寄稿論文

紐でつるされた剛体の振動問題に関する Leonhard Euler の解法の変遷

中田 良一*

Transition of Leonhard Euler's Solutions about Vibration of a Rigid Body Suspended by a String

Ryoichi NAKATA

概要

As an example of the establishment of the theory of motion of a rigid body suspended by a string, Leonhard Euler's three solutions, written in 1740, 1742 and 1773, are described. The first and second solutions deal only with small oscillations and give the equivalent simple pendulum length of the system from the balance of moments of force. The third solution, on the other hand, takes a Cartesian coordinate system and decomposes the motion of the system into translational motion of the center of gravity and rotational motion around the center of gravity. He applies the equations of motion (Newton's second law) to the former and the formula for rotational motion around a fixed point to the latter. He declares that these formulae are derived from first principles of mechanics, solves the differential equations for small oscillations and then expresses the motion of the system as a normal combination of two types of oscillation. He declares that by this dynamical method, problems of this kind can be solved completely in mechanics, even if the oscillations are not infinitely small.

§1 序

18 世紀の西欧における力学理論の発展の流れについてどのように描くかについては，何人かの科学史家により論じられているが，決定的な論考はないのが現状である（1）．しかしながら，18 世紀の研究者の中で最も重要な研究者が Leonhard Euler であることについては，どの論者も一致するであろう．Euler による力学原理の確立については伊藤が一連の論文で詳しく論じている（2）．本稿では 18 世紀前半から後半にかけて Euler が発表した紐でつるされた剛体の振動問題の解法に関する 1 通の手紙

* 無所属

と 2 編の論文を具体例として取り上げ，それぞれにおける解法ならびにその基礎をなす原理を検討することにより，Euler における力学原理の確立を見る．

紐で吊るされた剛体の振動は振動中心の問題とも関連し，17 世紀より多くの研究者により論じられた．紐でつるされた剛体の振動問題に関しては，Daniel Bernoulli により Euler に提出されたようである（3）．Euler は 1740 年 9 月 15 日付けの Daniel Bernoulli 宛の手紙（4）で初めて解を伝え，Daniel Bernoulli も 1740 年 11 月 5 日付の Euler 宛の手紙で自分も 3 ヵ月前に論文を書き終え，アカデミーに提出したこと（5），また Johann Bernoulli が同じ問題を解いた（6）と伝え聞いたと書いている．Euler は更に 1741 年 2 月 24 日付の Alexis-Claude Clairaut 宛の手紙（7）で，Daniel Bernoulli に与えたのとは別の方法で解いた解を与える．この方法は 1742 年の Euler の論文（8）で用いられたものと同じである．また，Jean Le Rond D'Alembert は 1743 年の著書の中でこの問題を解く（9）．そして，この問題は 1773 年に Daniel Bernoulli と Euler によりもう一度採りあげられ，それぞれ論文として発表される（10）．特に，Euler により完全に現代的な方法で解かれた．以下で Euler の 3 種の解法を見てみよう．

§2 Euler の解法

2.1 解法 (I)

図 1 において物体 ABCD は点 A において紐 OA から吊るされ，紐は点 O で固定されており，紐，物体はそれぞれ点 O，点 A の周りに微小振動する．図における物体と紐の位置は鉛直線 Oq から最も離れた時を表す．G は物体の重心，P は物体の重さ (質量も P で表す) である．紐＋物体の系の相当単振り子の長さを z とする．点 Z は BA の延長と Oq の交点である．物体は振動中あたかも固定点 Z の周りを回転するかのような運動をする．また，彼は系の点 A と B は同時に鉛直線 Oq 上を通るという，微小振動における「振り子の条件」（11）を採用する．この時，関係式「系のある要素が受ける加速力 (加速度)=その要素のつり合いの位置からの変位/系の相当単振り子の長さ」が成立する（12）．以上を前提とし，この振動系に対する相当単振り子の長さ (z) を求める．

物体の要素 M が m に進む (m に要素がある時，OAGB は鉛直線上にある) とする．この時要素 M に作用する力は「振り子の条件」より $\frac{M \cdot Mm}{z}$(M: 要素 M の重さ（13）) である．それ故，物体全体の要素の力の和は $\int M \cdot \frac{Mm}{z} = \frac{\int M \cdot Mm}{z} = \frac{P \cdot Gg}{z} = \frac{P \cdot Aa \cdot GZ}{AZ \cdot z}$ となる（14）．物体は点 Z の周りに回転するかのように運動するので，要素の力の点 Z に

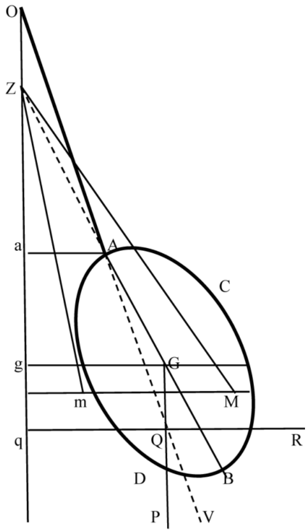

図 1

対するモーメントは $M \cdot \frac{Mm}{z} \cdot MZ = \frac{Aa \cdot M \cdot MZ^2}{AZ \cdot z}$ となり（15），要素のモーメントの和は

$$\frac{Aa}{AZ \cdot z} \int M \cdot MZ^2$$

となる．重心に関する物体の慣性モーメントを Pk^2 と置くと，点 Z に関する物体の慣性モーメントは $\int M \cdot MZ^2 = P(k^2 + GZ^2)$ なので，

$$\frac{Aa}{AZ \cdot z} \int M \cdot MZ^2 = \frac{Aa \cdot P(k^2 + GZ^2)}{AZ \cdot z}$$

となる（16）．モーメントの和を力の和で割ると，

$$\frac{Aa \cdot P(k^2 + GZ^2)/AZ \cdot z}{P \cdot Aa \cdot GZ/AZ \cdot z} = GZ + \frac{k^2}{GZ} = Zq$$

を得る．故に，$Qq = \frac{P \cdot Aa \cdot GZ}{AZ \cdot z}$ の力が点 q に作用すると考えることができる（17）．

Qq と正反対の力 $QR = \frac{P \cdot Aa \cdot GZ}{AZ \cdot z}$ が作用すると考える．QR と重力 P の合力を QV とすると，物体が釣り合うためには QV と AO は同一直線上になければならない．その時，$\frac{AZ \cdot z}{Aa \cdot GZ} = \frac{P}{QR} = \frac{Oa}{Aa}$ なので

$$P : QR = Oa : Aa = AZ \cdot GZ \tag{2-1-1}$$

が得られる．

更に，$Qq = Gg = \frac{Aa \cdot GZ}{AZ}$ より，

$$Aa : Oa = Qq : OZ + Zq = \frac{Aa \cdot GZ}{AZ} : OZ + GZ + \frac{k^2}{GZ} \tag{2-1-2}$$

を得る（18)．

$OA = n, AG = g, OZ = x, Aa = y$ と置くと，微小振動なので $Oa = n, AZ = n - x$ と置くことができる．故に (2-1-1) より

$$n : y = (n - x)z : y(g + n - x)$$

を得るので

$$z = \frac{n(g + n - x)}{n - x} \tag{2-1-3}$$

を得る．

(2-1-2) は

$$y : n = \frac{y(g + n - x)}{n - x} : g + n + \frac{k^2}{g + n - x} \tag{2-1-4}$$

となる．これより $n - x$ の値を求め，(2-1-3) に代入すると，

$$z = n + \frac{2ng^2}{ng - g^2 - k^2 \pm \sqrt{(gn - g^2 - k^2)^2 + 4ng^3}}$$

を得る．

更に Euler は吊るされた物体が半径 $AG = g$ の球で，かつ $g \ll n$ である場合には，

$$z = n + g + \frac{2gg}{5n} - \frac{6g^3}{25nn}$$

であることを示す（19)．また点 A で紐に対し球が曲がらない (実体振り子となる) 時，$z = n + g + \frac{2gg}{5(n+g)} = n + g + \frac{2gg}{5n} - \frac{2g^3}{5nn}$ を与える．これは Appendix で与えられた現代的な解法が与える値と一致する．

2.2 解法 (II)

この論文の冒頭で，Euler は紐に吊るされた剛体の振動運動の相当単振り子の長さを求める問題が Daniel Bernoulli により提出されたと述べ，その解法を示す．まず，紐と物体の相互位置が固定されている実体振り子の相当単振り子の長さを求める方法を与えた後，点 A で棒の周りに物体が自由に回転できる剛体振り子の相当単振り子の長さ

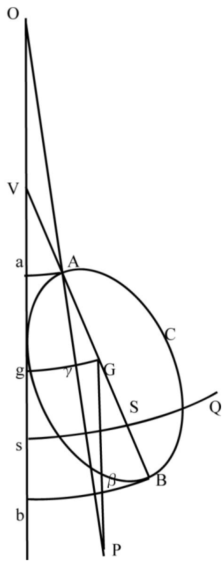

図 2

f を求める問題に移る（20）．Euler は図 2 の様な振動系を考える．振り子は重さのない棒 OA と物体 ACBD からなり，軸 O と点 A の周りに曲がりうる．今物体は Ob に向かって動いているとし，Oagb に位置する時がつり合いの状態であり，この時点 A と点 G はそれぞれ点 a と点 g 上にあるとする．重心が G から g に動く時 (微小回転故，軌道は直線と見なせる)，重心は O の周りの微小回転により $g\gamma$ だけ動き，更に A の周りの微小回転により γG だけ動く．それ故，解法 (I) でのように，物体は GA と Ob の交点である点 V の周りに回転するかのように動く．

今，物体系が振動により釣り合いの状態から OAGB に変位したとすると，$GS = \frac{hh}{VG}$ なる VAG 上の点 S に Ss 方向に力 $P \cdot \frac{Gg}{f}$ が作用すると考えることができる．ここで，物体の重さを P とし，点 V に関する物体の慣性モーメントを Phh とする．故に，点 S に SQ 方向に大きさが $P \cdot \frac{Gg}{f}$ の力が作用すると，この力と重力により G に作用する力 P は釣り合いを保つ．従って，点 O と点 A に関するこれら 2 つの力のモーメントは，それぞれ等しくなければならない．

1. A に関する力のモーメントのつり合い．

重力による力のモーメントは $P \cdot AG \sin \angle AGP = P \cdot AG \sin \angle GVg = \frac{P \cdot AG \cdot Gg}{VG}$ で，SQ

方向への力 $P \cdot \frac{Gg}{f}$ のモーメントは $P \cdot \frac{Gg}{f} \times AS = P \cdot \frac{Gg}{f}(AG + \frac{hh}{VG})$ である．2 つの力のモーメントは等しいので，

$$AG \cdot f = AG \cdot VG + hh \tag{2-2-1}$$

が成立する．

2. O に関する力のモーメントのつり合い．

重力による力のモーメントは $P \cdot Gg$ で SQ 向への力 $P \cdot \frac{Gg}{f}$ のモーメントは $P \cdot \frac{Gg}{f} \times OAS = P \cdot \frac{Gg}{f}(OA + AG + \frac{hh}{VG})$ である．2 つのモーメントは等しいので，

$$VG \cdot f = OA \cdot VG + AG \cdot VG + hh \tag{2-2-2}$$

が成立する．(2-2-2)-(2-2-1) で hh を消去すると，$f(VG - AG) = OA \cdot VG$ が得られるので，

$$f = OA + \frac{AG}{VA} \cdot OA \tag{2-2-3}$$

となる．故に，(2-2-3) より

$$VA = \frac{OA \cdot AG}{f - OA} \tag{2-2-4}$$

が得られる．(2-2-1) より $VG = \frac{AG \cdot f - hh}{AG} = VA + AG$ なので，

$$VA = f - AG - \frac{hh}{AG} \tag{2-2-5}$$

となる．(2-2-4) と (2-2-5) より VA を消去し，$OA = a, AG = b$ と置くと，

$$f = \frac{ab + bb + hh \pm \sqrt{(ab + bb)^2 - 2(ab - bb)hh + h^4}}{2b}$$

となる．ここで Euler は物体の振動がこれらの 2 種の振動の組み合わせにより生じると述べる．

そして，この式を物体が直線の棒 AB である場合，球形の剛体である場合，OA が完全にフレキシブルで重さのある紐あるいは鎖の場合等に適用する．ここでは特に $a \gg b$ で球が紐 OA にしっかり結び付けられ，A でいかなる曲がりも生じない (実体振り子) 場合と A において曲がりが生じる場合の相当単振り子の長さ f を与えておこう．前者の場合は

$$f = a + b + \frac{2bb}{5a} - \frac{2b^3}{5aa}$$

となり，後者の場合には

$$f = a + b + \frac{2bb}{5a} - \frac{6b^3}{25aa}, \qquad f = \frac{2}{5}b - \frac{2bb}{5a} + \frac{6b^3}{25aa}$$

この結果も Appendix での結果と一致する．

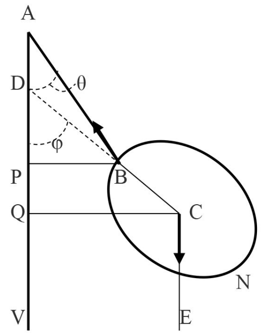

図 3

2.3 解法 (III)

Euler は 1773 年のメモワールで，今までの方法とは全く異なる，現代的な解法を提唱する．図 3 において，A の周りを物体に付けられた，重さのない紐 AB(長さ a) が回転する．C を重心とし，重さを M，重心 C に関する物体の慣性モーメントを Mcc とする．直線 BC と鉛直線 AV の交点を D とし，$\angle BAV$ を θ とし，$\angle CDV = \varphi$ とする．更に BC=b とする．物体に作用する力は C で鉛直下方に M,B で BA 方向に紐の張力 T である．そして，これらの力により，重心の並進運動 (CQ 方向と CE 方向に分解) と重心の周りの回転運動が生じる．これら 2 つの運動は力学の根本原理 (prima mechanicae principia) が与える．

1. 重心の並進運動について．

AQ=x，QC=y とすると，$x = a\cos\theta + b\cos\varphi$, $y = a\sin\theta + b\sin\varphi$ と置くことができ,「力学の原理」より

$$\frac{ddx}{2gdt^2} = \frac{M - T\cos\theta}{M}, \qquad \frac{ddy}{2gdt^2} = -\frac{T\sin\theta}{M}$$

を得る．ここで，g は物体が 1 秒間に自由落下する距離である (21)．

2. 重心の周りの回転運動について．

紐の張力 T による重心に関する力のモーメントは $Tb\sin(\varphi - \theta)$ なので，

$$\frac{dd\varphi}{2gdt^2} = -\frac{Tb\sin(\varphi - \theta)}{Mcc}$$

を得る．これら 3 つの式より θ, φ, T を決めることができる．

これより Euler は振動を微小と仮定して話を進める．この時，3 つの式は

$$\text{I.}\quad \frac{M-T}{M}=0,\qquad \text{II.}\quad \frac{add\theta+bdd\varphi}{2gdt^2}=-\frac{T\theta}{M},\qquad \text{III.}\quad \frac{dd\varphi}{2gdt^2}=-\frac{Tb(\varphi-\theta)}{Mcc}$$

となる．I より $M=T$ と置き，III の左辺 $\frac{dd\varphi}{2gdt^2}$ の値を II に代入すると，

$$\frac{add\theta}{2gdt^2}=\frac{bb\varphi-(bb+cc)\theta}{acc} \tag{2-3-1}$$

この式と III で $T=M$ と置いた式

$$\frac{dd\varphi}{2gdt^2}=\frac{-b\varphi+b\theta}{cc} \tag{2-3-2}$$

を組み合わせると系の運動を得ることができる．(2-3-1), (2-3-2) を積分可能とするために

$$\frac{Add\theta+Bdd\varphi}{2gdt^2}=\frac{N(A\theta+B\varphi)}{acc} \tag{2-3-3}$$

となるように A と B を定める．(2-3-3) に (2-3-1), (2-3-2) を代入し，左右の θ, φ を含む項を比較すると，

$$\text{IV.}\quad AN=-A(bb+cc)+Bab,\qquad \text{V.}\quad BN=Abb-Bab$$

となる．IV × B=V × A より

$$\frac{A}{B}=\frac{ab-bb\pm\sqrt{aabb+2ab^3-2abcc+(bb+cc)^2}}{2bb}$$

を得る．簡単のため $\frac{ab-bb-cc}{2bb}=p$, $\frac{\sqrt{aabb+2ab^3-2abcc+(bb+cc)^2}}{2bb}=q$ と置くと，

$$\frac{A}{B}=p\pm q$$

となる．

1.$\frac{A}{B}=p+q$ の時：

$A=p+q, B=1$ と置いても一般性を失わないので，$N=(p+a)bb-ab$ となり，(2-3-3) は

$$\frac{(p+q)dd\theta+dd\varphi}{2gdt^2}=\frac{((p+q)bb-ab)((p+q)\theta+\varphi)}{acc} \tag{2-3-4}$$

となる．

2.$\frac{A}{B}=p-q$ の時：

同様にして (2-3-3) は

$$\frac{(p-q)dd\theta + dd\varphi}{2gdt^2} = \frac{((p-q)bb-ab)((p-q)\theta+\varphi)}{acc} \tag{2-3-5}$$

となる．

ここで，簡単のため $(p+q)\theta+\varphi = u$, $(p-q)\theta+\varphi = v$ と置くと，(2-3-4), (2-3-5) は

$$\frac{ddu}{2gdt^2} = -\frac{u(ab-(p+q)bb)}{acc} \tag{2-3-6}$$

$$\frac{ddv}{2gdt^2} = -\frac{v(ab-(p-qbb))}{acc} \tag{2-3-7}$$

となる．更に簡単のために $\frac{2g(ab-(p+q)bb)}{acc} = mm$, $\frac{2g(ab-(p-q)bb)}{acc} = nn$ と置くと，(2-3-6), (2-3-7) は

$$\frac{ddu}{dt^2} = -mmu, \qquad \frac{ddv}{dt^2} = -nnv$$

となる．この解は一般に

$$u = C\sin(mt+\mu), \qquad v = E\sin(nt+\nu)$$

となる．μ, ν は物体の初期条件より定まる（22）．

次に，$(p+q)\theta+\varphi = u$, $(p-q)\theta+\varphi = v$ より θ, φ について解くと，

$$\theta = \frac{Cb}{h}\sin(mt+\mu) - \frac{Eb}{h}\sin(nt+\nu), \quad \varphi = \frac{C(h-a+f)}{2h}\sin(mt+\mu) + \frac{E(h+a-f)}{2h}\sin(nt+\nu)$$

が得られる．また，2 つの角の角速度は

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{mCb}{h}\cos(mt+\mu) - \frac{nEb}{h}\cos(nt+\nu),$$
$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{mC(h-a+f)}{2h}\cos(mt+\mu) + \frac{nE(h+a-f)}{2h}\cos(nt+\nu)$$

となり，初期条件は

$$\theta_{t=0} = \frac{Cb}{h}\sin\mu - \frac{Eb}{h}\sin\nu, \quad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{t=0} = \frac{mCb}{h}\cos\mu - \frac{nEb}{h}\cos\nu,$$
$$\varphi_{t=0} = \frac{C(h-a+f)}{2h}\sin\mu + \frac{E(h+a-f)}{2h}\sin\nu,$$
$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{t=0} = \frac{mC(h-a+f)}{2h}\cos\mu + \frac{nE(h+a-f)}{2h}\cos\nu$$

と表せる．

最後に，Euler は $E = 0$ あるいは $C = 0$ でなければ，複雑な運動が生じると述べ，更に $E = 0$ なら，$\frac{\pi}{m}$ 秒で振り子は 1 振動を生じ，$C = 0$ なら，$\frac{\pi}{n}$ 秒で振り子は 1 振動を生じると述べる．もし，$C \neq 0$ かつ $E \neq 0$ なら，$\frac{\pi}{m}$ 秒で 1 振動を生じる運動と $\frac{\pi}{n}$ 秒で 1 振動を生じる運動の，2 種の規則的な運動からなる運動を振り子はすると述べる（23）．

続いて Euler は有限振動について書く．詳しい解法は省略するが，冒頭で有限な振動については Daniel Bernoulli の方法（24）では解決できないと述べ，根本的な運動原理として，無限小振動の場合と同じ次のような式を与える．

$$x = a\cos\theta + b\cos\varphi, \quad y = a\sin\theta + b\sin\varphi$$
$$\frac{ddx}{2gdt^2} = \frac{M - T\cos\theta}{M}, \quad \frac{ddy}{2gdt^2} = -\frac{T\sin\theta}{M}$$
$$\frac{dd\varphi}{2gdt^2} = -\frac{Tb\sin(\varphi-\theta)}{Mcc}$$

そしてこの問題の探求が成功しなかったら (解が求められなかったら)，それは力学のせいではなく，解析学の不完全性のためであると述べる．

§3　結論

3.1　解法 (I) の特徴

まず，系の微小振動のみを前提とし，「振り子の条件」を導入する．そして，系を点 Z の周りに微小振動する実体振り子と見なした時に，その相当単振り子の長さである点 Z からの距離が $GZ + \frac{k^2}{GZ}$ である点 q に $\frac{P \cdot Aa \cdot GZ}{AZ \cdot z}$ の力が作用すると見なすと，問題となる微小振動が生じることを指摘する．求めるのは系の相当単振り子の長さである．従って，点 Q に大きさが $\frac{P \cdot Aa \cdot GZ}{AZ \cdot z}$ で正反対の方向を持つ力 QR が作用すると，系は静止する．故に，力 QR とおもりの重さにより系は静止する．それ故，点 A と点 O に関するこの 2 つの力のモーメントの和はそれぞれゼロとならねばならない．この要求をここで Euler は 2 つの力の合力 QV が直線 OA 上になければならないと表現する．後は幾何学的関係を用いて z を与えられた量で表す．ここで彼が採用するのは，力のモーメントのつり合いである．

3.2　解法 (II) の特徴

微小振動のみを扱い，「振り子の条件」を用い，物体は点 V の周りに振動するかのような運動を行うとして，モーメントのつり合いにより系の相当単振り子の長さを求め

るというアイディアは解法 (I) と同じである．ただ，物体の振動を生み出す Ss 方向の力と物体の重心に働く重さによる点 A と点 O の周りのモーメントのつり合いより導かれる 2 つの関係式より系の相当単振り子の長さを求めるので，解法 (I) での様な幾何学的関係は用いなくてよい．そして，実際の系の振動は 2 つの基本的な振動の組み合わせであることを指摘する．

3.3 解法 (III) の特徴

解法 (I)，解法 (II) が静力学を用いて問題を解いたのに対し，解法 (III) は動力学の原理を用いる点が決定的に異なる．Euler の解法の特徴は彼の論文に付された要約 (Summarium) に簡潔に書かれている．それによれば，Euler は物体に働く力を重心に働く物体の重さと物体をつるした紐の張力と置き，その振動運動を重心の並進運動と重心の周りの回転運動からなるとする．そして 2 種類の運動を根本原理により決定する．その結果，(系の相当単振り子の長さを求めるのではなく) 任意の時間における物体の状態を決定することができる．この根本原理は冒頭で示されており，問題の完全な解決をもたらす．もし，解決できないとしても，それは力学の問題によってではなく解析学の問題のためである．この叙述に，1740 年代後半に Euler は直行座標系を用いだしたという事実（25）を付け加えたうえで Appendix の解法と比べると，解法 (III) の現代性は一目瞭然である．

最後にここで問題にしている剛体の運動に関する Euler の研究の発展を簡単にまとめよう（26）．まず剛体の振動問題について考えよう．解法 (I), (II) において彼がこの問題を解くのに用いた「系のある要素が受ける加速力 =その要素のつり合いの位置からの変位/系の相当単振り子の長さ」という関係は前述したように E40（27），E49（28）で論じられた，微小振動をするフレキシブルな物体，あるいは剛体の相当単振り子の長さを求める際に用いられた．そして，力のモーメントのつり合いを，この関係式を用いて論じる時，その静力学的性質が強調される（29）．

また Euler による剛体の回転運動の研究は 1735 年に始められた，水に浸っている物体の安定性と揺れに関する研究からである（30）．1736-37 年ころには，広がりを持つ物体の運動は重心の並進運動と重心の周りの回転運動からなり，2 つの運動は互いに独立であることに Euler は気づいていた（31）．そして後者の運動については， E69 には I を物体の回転軸に対する慣性モーメント，ω を回転の角速度，N を物体に作用する力のモーメントとすると，固定軸の周りの回転の $I\frac{d\omega}{dt} = N$ に相当する式がある．彼によれば，点 A の周りを点 C が AC に垂直方向に速さ u で回転する時，距離 AC

を f とすると，角速度=$\frac{u}{f}$ となる．そして点 C に働く力 Cc を p，$\sin\angle ACc = m$($\angle ACc$ は AC と Cc のなす角)，$S = \Sigma m_i r_i^2$(m_i は要素の質量，r_i は A と要素の距離) と置き，$du = \frac{mf^2p}{S}dt$ を与える．故に，角速度の増加 ($d\omega$) は $\frac{du}{f} = \frac{mfp}{S}dt$ となる．

著作 *Scientia Navalis*（32）では，Euler は次のように書く．ある要素 (質量 A，軸からの距離 AO) が AO に垂直方向に力 Aa を受け，固定軸の周りを回転する時，点 M(質量 M, 軸からの距離 MO) において同じ状況となるための質量 M と点 M が受ける MO に垂直な力 Mm の条件を，1. 点 A が受ける力のモーメント=点 M が受ける力のモーメント．2. 点 A の回転力（33）=点 M の回転力．という 2 つの条件より求める．結果は $M = \frac{A \cdot AO^2}{MO^2}$, $Mm = \frac{Aa \cdot AO}{MO}$ である．点 A の数を増やすと，$M = \frac{A \cdot AO^2 + B \cdot BO^2 + \cdots}{MO^2}$，$Mm = \frac{Aa \cdot AO + Bb \cdot BO + \cdots}{MO}$ となる．故に，回転力は $\frac{Aa \cdot AO + Bb \cdot BO + \cdots}{A \cdot AO^2 + B \cdot BO^2 + \cdots}$ となる．固定点の周りに回転する角=回転力 $\times dt$ である（34）．

また，同じころ着手されたと思われる，1738 年にパリアカデミーにより最初に公告されたコンクールへの応募論文である E78（35）でも *ScientiaNavalis* におけるのと同じ解法があたえられる．また，関係式「回転力=力のモーメント/慣性モーメント」と質点の並進運動での関係式「加速力=力/質量」の間のアナロジーを Euler は指摘する（36）．

ここまでの話を次の様にまとめることができるであろう．E40，E49 から解法 (I), (II) の段階では無限小振動を静力学的手法で論じるのみである．この時期に剛体の回転運動を表す関係式に相当する式 $I\frac{d\omega}{dt} = N$ を事実上得ているにもかかわらず，(無限小) 振動問題に適用されることはない．

剛体の回転運動に $I\frac{d\omega}{dt} = N$ に相当する式が明確に用いられるのは，*Theoria motus*（37）の中の，固定軸の周りに可動な静止している剛体に力が作用する時最初の瞬間に生じる運動を見出す問題（38）においてである．そして，この関係式は実体振り子の振動問題を論じた問題に適用され，相当単振り子の長さが与えられる（39）．しかし，本稿で採り上げた，紐と物体の結合点で物体が曲がることのできる場合は論じられない．*Theoria motus* の完成時（40）には既に直行座標系で物体の運動を記述することも可能となっていたので，Euler はこの時点で解法 (III) を与えることもできたであろう．しかし，1743 年になって始めて，彼は「力学の根本原理」を用いてこの問題がもはや一つの例題に過ぎないことを示す．

Appendix

固定点から紐でつるされた球の微小振動運動の現代的解法

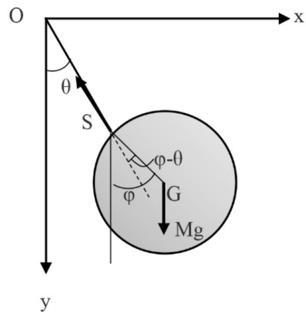

図 4

原島鮮はオイラーが論じた問題を著作において扱っている（41）．現代的取扱いの方法を見るために，原島の解法を以下でまとめる．

図 4 において，一端を点Oで固定された長さ l の紐の他端に半径 a の一様な球を付け，鉛直面内で微小振動を行う．糸の張力を S とし，球の重心を G とする．重心の運動方程式は

$$M\frac{d^2x_G}{dt^2} = -S\sin\theta, \tag{A-1}$$

$$M\frac{d^2y_G}{dt^2} = -S\cos\theta + Mg \tag{A-2}$$

で，重心の周りの回転の運動方程式は

$$M\kappa^2\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -Sa\sin(\varphi-\theta) \tag{A-3}$$

である．ここで，$M\kappa^2$ は球の重心に関する慣性モーメントである．また，

$$x_G = l\sin\theta + a\sin\varphi, \quad y_G = l\cos\theta + a\cos\varphi \tag{A-4}$$

において θ, φ が小さいとし，$\theta, \varphi, \dot\theta, \dot\varphi, \ddot\theta, \ddot\varphi$ の 1 次の項だけを取り，他の項は省略すると (A-4) は

$$x_G = l\theta + a\varphi, \quad y_G = l + a \tag{1}$$

となる．故に，(A-1), (A-2), (A-3) は

$$M(l\ddot\theta + a\ddot\varphi) = -S\theta \tag{A-5}$$

$$0 = -S + Mg \tag{A-6}$$

$$M\kappa^2\ddot\varphi = -Sa(\varphi-\theta) \tag{A-7}$$

となる．(A-6) より $S = Mg$ なので，(A-5), (A-7) は

$$l\ddot{\theta} + a\ddot{\varphi} = -\theta \tag{A-8}$$

$$\kappa^2\ddot{\varphi} = -ag(\varphi - \theta) \tag{A-9}$$

となる．(A-8), (A-9) より θ, φ が時間の関数として求められる．これを解くため，

$$\theta = A\cos(\omega t + \alpha), \quad \varphi = B\cos(\omega t + \alpha) \tag{A-10}$$

と置いて (A-8), (A-9) に代入すると

$$(\omega^2 - \frac{g}{l})A + \frac{a}{l}\omega^2 B = 0 \tag{A-11}$$

$$\frac{ga}{\kappa^2}A + (\omega^2 - \frac{ga}{\kappa^2})B = 0 \tag{A-12}$$

を得る．これから A, B を消去すれば

$$\left(\omega^2 - \frac{g}{l}\right)\left(\omega^2 - \frac{ga}{\kappa^2}\right) - \frac{a^2}{\kappa^2 l}g\omega^2 = 0 \tag{A-13}$$

を得る．周期 = $\frac{2\pi}{\omega}$ なので $\kappa^2 = \frac{2}{5}a^2$ を代入すると (A-13) は

$$\frac{5}{2}\frac{g^2}{al}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^4 - \left(\frac{7}{2}\frac{1}{l} + \frac{5}{2}\frac{1}{a}\right)g\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 + 1 = 0$$

となるので

$$\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \frac{al}{5g}\left\{\frac{7}{2}\frac{1}{l} + \frac{5}{2}\frac{1}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{2}\frac{1}{l} + \frac{5}{2}\frac{1}{a}\right)^2 - \frac{10}{al}}\right\} = \frac{l}{2g}\left\{1 + \frac{7}{5}\frac{a}{l} \pm \sqrt{1 + \frac{6}{5}\frac{a}{l} + \frac{49}{25}\frac{a^2}{l^2}}\right\}$$

を得る．T_1 を根号の前の符号が + である解とすると，

$$\left(\frac{T_1}{2\pi}\right)^2 = \frac{l}{2g}\left\{1 + \frac{7}{2}\frac{1}{a} + \sqrt{\left(1 + \frac{7}{2}\frac{1}{a}\right)^2 - \frac{8}{5}\frac{a}{l}}\right\} \tag{A-14}$$

を得る．この解を $\frac{a}{l}$ で展開し，$\frac{a}{l} \ll$ とすると，

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l+a}{g}}\left(1 + \frac{1}{5}\frac{a^2}{l^2} - \frac{8}{25}\frac{a^3}{l^3} + \cdots\right)$$

を得る．これは長さ $l + a$ の単振り子の周期と比較する時，便利な式である．もう一つの周期は

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l+a}{g}}\sqrt{\frac{2}{5}\frac{a}{l}}$$

となり，非常に小さい.

(A-11) によれば $T = T_1$ のとき $A > B$ となり，$T = T_2$ の時は $A < B$ となり，これらの運動は基準運動と呼ばれるもので，一般の運動はこれらを合成した

$$\theta = A_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2), \quad \varphi = B_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + B_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2)$$

となる.

次いで $\frac{a}{l} \ll 1$ の場合，上記の振動系の T_1 を 2 種類の単純な振動系の周期で近似する．まず，この系を長さが $l + a$ の単振り子として扱った場合の周期は

$$T_S = 2\pi \sqrt{\frac{l+a}{g}}$$

となる．次にこの系を糸と球全体で一つの系と見なす (実体振り子)．この時 O の周りの慣性モーメント (I) は $M(l+a)^2 + \frac{2}{5}Ma^2$ なので，周期は

$$T_P = 2\pi \sqrt{\frac{(l+a)^2 + \frac{2}{5}a^2}{g(l+a)}}$$

となる．$\frac{a}{l} \ll 1$ としてこの式を展開すれば,

$$T_P = 2\pi \sqrt{\frac{l+a}{g}} \Big(1 + \frac{1}{5}\frac{a^2}{l^2} - \frac{10}{25}\frac{a^3}{l^3} + \cdots\Big)$$

となる．T_S, T_S, T_P を比べると，T_1 と T_S は $(\frac{a}{l})^2$ の程度の違いがあるが，T_1 と T_P は $(\frac{a}{l})^2$ の項まで一致し，$(\frac{a}{l})^3$ の項になってはじめてずれてくることがわかる.

以上が原島によるこの問題の説明の概略である．この解法では周期を求めることが主眼となっているが，オイラーは解法 (I), (II) では周期ではなく，相当単振り子の長さを求めているので $T_1, T_2\ T_s, T_P$ を与える相当単振り子の長さ f_1, f_2, f_s, f_P を与えよう.

まず，問題となっている振動系の相当単振り子の長さ f_1, f_2 を与える．$f_1 = (\frac{T_1}{2\pi})^2 g$ なので式 (A-14) より

$$f_1 = \frac{1}{2g}\Big\{1 + \frac{7}{5}\frac{a}{l} + \sqrt{1 + \frac{6}{5}\frac{a}{l} + \frac{49}{25}\frac{a^2}{l^2}}\Big\}$$

$l \gg a$ なので根号の中は $1 \gg (\frac{6}{5}\frac{a}{l} + \frac{49}{25}\frac{a^2}{l^2})$ として $1 \gg x$ の時の近似式 $(1+x)^k \cong 1 + kx + \frac{1}{2!}k(k-1)x^2 + \frac{1}{3!}k(k-1)(k-2)^3$ を用い，a の 4 乗以上の項を無視すると,

$$\sqrt{1 + \frac{6}{5}\frac{a}{l} + \frac{49}{25}\frac{a^2}{l^2}} \cong 1 + \frac{3}{5}\frac{a}{l} + \frac{4}{5}\frac{a^2}{l^2} - \frac{12}{25}\frac{a^3}{l^3}$$

を得る．故に，

$$f_1 = l\left(1 + \frac{a}{l} + \frac{2}{5}\frac{a^2}{l^2} - \frac{6}{25}\frac{a^3}{l^3}\right)$$

を得る．同様にして，

$$f_2 = l\left(\frac{2}{5}\frac{a}{l} - \frac{2}{5}\frac{a^2}{l^2} + \frac{6}{25}\frac{a^3}{l^3}\right)$$

を得る．

f_S は当然 $f_S = l + a$ となる．f_P については

$$\begin{aligned} f_P &= \left(\frac{T_P}{2\pi}\right)^2 g = \frac{(l+a)^2 + \frac{2}{5}a^2}{l+a} = l + a + \frac{2}{5}a^2 \times \frac{1}{l+a} \\ &\cong l + a + \frac{2}{5}a^2 \times \frac{1}{l}\left(1 - \frac{a}{l}\right) = l + a + \frac{2}{5}\frac{a^2}{l} - \frac{2}{5}\frac{a^3}{l^2} \end{aligned}$$

となる．

脚注

[1] 伊藤和行. 2013 年. 「Truesdell と 18 世紀力学史」『科学哲学科学史研究』(京都大学文学部科学哲学科学史研究室) 第 7 号，49-65 頁参照.

[2] 伊藤和行．2006 年．「オイラーの運動方程式」『科学哲学科学史研究』(京都大学文学部科学哲学科学史研究室) 第 1 号，153-169 頁.

———．2011 年．「18 世紀前半における力学の発展と流体力学の誕生」『数理解析研究所講究録』第 1749 号，1-15 頁.

———．「18 世紀前半の力学における「座標」概念」『科学哲学科学史研究』(京都大学文学部科学哲学科学史研究室)　第 6 号，91-102 頁.

[3] Leonhard Euler, *Opera Omnia* ser.4, vol.5, Correspondance de Leonhard Euler avec A. C. Clairaut, J. d'Alembert et J. L. Lagrange, pp.78-81，1740 年 12 月 26 日付の Euler から Clairaut 宛の手紙．また, Daniel Bernoulli が問題の検討を求める 1740 年 4 月 30 日付の Euler 宛の手紙も参照 (Fuss, P. H. ed., *Correspondance Mathematique et Physique de Quelques Celebres Geometres du VIII eme Siecle*, vol.2, Lettre XVIII, pp.458-460).

[4]「解法 (I)」とする．*Bibliotheca Mathematica.* Dritte Folge:Zeitschrift fur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. vol.7-3, 1906-1907, pp.145-150.

[5] Daniel Bernoulli, St.34,“Commentationes de Oscillationibus compositis praesertim iis quae fiunt in corporibus ex filo flexili suspensis”, *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, vol.12, 1740 (1750), pp.97?108 を指すと思われる.

[6] Johann Bernoulli, “Propositiones variae Mechanico-dynamicae. De Pendulo luxato, & ejus reductione ad Pendulum simplex isochronum”, *Opera*, vol.4, N° CLXXVII, pp.302-309; *Die Werke von Johan I und Nicolaus II Bernoulli*, Band 6, Mechanik I, 2008, Birkhauser, pp.412-418 と思われる.

[7] Euler, *Opera Omnia*, ser.4, vol.5, pp.81-88.

[8]「解法 (II)」とする. E159,“De motu oscillatorio corporum flexibilium,”*Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, vol.13 (1741/3), 1751, pp.124-166, arts.29-38; (*Opera Omnia*, ser.2, vol.10, pp.132-164). 記録によれば, 1742 年 8 月 20 日にサンクト・ペテルブルク・アカデミーに提示された (Gustaf Enestrom, *Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers*, 1913 による).

[9] Jean Le Rond D'Alembert, *Traité de Dynamique*, Paris, 1*ère* ed.1743, 2*ère* ed.1758. Problême VI.

[10] Daniel Bernoulli, St.67,“Vera Determinatio Centri Oscillationis in corporibus qualibuscunque filo flexili suspensis eiusque ab Regula communi Discrepantia”, *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, vo1.18, 1773 (1774), pp.247?267.

Euler の次の論文を「解法 (III)」とする. E455, “Determinatio motus oscillatorii in praecedente dissertatione pertracti, ex primis mechanica principiis petita”, *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, vo1.18, 1773 (1774), pp.268-288; *Opera Omnia*, ser.2, vol.11, pp.142-157. 記録によれば, 1773 年 12 月 9 日にサンクト・ペテルブルクアカデミーに提示された (Gustaf Enestrom, *Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers*, 1913 による).

[11] John T. Cannon, Sigalia Dostrovsky による命名である. 正確には「振り子の条件」とは系の各要素が同時につり合いの位置を通ることに加え, 振動数が振幅から独立していることも含む. 彼らの著書 *The Evolution of Dynamics: Vibration Theory from 1687 to 1742*, Springer-Verlag, 1981, pp.5-8 に簡単な pendulum condition の歴史が述べられている. 系の個々の点の加速力は鉛直線からの変位に比例すると言うこともできる.

[12] この関係式は，Euler が E49(注 28 参照) で与え，E159 で詳しく説明した．1740 年代の Euler，Daniel Bernoulli の解法では (Daniel Bernoulli に関しては 1773 年でも) この関係式が使われるので，その導出を簡単に説明する．

E159 において Euler は次のように書く．直線上を振動中心 O の周りに振動する物体を考える．物体に働く力 F を振動中心からの距離 x の冪の和に展開する ($F(x) = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \cdots$)．この時，微小振動なら 2 次以上の x の項を無視し，$F(x) = \alpha x$ と置くことができる．従って，加速度も x に比例する．$x = c$ の時の加速度を g とすると，加速度=$\frac{gx}{c}$ となる．次に，この振動と同じ周期で振動する単振り子の長さ f を求める．重力加速度を 1 とする．その紐の方向に垂直な重力加速度の成分は，つり合いの位置からの変位が x の時，微小振動なので，$\frac{x}{f}$ となり，$\frac{x}{f} = \frac{gx}{c}$ が成立すると，2 つの振動の周期は等しくなる．故に．$g = \frac{c}{f}$ が得られる．

[13] 本稿で採り上げる解法 (I), (II), (III) において Euler は明示しないが，質量と重さを同じ記号で表している様である．

[14] $\triangle ZAa$ と $\triangle ZGg$ は相似である．

[15] $\angle aZA = \angle mZM = d\theta$ と置くと，$aA \cong ZA \cdot d\theta$ かつ $mM \cong ZM \cdot d\theta$ なので $Mm = \frac{aA \cdot MZ}{AZ}$ となる．

[16] 明記されていないが，紐は質量を持たないとする．

[17] この Qq は力を表すので，図での Qq(距離を表す) とは異なる．また点 Q の位置は G を通る鉛直線と qR の交点としている様である．

[18] $Zq = \frac{k^2}{GZ} + GZ$ である．

[19] これは上の z を与える式の根号の前の符号がプラスの場合の値である．根号の前の符号がマイナスの場合は $z = \frac{2}{5}g - \frac{2gg}{5n} + \frac{6g^3}{25nn}$ となるが，この値について Euler の言及はない．

[20] E159, *Opera Omnia*, ser. 2, vol.10, pp.148-153.

[21] Euler による運動方程式の係数については，前述の「伊藤和行．　2006 年．「オイラーの運動方程式」　『科学哲学科学史研究』(京都大学文学部科学哲学科学史研究室)　第 1 号，153-169 頁」参照．

[22] ここでの ν はギリシャ文字のニューである．

[23] 2「振動」で 1 周期となる．なお，(III) では (I), (II) のように $a \gg b$ の場合の相当単振り子の長さ，あるいは系の振動周期を求めることはない．

[24]「序」で述べた Daniel Bernoulli の論文 St.67 を指す．

[25] 前述の「伊藤和行.「18 世紀前半の力学における「座標」概念」 『科学哲学科学史研究』(京都大学文学部科学哲学科学史研究室) 第 6 号，91-102 頁」参照.

[26] Euler の剛体運動論の一般的な発展については Guilio Maltese が *Da F=ma alle leggi cardinali del moto*, 2001 において詳しく論じている．ここでは剛体の振動ならびに回転運動に話を限る.

[27] E40“De minimis oscillationibus corporum tam rigidorum quam flexibilium. Methodus nova et facilis”, *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae* 7, (1734/5), 1740, pp. 99-122; *Opera Omnia*: ser.2, vol.10, pp.17-34. おそらく 1735 年 10 月 27 日にサンクト・ペテルブルク・アカデミーに提出された (Gustaf Enestrom, *Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers*, 1913 による).

[28] E49“De oscillationibus fili flexilis quotcunque pondusculis onusti”, *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, vol.8, (1736), 1741, pp. 30-47; *Opera Omnia* ser.2, vol.10, pp.35-49. 記録によれば 1735 年 1 月 31 日にサンクト・ペテルブルク・アカデミーに提出された (Gustaf Enestrom, *Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers*, 1913 による).

[29] Euler は次のように書く.「それ故，この関係 (モーメントのつり合い) より，物体の振動に関する悩ましい探求は，静力学の原理に還元される」(E40).

[30] Euler, *Opera Omnia*, ser.4, vol.2, p.193, note 10.

[31] E69“De communicatione motus in collisione corporum sese non directe percutientium”, *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, 9, 1744, pp.50-76; *Opera Omnia*: ser.2, vol.8, pp.7-26. 記録によれば，1736 年 11 月 15 日にサンクト・ペテルブルク・アカデミーに提出された (Gustaf Enestrom, *Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers*, 1913 による).

また，Maltese は Euler のこの分解について *ScientiaNavalis* で明確に述べたと書く (Guilio Maltese, *Da F=ma alle leggi cardinali del moto*, 2001, p.42). 更に前者の運動の Euler による解析の進展については，前述の「伊藤和行．2006 年.「オイラーの運動方程式」 『科学哲学科学史研究』(京都大学文学部科学哲学科学史研究室) 第 1 号，153-169 頁」に詳しい記述がある.

[32] E110, E111, *Opera Omnia*: ser.2, vols.18, 19. 出版は 1749 年であるが，1738 年 12 月 20 日の Euler から Johann Bernoulli への手紙によれば，基本的にはこの著作は 1738 年には完成されていた (Gustaf Enestrom, *Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers*, 1913 による).

[33] 彼の定義によれば，角加速度に相当する.

[34] 正確には，回転する角の代わりに角速度と置かねばならない．E78 では正しく，回転の力は与えられた時間における角速度の増加で評価できると書く．すなわち，$\frac{N}{I} \times dt = d\omega$ が与えられる.

[35] E78 “Dissertation sur la meilleure construction du cabestan”, *Piece qui a remporte le prix de l'academie royale des sciences* 1741, 1745, pp.29-87; *Opera Omnia*: Series 2, Vol.20, pp.36?82. 彼のラテン語のオリジナル原稿 “Dissertatio ad quaestionem de optimo modo anchoras attollendi ab ill. acad. Par. p. a. 1739 propositam” はサンクト・ペテルブルク・アカデミーに 1738 年 7 月 3 に付託された (Gustaf Enestrom, *Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers*, 1913 による)

[36] 慣性モーメントについては “Dissertation sur la meilleure construction du cabestan” では Moment de la Matiere du corps と名づけられ，*Scientia Navalis* では momentum inertiae と名づけられている．そして，それ以後は一貫して慣性モーメントという用語が用いられることとなる.

[37] E289, *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum*, published in 1765; *OperaOmnia*, ser.2, vols.3, 4.　印刷を監督した W. J. G.Karsten は，著作は 1760 年に完成し，1761 年初頭に原稿を受け取ったと述べている (Gustaf Enestrom, *Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers*, 1913 による).

[38] E289, *TheoriaMotus*, Problema 12, art.361; *OperaOmnia*, ser.2, vol.3, pp.162-163.

[39] E289, *TheoriaMotus*, Problema 44, art.522; *OperaOmnia*, ser.2, vol.3, pp.244-246. 更に *Theoria Motus*, Exemplum, art.546; *Opera Omnia*, ser.2, vol.3, pp.252-253.

[40] この著作により Euler の「成熟した」剛体の力学は完成すると Maletese は書く.

[41] 原島鮮「力学 (三訂版)」裳華房，1996，pp.194-196.