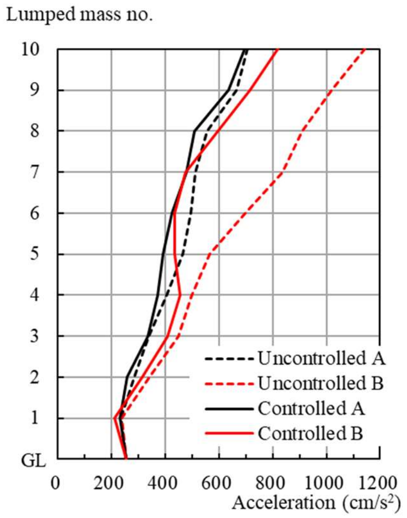

Fig.16 Peak acceleration distributions of Model A-B2

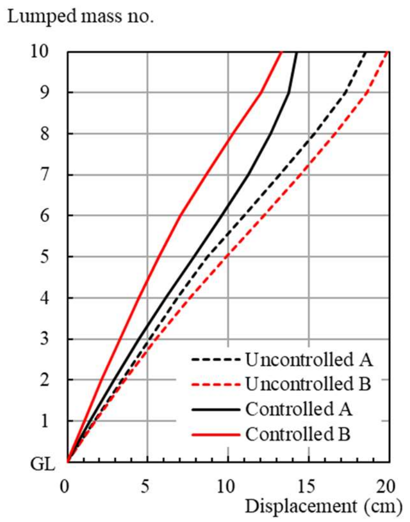

Fig.14 Peak displacement distributions of Model A-B1

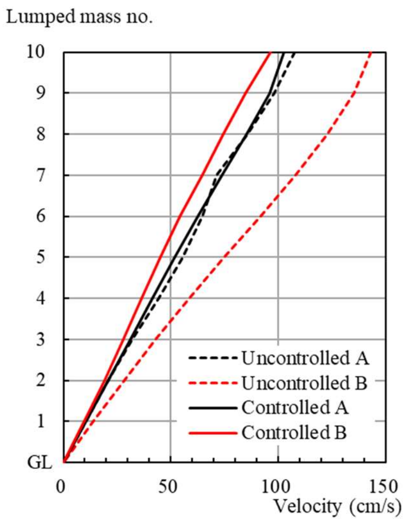

Fig.17 Peak velocity distributions of Model A-B2

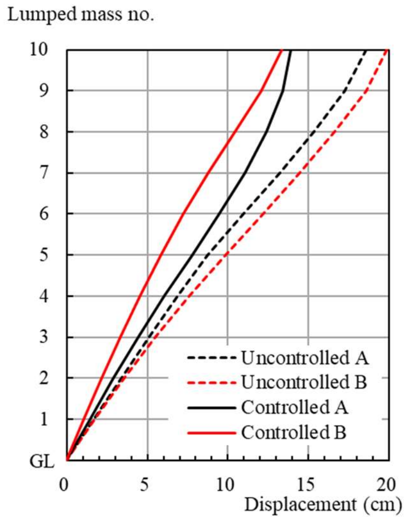

Fig.18　Peak displacement distributions of Model A-B2

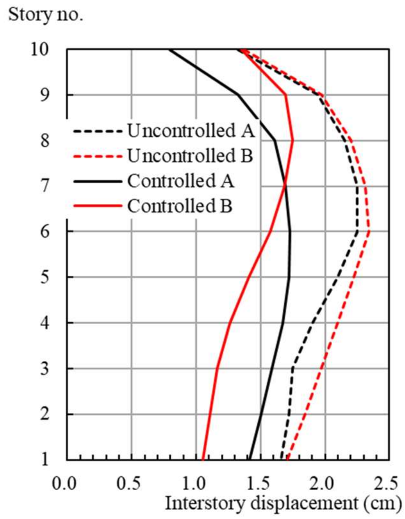

Fig.19　Peak interstory displacement distributions of Model A-B2

られる．連結制振では，2棟で同等の制御効果を得ることは難しいが，制御時の応答を同程度にすることは容易であると言える．

Fig.20からFig.23は，建物AとB3の最大応答値分布である．黒色で示す建物Aでは4種類の応答とも非制御時よりも制御時に抑えられているが，赤色の建物Bでは応答低減効果は小さい．実線で示す制御時の応答が破線で示す非制御時をやや上回る現象は，速度と変位で見られる．

誘導した式(78)は，定点理論で得たダンパ自体の最適減衰比から2棟で同じになる減衰比を予測する．ダンパは各建物に減衰を与えているが，この付加減衰が2棟の制御時の応答を非制御時よりも抑えることには必ずしも働いていない．最大応答値分布から，2棟の応答を同程度にするという意図は達成されていると理解すべきであろう．序論で紹介したように，

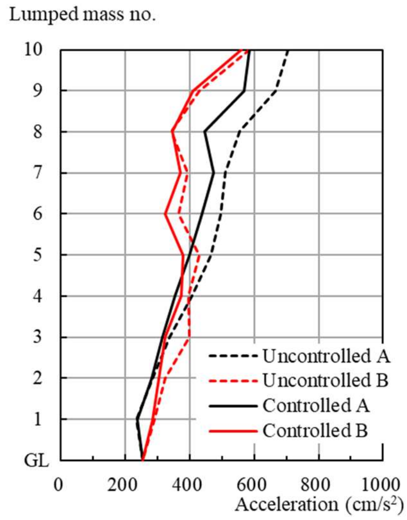

Fig.20　Peak acceleration distributions of Model A-B3

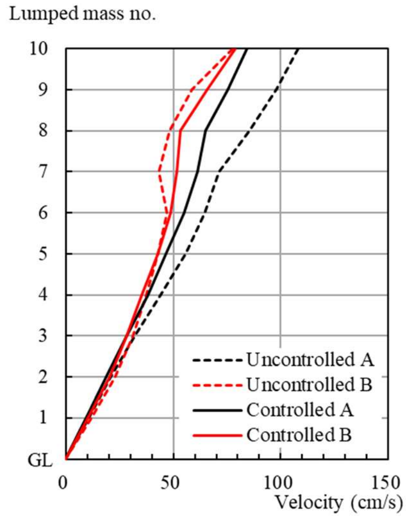

Fig.21　Peak velocity distributions of Model A-B3

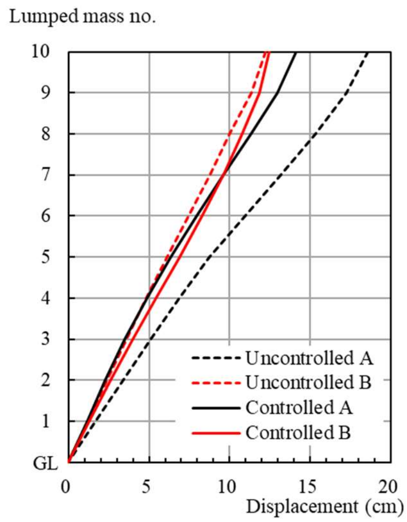

Fig.22　Peak displacement distributions of Model A-B3

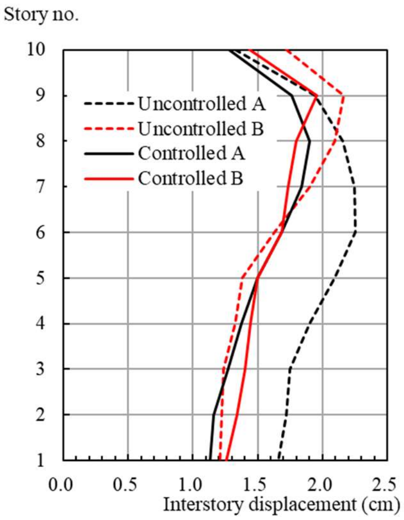

Fig.23　Peak interstory displacement distributions of Model A-B3

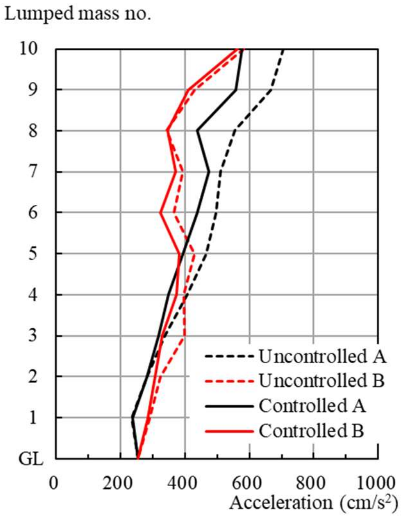

Fig.24　Peak acceleration distributions of Model A-B4

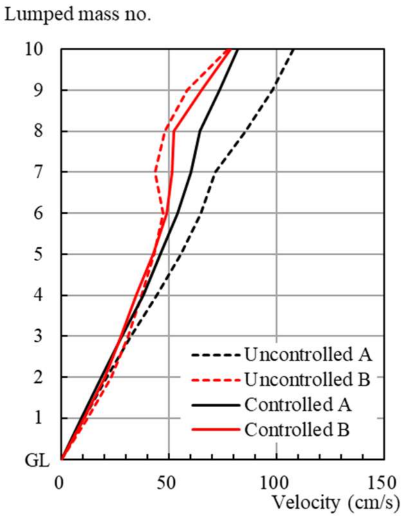

Fig.25　Peak velocity distributions of Model A-B4

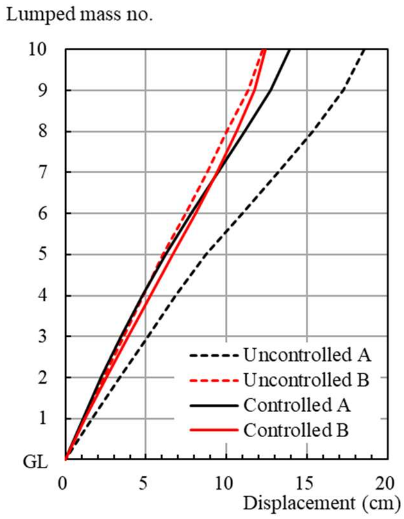

Fig.26　Peak displacement distributions of Model A-B4

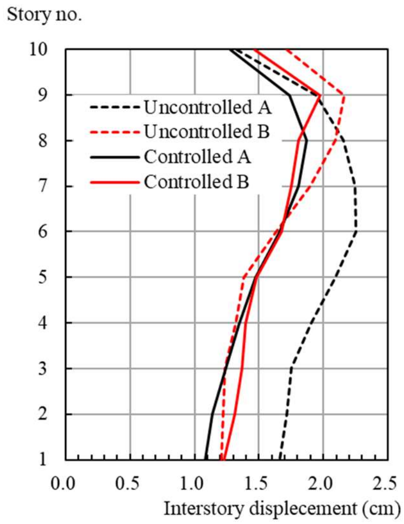

Fig.27　Peak interstory displacement distributions of Model A-B4

このモデルでは連結制振で2棟の応答を同時に抑えることが難しいと指摘されている現象が見られる．

Fig.24からFig.27の建物AとB4では，1次固有振動数比γが建物A-B3と同じ0.80であるため，最大応答値分布に極めて似た傾向が見られる．モデルB3とB4の1次固振動数は0.745Hzで，モデルAの0.961Hzよりも低い．建物Bの方が建物Aよりも柔らかいため，建物Bが自ら揺れて，建物Bのダンパにもなっている．連結制振で2棟の振動低減率を同じにすることが難しい点は，MR（Magnetotrheologocal）ダンパを利用した場合ですでに報告されている（Bharti, Dumne and Shrimali, 2010）

5. まとめ

本論文は，はじめに極配置法に基づく建物振動の

統一的理解を2-DOFモデルで表現した連結制振に拡張し，それを定点理論と統合することで，隣接2棟で同じ減衰効果を予測する式を誘導した．次に，その予測式の妥当性を，2つの10-DOFモデルを繋げた20-DOFモデルの固有値解析と地震応答解析で検証した．提案した効果の予測式は，高さがほぼ同じ隣接建物の最上階付近にダンパを設置し，2棟を同時に振動低減することを想定している．

その成果は，次の5項目に整理される．

1) 今まで1棟の建物で考察してきた統一式を，2-DOFモデルにおける連結制振に拡張し，制御目標と構造パラメータの関係を示す導かれた式が，せん断振動型1本棒モデルで得ていた統一式と同様の表現であることを明らかにした．
2) すでに提案されている定点理論で，建物の制振に適するように座標変換を行って，変換座標系でダンパの最適減衰係数を閉じた式で誘導した．座標変換により，2つの定点（P点とQ点）で得られるダンパの最適減衰を表現する式が反転するが，定点理論では2つの最適減衰の平均をダンパの最適減衰として採用するため，結果的に座標変換は最適減衰に影響しなかった．
3) 項目1で得た統一式を座標変換した定点理論と統合することで，2棟の建物に等しく与える減衰効果が，建物の質量比と振動数比で表現できるようになった．その結果，連結制振の目標である建物の減衰効果が容易に予測できるようになった．建物に与える減衰効果とダンパの最適減衰の関係も明らかになり，建物への付加減衰比がダンパの最適減衰比と同じオーダであることが確認された．これは，連結制振ではダンパの減衰係数が建物の減衰に直接的に寄与することを明確に説明していた．
4) 項目3で得た減衰効果予測式の多自由度系における利用法を，2棟の10-DOF建物モデルを最上質点で連結した20-DOFモデルの固有値解析を用いて提案した．連結した2質点の刺激関数を用いて2-DOFモデルで計算される1次モードの付加減衰効果を割り増すと，ほぼM-DOFモデルで得た減衰比に一致した．これは，ダンパが高次モードにも機能する効果を考慮した結果である．2-DOFモデルで得た効果の予測式は，刺激関数（モード振幅）で補正することによりM-DOFモデルへの適用が可能になった．
5) 固有値解析は建物の減衰比という観点から，地震応答解析は時刻歴応答という観点から，2棟の地震応答を同程度に抑える目標が達成していることを示した．ただし，2棟で同程度の付加減衰が確保できるもの，地震時の応答低減率は2棟で異なり，1棟では制御時の応答が若干非制御時よりも大きくなる現象が認められた．これは，連結制振で2棟を同時に応答低減することが難しいという指摘を裏付けていた．

謝辞

本研究は，独立行政法人・日本学術振興会の令和5年度科学研究費助成事業（基盤研究（C）（一般），課題番号：23K04344，研究代表者：池田芳樹）の助成を受けて実施しました．ここに記して謝意を表します．

参考文献

池田芳樹（2021）：建物の基礎免震，中間層免震および同調型マスダンパによる制振の統一的理解，京都大学防災研究所年報，第64号B，pp.24-42.

池田芳樹・松本祐輝（2022）：建物のパッシブ振動制御の極配置法に基づく統一的理解，京都大学防災研究所年報 第65号B，pp.14-29.

池田芳樹・松本祐輝（2023）：建物振動を統一的に記述する式の連結制振への拡張，令和4年度京都大学防災研究所研究発表講演会，講演番号B311.

伊藤宰・辻聖晃・吉富信太・竹脇出（2008）：アウトフレーム連結制振構法による既存建物耐震補強の逆問題型アプローチ，日本建築学会構造系論文集，第73巻，第627号，pp.725-732.

岩浪孝一・鈴木浩平・背戸一登（1986）：並列構造物の制振法に関する研究（P，T，Q定点理論による方法），日本機械学会論文集C編，52巻，484号，pp.3063-3072.

岩浪孝一・鈴木浩平・背戸一登（1993）：ダンパとばねで連結された並列構造物の制振法，日本機械学会論文集C編，59巻，566号，pp.2975-2980.

蔭山満・安井譲・背戸一登（2000）：連結制振の基本モデルにおける連結バネとダンパーの最適解の誘導，日本建築学会構造系論文集，第529号，pp.97-104.

松本祐輝・池田芳樹（2022）：建物の基礎免震，中間層免震および同調型マスダンパによる制振の統一的理解，構造工学論文集（日本建築学会），Vol.68B，pp.367-375.

松本祐輝・池田芳樹（2023a）：極配置法に基づく多質点１本棒せん断振動型建物モデルの支配方程式，構造工学論文集（日本建築学会），Vol.69B，pp.1-9.

松本祐輝・池田芳樹（2023b）：極配置法に基づく連結制振の基本式の定点理論との統合，日本建築学会大会学術講演梗概集（近畿），構造II，pp.327-328.

満田衛資・大渕充紀・辻聖晃・竹脇出（2014）：連結制振構法を用いた建物の固有振動および減衰に関する基本特性，日本建築学会構造系論文集，第79巻，第696号，pp.227-239.

村瀬充・竹脇出（2021）：慣性質量ダンパーを用いた連結制振構造の最適慣性質量ダンパー量，日本建築学会構造系論文集，第86巻，第784号，pp.912-923.

楊貴君・岩崎良二・高田毅士（2007）：連結構造物における定点理論に基づく質量比－周波数空間の領域分類と最適パラメータの誘導，日本建築学会構造系論文集，第617号，pp.71-76.

Basili, M., De Angelis, M., Pietrosanti, D. (2019): Defective two adjacent single degree of freedom systems linked by spring-dashpot-inerter for vibration control. Eng. Structures, Vol.188, pp.480-492.

Bharti, S.D., Dumne. S.M., Shrimali, M.K. (2010): Seismic response analysis of adjacent buildings connected with MR dampers, Eng. Structures, Vol. 32, pp.2122-2133.

Clough, R.W., Penzien, J. (1982): Dynamics of Structures, McGraw-Hill Book Company, Singapore

Den Hartog, J.P. (1956): Mechanical Vibrations (4th Edition), McGraw-Hill, pp.87-106.

Fu, T.S. (2013): Double skin façades as mass dampers, Proc. American Control Conference, pp.4742-4746.

Gattulli, V., Potenza, F., Lepidi, M. (2013): Damping performance of two simple oscillators coupled by a visco-elastic connection, J. Sound and Vibration, Vol.332, Issue 26, pp.6934-6948.

Ikeda, Y. (2021): Fundamental equation based on pole allocation for interstory seismic isolation of buildings, Struct. Cont. and Health Monitoring, Vol.28, Issue 3, 19 pages.

Ikeda, Y., Matsumoto, Y. (2022): Unified description of passive vibration control for buildings based on pole allocation to three-degree-of-freedom model, Struct. Cont. and Health Monitoring, Vol.29, Issue 9, 17 pages.

Luco, J.E., De Barros, F.C.P. (1998): Optimal damping between two adjacent elastic structures. Earthquake Eng. & Struct. Dyn., Vol.27, Issue 7, pp.649-659.

Moon, K.S. (2011): Structural design of double skin facades as damping devices for tall buildings, Procedia Eng., Vol.14, pp.1351-1358.

Pipitone, G., Barone, G., Palmeri, A. (2018): Optimal design of double-skin façades as seismic vibration absorbers, Struct. Cont. and Health Monitoring, Vol.25, Issue 2, 16 pages.

Pipitone, G., Barone, G., Palmeri. A. (2020): Stochastic deign of double-skin façades as seismic vibration absorbers, Advances in Eng Software, Vol.142, 13 pages, ID102749.

Reggio, A,, Restuccia, L., Ferro, G.A. (2018): Feasibility and effective of exoskeleton structures for seismic protection. Procedia Struct Integrity, Vol.9, pp.303-310.

Reggio, A., Restuccia, L., Martelli, L., Ferro, G.A. (2019): Seismic performance of exoskeleton structures, Eng. Structures, Vol.198, 11 pages, ID109459.

Tubaldi, E. (2015): Dynamic behavior of adjacent buildings by linear viscous/viscoelastic dampers, Struct. Cont. and Health Monitoring, Vol.22, Issue 8, pp.1086-1102.

Xu, Y.L., He Q., Ko J.M. (1999): Dynamic response of damper-connected adjacent buildings under earthquake excitation, Eng. Structures, Vol.21, Issue 2, pp.135-148.

Zhang, W.S., Xu, Y.L. (1999): Dynamic characteristics and seismic response of adjacent buildings linked by discrete damper. Earthquake Eng. & Struct. Dyn., Vol.27, Issue 7, pp.1163-1185.

Zhu, H.P., Ge, D.D., Huang. X. (2011): Optimum connecting dampers to reduce the seismic responses of parallel structures, J. Sound and Vibration, Vol.330, Issue 9, pp.1931-1949.

Zhu, H.P., Iemura H. (2000): A study of response control on the passive coupling element between parallel structures, Struct. Eng. and Mechanics, Vol. 9, Issue 4, pp.383-396.

（論文受理日：2023年7月11日）