翻訳

最大および最小の方法によって決定される，抵抗のない媒質中での投射体の運動について

レオンハルト・オイラー

有賀 暢迪* 訳

De Motu Projectorum in Medio non Resistente, per Methodum Maximorum ac Minimorum Determinando

Leonhard Euler

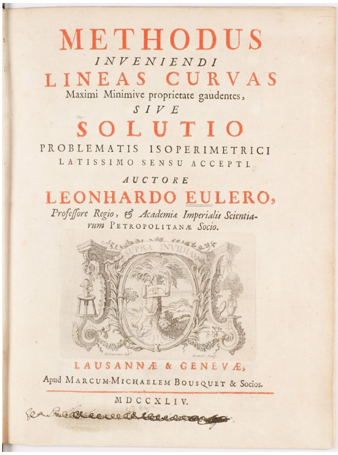
Translated by Nobumichi Ariga

訳者前書き

18 世紀を代表する数学者レオンハルト・オイラー（Leonhard Euler, 1707–1783）は，いわゆる純粋数学に限らず，広く数理科学の諸分野で多岐にわたる業績を残した．とりわけ力学においては，いわゆる運動方程式を用いて物体の運動を決定するという，我々が「ニュートン力学」と呼んでいる方法を確立したことで知られる．しかしオイラーの力学への貢献は，それだけにとどまるものではない．変分原理と呼ばれる別種の形式を用いた力学理論においても，その実質的な出発点を与えたのである．ここで変分原理とは，ある物理量が最小になる（より正確には極値を取る）という形で述べられる原理のことを言う．

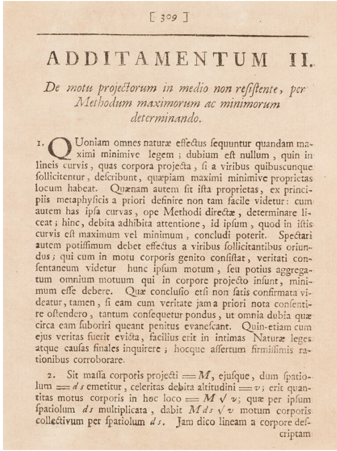
このたびここに訳出したオイラーの論考『最大および最小の方法によって決定される，抵抗のない媒質中での投射体の運動について』は，オイラーの主著の一つである書籍『最大または最小の性質を有する曲線を見出す方法』（1744 年出版，以下『方法』とする）の末尾に，『付録 2』として収録されたものである（図 1）．『方法』そのものは数学の一分野である変分法の古典であり，一般的な解法であるオイラー方程式がこの中で初めて与えられた．『付録 2』はその手法を用いて物体の運動を論じたもので，現代的に述べるなら，変分原理を質点の運動に適用した最初のものと言うことができる．なおこれに先立つ『付録 1』は，弾性を持つ薄板を曲げたときの形状という材料力

* 一橋大学大学院言語社会研究科



METHODUS
INVENIENDI
LINEAS CURVAS
Maximi Minimive proprietate gaudentes,
SIVE
SOLUTIO
PROBLEMATIS ISOPERIMETRICI
LATISSIMO SENSU ACCEPTI.
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio, & Academiæ Imperialis Scientiarum PETROPOLITANÆ *Socio.*
LAUSANNÆ & GENEVÆ,
Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.
MDCCXLIV.

(a) 扉ページ



[309]

ADDITAMENTUM II.

De motu projectorum in medio non resistente, per Methodum maximorum ac minimorum determinando.

1. Quoniam omnes naturæ effectus sequuntur quandam maximi minimive legem; dubium est nullum, quin in lineis curvis, quas corpora projecta, si a viribus quibuscunque sollicitentur, describunt, quæpiam maximi minimive proprietas locum habeat. Quænam autem sit ista proprietas, ex principiis metaphysicis a priori definire non tam facile videtur: cum autem has ipsa curvas, ope Methodi directæ, determinare liceat; hinc, debita adhibita attentione, id ipsum, quod in istis curvis est maximum vel minimum, concludi poterit. Spectari autem potissimum debet effectus a viribus sollicitantibus oriundus; qui cum in motu corporis genito consistat, veritati consentaneum videtur hunc ipsum motum, seu potius aggregatum omnium motuum qui in corpore projecto insunt, minimum esse debere. Quæ conclusio etsi non satis confirmata videatur, tamen, si eam cum veritate jam a priori nota consentire ostendero, tantum consequetur pondus, ut omnia dubia quæ circa eam suboriri queant penitus evanescant. Quin-etiam cum ejus veritas fuerit evicta, facilius erit in intimas Naturæ leges atque causas finales inquirere; hocque assertum firmissimis rationibus corroborare.

2. Sit massa corporis projecti $= M$, ejusque, dum spatiolum $= ds$ emetitur, celeritas debita altitudini $= v$; erit quantitas motus corporis in hoc loco $= M\sqrt{v}$; quæ per ipsum spatiolum ds multiplicata, dabit $Mds\sqrt{v}$ motum corporis collectivum per spatiolum ds. Jam dico lineam a corpore descriptam

(b) 『付録 2』開始ページ

図 1: オイラー『最大または最小の性質を有する曲線を見出す方法』（1744 年）（京都大学理学研究科数学・数理解析専攻数学教室図書室所蔵）

学的な問題を同様の手法で扱った内容である．

力学の変分原理は「最小作用の原理」（principle of least action）とも呼ばれる．この言葉は, 今日の物理学においては「ラグランジアンの時間積分が極値を取る」（$\delta\int Ldt = 0$）という命題（ハミルトンの原理）を指すのがふつうであるが，かつては「質量と速度と通過距離の積が最小になる」（$\delta\Sigma m\int uds = 0$, ここで m は質量，u は速度，ds は距離要素，Σ は系を構成するすべての物体についての和）という別の原理のことを指していた．この定式化は，オイラーの後継者と言うべきラグランジュ（Joseph Louis Lagrange, 1736–1813）が 18 世紀後半に与えたものである．そもそも変分法に δ という演算記号を導入したのはラグランジュであり，オイラーの『方法』では用いられていなかった．また「最小作用の原理」という表現それ自体は，オイラーの同時代人であったモーペルテュイ（Pierre-Louis Moreau de Maupertuis, 1698–1759）に由来している．

オイラーの『付録 2』は，ラグランジュによる解析的定式化の前段階として位置づけられる著作である．もっとも，変分記号 δ がまだ使われていないために，その論述は今日の眼にはかなり煩瑣なものと映るだろう．物理学的な内容の面でも，オイラーは一つの物体（質点）しか扱っておらず，しかも運動（位置の時間変化）というよりは

軌道の考察に終始している（有賀 2011）．こうした点は今日から見てオイラーの限界であったと言えるだろうし，実際にオイラー自身，『付録 2』より後にはむしろ，『付録 1』で扱われたような釣りあいの問題に注力していくことになった[1]．だがそれでも，ある普遍的な量が最小であるという一般原理から出発して物体の運動を論じているという意味では，『付録 2』は古典力学における変分原理の起源と呼ぶにふさわしい著作と言えるであろう．

*

本稿の訳文は，元をたどれば，伊藤和行先生が企画されたオイラーの力学論文集のために用意されたものである．訳者は 2006 年に京都大学大学院文学研究科の修士課程に入り，古典力学の歴史を本格的に研究し始めたが，その翌年がちょうどオイラーの生誕 300 年に当たっていた．正確な経緯は思い出すことができないが，伊藤先生が主宰されていた 18 世紀力学の原典を読む読書会（メンバーは中田良一，山本彰良の両氏と有賀であった）の席上で，この機会にオイラーの力学論文を翻訳・出版してはどうかという話が持ち上がったのではなかったかと思う．

私は大学院入学当時，「オイラーの変分力学」（有賀 2006）[2]を研究テーマとしており，フランス語の論文『モーペルテュイ氏の静止と運動の一般原理のあいだの調和』（1751 年）を検討した後の次の題材として，『付録 2』を読んでいた（ラテン語の原典に自力で取り組んだ最初のテクストだった）．伊藤先生は，「オイラー力学論文集」の中に変分力学に関するパートを含めることを提案してくださり，私が『調和』と『付録 2』の翻訳をすることになった．伊藤先生ご自身も，オイラーの力学論文のうち代表的なものである『力学の新しい原理の発見』（1750 年）などを訳出される予定で，実際に，推敲をおこなう前段階の訳稿を作られていた．だが結局，この企画は実現することなく終わった．

[1] 本稿の内容からは外れるが，オイラーが最終的に行き着いたのは「最小労力の原理」と呼ぶべきものであったと訳者は考えている．この点を含め，「最大および最小の方法」によるオイラーの力学の全体像については，有賀 2009 および有賀 2018, 第 9 章で詳しく論じているので参照していただきたい．

[2] この論文は，大学院入試の出願時に卒業論文に相当するものとして執筆した論文が元になっている．訳者がこの方面に進んだのは，まだ物理学を主専攻としていた学部生のとき，伊藤先生が開講された 18 世紀の力学に関する授業に出たことがきっかけであった．受験のための論文を用意するにあたって伊藤先生から受けた助言は，とにかく何か一つ原典を読み，それについて議論すればよいというもので，この論文は実際，それに徹している．後から見返すとあまりに視野が狭すぎて反省ばかりが残るが，右も左も分かっていなかった私に対して学術雑誌への投稿を勧めてくださったのは，原典を深く読み込むような研究を奨励する意図があったのかもしれないと思う．

今回，本誌の伊藤和行先生追悼号が編まれるにあたり，およそ 15 年前に作った訳文のプリントアウト（当時のデータはもう残っていなかった）を原文と再度突き合わせ，あらためて訳稿を作成した．その際，以前の訳では 20 世紀に編まれたオイラー全集の版を底本として用いていたが，デジタルアーカイブの普及により閲覧が容易になったことから原書（初版本）のほうを底本とすることにした．結果として，訳文そのものはそこまで大きく変わらなかったけれども，オイラーの力学思想や 18 世紀の数学に関する理解が深まったことにより，訳注の充実度は確実に増した．仮に「オイラー力学論文集」の企画が実現して出版されていた場合よりも，総じて質はよくなっていると信じている．

最後になるが，訳者が現在主宰している勉強会（古典力学の原典を原文で読むための会）の一部の参加者からは，旧稿を読んで気になった点をコメントしていただいた．ここに御礼を申し上げたい．

凡例

- 本稿の原典は，Leonhard Euler, “Additamentum II: De Motu Projectorum in medio non resistente, per Methodum maximorum ac minimorum determinando,” in *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes* (Euler 1744), pp. [311]–320 である[3]．翻訳にあたっては，京都大学貴重資料デジタルアーカイブで画像が公開されている京都大学理学研究科数学・数理解析専攻数学教室図書室所蔵本を底本とした[4]．また，オイラー全集に収められている版（Euler [1744] 1952, pp. 298–308）もあわせて参照した．
- 本文中，［ ］で示したのは訳者による補足・注記である．
- 原書に注はなく，本稿の注はすべて訳者による．全集では 1 箇所だけ編者による注があるが，この内容は訳注の中で紹介した．
- 訳注においてオイラーの他の著作に言及する際は，タイトルの日本語訳と，オイラーの著作番号（Eneström number）を示した．
- 図版は，原書では一括して書籍の巻末にまとめられており，本文の欄外に参照指示が記されている．本稿では，関連する本文に近い位置に図版を表示し，本文中に参照指示を加えた．図版の画像は，上記デジタルアーカイブのものを加工して利用した．
- 数式は，原書ではすべて本文中に組まれているが，全集では少し長い数式であれば独立した行に変えて組まれている．本稿ではその中間を採用し，行内に配置すると読みづらくなる数式について別行立てとした．
- 数式における表記は原則として原文を踏襲し，内容に影響しないごく軽微な変更を施すにとどめた．たとえば，2 乗は p^2 でなく原文通りに pp とした一方，平方根は原文では $\surd(a+gx)$ と書かれているのを $\sqrt{a+gx}$ に改めた．
- 数学用語の日本語訳については，オイラーの著書『無限解析入門』（1748 年）の邦訳（Euler [1748] 2001–2005）を主に参照したが，独自の訳語を与えたものもある．この場合には注で理由を記した．

[3] 開始ページには「309」と印刷されているが（図 1(b)），「311」が正しい．

[4] https://rmda.kulib.kyoto-u.ac.jp/item/rb00028915（最終閲覧 2022 年 10 月 31 日）．画像は IIIF 形式で公開されている．

付録 2　最大および最小の方法によって決定される，抵抗のない媒質中での投射体の運動について

1. あらゆる自然の効果は何らかの最大または最小の法則に従うのであるから，投射された物体が任意の力によって働きかけられているときに描く曲線の中に何かしら最大または最小の性質がある，ということには何の疑いもない．とはいえその性質がいったい何であるかを形而上学の原理からアプリオリに定めることはそれほど簡単でないように思われる[5]．しかしこの曲線そのものを直接的な方法によって決定することはできるのだから，これより然るべき注意が付け加えられるなら，その曲線において最大または最小であるものを結論することは可能だろう[6]．さらに主として考察されねばならないのは，働いている力に由来する効果である．この効果というのは生み出された物体の運動のことであるから，この運動そのもの，あるいはむしろ投射された物体に内在するすべての運動を足し合わせたものが最小でなければならない，というのは真理と一致するように思われる．この結論は十分に確証されているようには思われないのだが，すでにアプリオリに認められている真理と一致することを私が示せば，それをめぐって生じうるいかなる疑いも完全に消え去ってしまうほどの重要性が生じてくるだろう．それどころかさらに，その結論の正しさが証明された暁には，自然法則ならびに目的因を奥深くまで探究することや，この主張を極めて確実な論理によって強化することも，いっそう容易となるだろう．

2. 投射された物体の質量を M とし，微小距離 ds を進むあいだの高さによる速度を v とすると，この位置における物体の運動の量は $M\sqrt{v}$ となるだろう[7]．これはその微

[5] 「形而上学の原理からアプリオリに定める」という言い方でオイラーが何を意図していたかは，ここでは明確でない．しかし後年，オイラーは力学における変分原理に関連して『釣りあいの一般原理の形而上学的証明の試み』と題する論文（E200）を書いており，そこでは力の作用の一般的性質が議論されている．したがって「形而上学」という語は，狭義の哲学や神学ではなく，対象（ここでは力）の様態や本性についての考察といった意味で言われていると推察される（有賀 2018, pp. 212—214）．

[6] 「直接的な方法」とは，本稿の内容に即していえば，力の働きから物体の描く軌道を求めることを指す．現代の観点からは，運動方程式を用いた解法ということである．数年後に書かれたオイラーの別の論文『力の作用において認められる最大および最小についての探究』（E145）では，この方法は「作用因による効果を決定することで解を与える」とも表現されており，本稿の主題となっているような「目的因に着目し，そこから効果を導く」方法と対置されている（有賀 2018, p. 194）．

[7] オイラーは物体の速度をそのまま v と表すのでなく，「高さによる速度」（celeritas debita altitudini）と呼ぶものを用いて表現する．これは，自由落下する物体が当該の速度を獲得するような高さあるいは落下距離のことである．現代的に解釈するなら，高さ h から落下した物体が得る速度の大きさ u は重力加速度を g として $u = \sqrt{2gh}$ であるから，オイラーは $g = 1/2$ となるように単位系を選んでいる

小距離 ds をかけると，微小距離 ds にわたって集められた物体の運動［の量の合計］$Mds\sqrt{v}$ を与えるだろう．ここで私は次のように言う――物体によって描かれる線というのは，同じ両端につながれたすべての線のうち，$\int Mds\sqrt{v}$ が最小であるようなもの，すなわち，M は一定なので，$\int ds\sqrt{v}$ が最小であるような性質のものである，と．しかしさらに，探し求められている曲線があたかも［すでに］与えられているかのように眺められたならば，働いている力から，曲線に関する諸量によって速度 $\sqrt{v}$ を定めることができ，それゆえまた曲線そのものを最大および最小の方法によって求めることが可能である．それだけでなく，運動の量から取られたこの表式［$\int Mds\sqrt{v}$］は，活力に等しいと導くことが可能だろう[8]．というのも，［距離の］要素 ds を通過する微小時間を dt とおけば，$ds = dt\sqrt{v}$ であるから，$\int ds\sqrt{v} = \int vdt$ となるだろう．したがって，投射された物体によって描かれる曲線において，各瞬間に物体に内在する活力をすべて足し合わせたもの［すなわち $\int Mvdt$］は最小となる．そうであるから，力を速度そのものによって見積もるべきと主張する人々も，速度の 2 乗によって見積もるべきと主張する人々も，ここではその結果として何も明らかにされていないことを認めるであろう[9]．

3. したがってまず，もし物体が何の力もまったく受けていないと仮定するならば，その速度――ここではそれ自体［大きさ］のみに注目する（なぜなら向きは最大および最小の方法に包含されているから）――もまた，何の変化も受けないだろう．それゆえ v は定量，たとえば b であろう[10]．これより，何の力も受けていない物体は，どのように投射されたとしても，$\int ds\sqrt{b}$ あるいは $\int ds = s$ が最小になっているような線

ことになる（この問題に関する詳細な議論は伊藤 2006 を参照されたい）．以下の本文を読んでいく上では，オイラーが「速度」と呼んでいる v が実際には速度の 2 乗に相当しており，$\sqrt{v}$ のほうが速度の次元を持つことに注意する必要がある（物理量の次元という概念はこの時代には考えられていなかった）．それゆえ，$M\sqrt{v}$ は質量と速度の積であるから今日の運動量に相当する．これは当時，デカルトに由来する「運動の量」（quantitas motus）として知られていた．

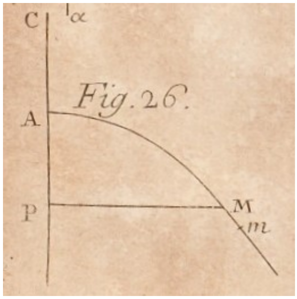
[8] 「活力」（vis viva）はライプニッツに由来する概念である．その大きさは物体の質量と速度の 2 乗とに比例するとされ，この意味で現在の運動エネルギーに相当する．

[9] 18 世紀前半には，「力」がデカルトの主張したように質量と速度に比例するのか（運動の量），それともライプニッツが主張したように質量と速度の 2 乗とに比例するのか（活力）が問題となっていた．これに関する一連の議論は活力論争と呼ばれるが，オイラーのここでの指摘は論争から距離を取ろうとするものと解釈できる（有賀 2018, p. 201）．

[10] 今日の用語としては「定数」であるが，18 世紀の解析学は「量」の数学であるため「定量」（quantitas constans）と訳す．後に出てくる「変量」（variabilis）も同様の趣旨である．近い時期に書かれたオイラーの著書『無限解析入門』（E101 および 102）では，これらの量が本論の最初で定義されている（第 1 巻 §1 および §2）．なお同書の邦訳では「定量」「変化量」と訳されているが，漢字 2 文字で揃えるほうが対概念として自然に思われるため，後者を「変量」とした．

を描くだろう．ゆえにこの経路は，同じ両端につながれたすべての線のうちで［長さが］最小となるだろうし，かつ，力学の第一原理が要請するように，直線となるだろう[11]．この事例をここで持ち出しているのは，私の原理が確証されると考えているからではまったくないのだが——というのも，速度 $\sqrt{v}$ の代わりに v のどんな他の関数を採用していたとしても[12]，まったく同様に直線経路を進んだはずだからである——しかし最も単純な場合から始めることによって，その一致の理路はより容易に理解されうるだろう．

4. ゆえに，一様な重力の場合へと進もう．すなわちこの場合には, 投射された物体はどこにあっても，水平線に垂直な方向に，一定の加速力 g を下向きに受けている［Fig. 26］．AM をこの仮定の下で物体が描くであろう曲線とし，鉛直線 AP を軸として取る．そして切断線 AP を x, 規則線 PM を y, 曲線の要素 Mm を ds とおく[13]．ゆえに励動の本性から[14]，$dv = gdx$, さらには［両辺を積分して］ $v = a + gx$ となるだろう［(a は定量)］[15]．これより曲線は，そ



[11] 「力学の第一原理」（prima Mechanicae principia）とは，いわゆる慣性の法則を指している．

[12] ある変量の「関数」（functio）とは，『無限解析入門』においては，その変量および定量から「何らかの仕方で組み立てられた解析的表式」と定義されている（第 1 巻 §4）．オイラーの解析学への貢献としてしばしば指摘されるのは関数の概念を中心に据えたということであるが，これはその原初的形態と言うべきものである．

[13] ここで定義される x と y の組は我々が物体の位置座標と呼ぶものであるが，その設定の仕方は今日と異なる．つまり，ここでは空間に対して x 軸と y 軸が設定されるのではなく，まず 1 本の軸が設定され，物体からこの軸に向かって線（PM）が引かれる．次いでその交点において軸の一部が切り取られる（AP）．x と y は軸につけられた目盛りというよりも，このようにして作られる 2 本の線の長さとして把握される．これらの線 AP および PM はラテン語で‘‘abscissa’’および‘‘applicata’’と呼ばれ，既存の邦語文献では「縦線」「横線」（中村 1980, pp. 49—56「歴史的に見た座標」）や「切除線」「向軸線」（『無限解析入門』の高瀬訳，第 2 巻 §11）といった訳語が与えられている．本稿では，これらの語の元々の表現が‘‘linea abscissa’’（切断された線）および‘‘linea ordinatim applicata’’（規則的に引かれた線）であることから，原義を生かして「切断線」「規則線」と訳した．なお 18 世紀の力学における座標系の問題については，管見の限り，伊藤 2012 が唯一のまとまった研究である．

[14] 「励動」（sollicitatio）は，ここでのオイラーの用語法としては，我々が「力の働き」と呼ぶものに相当すると考えてよい．このため本稿では，これに対応する動詞の sollicito は「(力が）働く」「(力を）受ける」などと適宜訳している．ただし，この語は元々はライプニッツに由来する表現であり，独自の意味合いを有していた．この事情の詳細については有賀 2018, 特に第 2 章第 3 節および第 7 章を参照されたい．

[15] v が実際には速度の 2 乗の次元を持つため，$dv = gdx$ という式は現代の観点からは，運動エネルギーの微小変化が物体に対してなされる微小な仕事に等しい，と解釈できる．これはオイラーがしばしば

こにおいて $\int ds\sqrt{a+gx}$ が最小となるような性質のものだろう．$dy=pdx$ とおくと，$ds=dx\sqrt{1+pp}$ となり，そして最小でなければならないものは $\int dx\sqrt{(a+gx)(1+pp)}$ である．この表式は，一般公式 $\int Zdx$ と比較すると，$Z=\sqrt{(a+gx)(1+pp)}$ を与える[16]．それゆえ，［一般的解法に従えば］ $dZ=Mdx+Ndy+Pdp$ とおくのだから，$N=0$ かつ $P=\frac{p\sqrt{a+gx}}{\sqrt{1+pp}}$. ゆえに，微分の値が $N-\frac{dP}{dx}$ であるから[17]，$N=0$ なので今の場合には $dP=0$, さらには $P=\sqrt{C}$ となるだろう．ゆえに

$$\sqrt{C}=\frac{p\sqrt{a+gx}}{\sqrt{1+pp}}=\frac{dy\sqrt{a+gx}}{ds}$$

が得られ，そこから $Cdx^2+Cdy^2=dy^2(a+gx)$, さらには

$$dy=\frac{dx\sqrt{C}}{\sqrt{a-C+gx}}$$

となる．これは積分すると $y=\frac{2}{g}\sqrt{C(a-C+gx)}$ を与える．

5. この式が放物線に対するものであることはまったく明白である．けれどもそれが真理と一致することは，いっそう注意深く考察したことによって支援されるだろう．ゆえにまず，この曲線の接線［の一つ］が水平線すなわち $dx=0$ であるのは明らかであり，このとき $a-C+gx=0$ である．したがって，切断の始点 A は我々の任意の選択に依存するのだから，それを適切な場所に取れば，$C=a$ となるだろう．すると確かにこの点を通る軸そのものが曲線の頂点を通っており，したがって $x=0$ とおけば同時に $y=0$ となる．この考察から，曲線に対する方程式は $y=2\sqrt{\frac{ax}{g}}$ となるだろう．これが放物線に対するものであるのは明らかだがそれだけではなく，点 A での速度が $\sqrt{a}$ なのだから，落下において同じ力 g を受ける物体が点 A を運動する際にそれと同じ速度を獲得するような高さ CA というのは $\frac{a}{g}$ に等しいだろう．つまり，［放物線の］パラメータの 4 分の 1 に等しい[18]．［このことは］まさしく，投射体の運動の学説から

用いた基本的な関係式であり，伊藤 2006 では「『高さ』による運動方程式」という名前が与えられている．

[16] これ以降は，『方法』の本編で述べられた一般的解法の適用である．つまり現代的に述べれば，$Z=Z(x,y,y')$ に対して変分法のオイラー方程式 $\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial Z}{\partial y'}\right)=0$ を解くことになる．オイラーの記号法では，$M=\frac{\partial Z}{\partial x}, N=\frac{\partial Z}{\partial y}, P=\frac{\partial Z}{\partial y'}$ であるので，オイラー方程式は $N-\frac{dP}{dx}=0$ と書き表される．これは本稿では $Ndx=dP$ という形でも現れる．

[17] ここでの「微分の値」（valor differentialis）という表現の意味は判然としないが，指されているものは前注の最後で示したオイラー方程式の左辺であり，これがゼロに等しいということから以後の議論は進んでいる．

[18] パラメータとは，円錐曲線（2 次曲線）の焦点の一つを通って主軸に直交する弦を指す用語である（『無限解析入門』第 2 巻，§129）．数式で表すと，$y=4kx^2$ のとき，k がこの長さに対応する．

直接的な方法によって理解されている通りである．

6. 前と同じように物体はどこにおいても鉛直下向きに力を受けているが，働いている力の大きさは一定でなく，何らかの仕方で高さ CP に依存するとしよう．すなわち，切断線 CP を x とおくとき，M にある物体が下方へ向かおうとする力は x の任意の関数 X に等しいとする．ゆえに規則線 PM を y, 弧の要素 Mm を ds と名付け，また $dy = pdx$ とするならば，$dv = Xdx$ さらには $v = A + \int Xdx$ となるだろう．よって，最小でなければならないものは次の表式 $\int dx \sqrt{(A + \int Xdx)(1 + pp)}$ であり，ここから，描かれる曲線 AM に対するものとして次の方程式

$$\sqrt{C} = \frac{p\sqrt{A + \int Xdx}}{\sqrt{1 + pp}}$$

が得られるだろう．［この式から］さらに

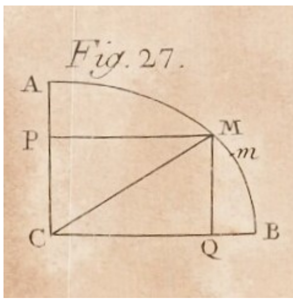
$$p = \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{A - C + \int Xdx}} = \frac{dy}{dx}$$

であり，すなわち［これを解くと］

$$y = \int \frac{dx\sqrt{C}}{\sqrt{A - C + \int Xdx}}$$

である．ゆえに曲線の接線は $\int Xdx = C - A$ のとき水平線となる．実際，これと同じ方程式が物体の軌道に対して直接的方法により見出される．

7. 今度は物体が M において二つの力を受けているとし，一方は MP の方向に沿った水平な力 Y, もう一方は MQ の方向に沿った鉛直な力 X とする［Fig. 27］．さらに X は鉛直線 MQ = CP = x の任意の関数，Y は規則線 PM = y の任意の関数とする．ゆえに前と同じように $dy = pdx$ とおけば $dv = -Xdx - Ydy$ となるだろうし，さらには $v = A - \int Xdx - \int Ydy$ となる．そこから，最小でなければならないものは次の表式 $\int dx \sqrt{(1 + pp)(A - \int Xdx - \int Ydy)}$ である．$\sqrt{(1 + pp)(A - \int Xdx - \int Ydy)}$ が微分さ



れるとすると，

$$\frac{-Xdx\sqrt{1+pp}}{2\sqrt{A-\int Xdx-\int Ydy}}-\frac{Ydy\sqrt{1+pp}}{2\sqrt{A-\int Xdx-\int Ydy}}+\frac{pdp\sqrt{A-\int Xdx-\int Ydy}}{\sqrt{1+pp}}$$

が生じてくるだろう[19]．これより，

$$N=\frac{-Y\sqrt{1+pp}}{2\sqrt{A-\int Xdx-\int Ydy}}\quad \text{および}\quad P=\frac{p\sqrt{A-\int Xdx-\int Ydy}}{\sqrt{1+pp}}$$

とおけば，求める曲線に対するものは次の方程式 $0=N-\frac{dP}{dx}$, すなわち $Ndx=dP$ となる．ゆえにこれより，

$$\frac{-Ydx\sqrt{1+pp}}{2\sqrt{A-\int Xdx-\int Ydy}}=\frac{dp\sqrt{A-\int Xdx-\int Ydy}}{(1+pp)\sqrt{1+pp}}-\frac{pXdx+pYdy}{2\sqrt{(1+pp)(A-\int Xdx-\int Ydy)}}$$

すなわち

$$\frac{dp\sqrt{A-\int Xdx-\int Ydy}}{(1+pp)\sqrt{1+pp}}=\frac{Xdy-Ydx}{2\sqrt{(1+pp)(A-\int Xdx-\int Ydy)}}$$

となり，それゆえまた

$$\frac{2dp}{1+pp}=\frac{Xdy-Ydx}{A-\int Xdx-\int Ydy}$$

となる．この方程式が真理に一致することは，$A-\int Xdx-\int Ydy$ の代わりに v とおけば明白である．というのも，

$$\frac{2vdp}{(1+pp)^{3:2}}=\frac{Xdy-Ydx}{\sqrt{1+pp}}$$

となるだろう[20]．ところが曲率半径は

$$r=-\frac{(1+pp)^{3:2}dx}{dp}$$

---

19 「微分する」という表現の意味は，現代的には，$Z=\sqrt{(1+pp)(A-\int Xdx-\int Ydy)}$ を $x, y, p(=dy/dx)$ の関数と見て，Z の全微分を計算することに相当する．以降の議論においても同様である．

20 「3:2」は原文通りの表記であり，2 分の 3 乗を意味する．

であり，これを導入すると

$$\frac{2v}{r} = \frac{Ydx - Xdy}{ds}$$

である．ここで $\frac{2v}{r}$ は物体の遠心力であり，また $\frac{Ydx-Xdy}{ds}$ は働いている力に由来する垂直な力を表している．これらの力が等しいことは，投射体のあらゆる運動においてどんな場合でも成り立つ[21]．

8. さらに，見出された方程式

$$\frac{2dp}{1+pp} = \frac{Xdy - Ydx}{A - \int Xdx - \int Ydy}$$

は，$\frac{p(A-\int Xdx - \int Ydy)}{1+pp}$ を［両辺に］かければ，一般的に積分可能である．というのも，［実際に計算すると］

$$\frac{2pdp(A - \int Xdx - \int Ydy)}{(1+pp)^2} - \frac{ppXdx - Ydy}{1+pp} = 0$$

となり[22]，これは積分すると $\frac{-p^2\int Xdx + \int Ydy - A}{1+pp} = C$ を与える．すなわち $\int Ydy - p^2 \int Xdx = A + C + Cpp$ であり，そこから，$-A-C$ の代わりに B とおけば $p = \frac{\sqrt{B+\int Ydy}}{\sqrt{C+\int Xdx}}$ である．ゆえに，$p = \frac{dy}{dx}$ なので，

$$\int \frac{dy}{\sqrt{B + \int Ydy}} = \int \frac{dx}{\sqrt{C + \int Xdx}}$$

が求める曲線に対する方程式だろう．ここでは変量 x と y が互いに分離されている．あるいは，もし定量 B および C が負に変えられたなら，［求める曲線に対する方程式は］

$$\int \frac{dy}{\sqrt{B - \int Ydy}} = \int \frac{dx}{\sqrt{C - \int Xdx}}$$

だろう[23]．これら［の積分方程式］から曲線の簡単な構造は得られるのだとしても，［曲線を表す］代数方程式が，それ自体のうちに確かに含まれているときに毎回それほ

---

[21] ここでは当時すでに知られていた遠心力の式が参照されている．v が速度の 2 乗に比例する量であるため，$2v/r$ が現代の遠心力の表式に相当しており，これは法線方向の力成分と釣りあう．

[22] 計算の過程で $p = dy/dx$ の関係を用いている．左辺第 2 項の分子 $ppXdx - Ydy$ は原書では $ppXdx + Ydy$ になっているが，全集では注記なく訂正されており，ここでも後者を採用した．

[23] 原書では右辺の分母にある C が A と書かれており，これは全集でも同様であるが，誤植と考えられるため訂正した．

ど容易に見つけられるわけではない．X と Y が類似関数で[24]，かつちょうど x, y のべき乗であるとし，したがって

$$\int \frac{dy}{\sqrt{b^n - y^n}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^n - x^n}}$$

であるとすると，この方程式は $n = 1$ ならば放物線を与えるが，$n = 2$ ならば C に中心を持つ楕円を与える——ただしいずれの場合においても，積分には円の求積が必要とされるのだが．ゆえに，どちらの積分もうまくいかないような他の場合においてもなお，代数曲線がこれを満たすことはありそうに思われる[25]．しかしそれらを見出す方法は今でも待ち望まれている．

9. 物体 M がある力で常に固定点に向かって MC の方向に押されているとし，その力は距離 MC の任意の関数に比例するものとする．前と同じように CP=x, PM=y, $dy = pdx$ とおき，CM=$\sqrt{x^2 + y^2} = t$ とし，そして T は向心力を表す t の関数とする[26]．この力が MQ と MP の方向に［二つの］側面へと分解されるものとすると，MQ に沿った引力は $\frac{Tx}{t}$, MP に沿った力は $\frac{Ty}{t}$ となるだろう．これらから，$xdx + ydy = tdt$ であるので，$dv = -\frac{Txdx}{t} - \frac{Tydy}{t} = -Tdt$ の加速が生じる[27]．そこから $v = A - \int Tdt$ となる．このことゆえに，最小でなければならないのは次の表式 $\int dx \sqrt{(1 + pp)(A - \int Tdt)}$ である．さて，規則［すなわち一般的解法］の指示に従って $\sqrt{(1 + pp)(A - \int Tdt)}$ という量が微分されるとすると，

$$-\frac{Tdt\sqrt{1 + pp}}{2\sqrt{A - \int Tdt}} + \frac{pdp\sqrt{A - \int Tdt}}{\sqrt{1 + pp}}$$

が生じてくるだろう．ゆえに，$dt = \frac{xdx + ydy}{t}$ であるので，

$$N = \frac{-Ty\sqrt{1 + pp}}{2t\sqrt{A - \int Tdt}} \quad \text{かつ} \quad P = \frac{p\sqrt{A - \int Tdt}}{\sqrt{1 + pp}}$$

---

[24] 「類似関数」（functio simil）とは，例えば $Z = a + bz + cz^2$ と $Y = a + by + cy^2$ のように，同じ「様式」で定められた関数のことを指す（『無限解析入門』第 1 巻，§26）．

[25] 「代数曲線」（curva algebraïca）とは，座標 x, y のあいだの関係が何らかの代数方程式によって表されるものを指す（『無限解析入門』第 2 巻，§15）．

[26] 「向心力」（vis centripeta）はニュートンに由来する用語であり，ある中心へと向かう力を指す．

[27] ここで「加速」（acceleratio）と呼ばれているものは，速度の時間微分（今日の「加速度」）ではなく，速度の微小変化量である．加えて，v は実際には速度の 2 乗に対応することに注意する必要がある．関係式 $dv = -Tdt$ については前注 15 を参照.

となるだろう．これらから曲線に対する方程式 $Ndx = dP$ が作られ，それは次を与える．

$$-\frac{Tydx\sqrt{1+pp}}{2t\sqrt{A-\int Tdt}} = \frac{dp\sqrt{A-\int Tdt}}{(1+pp)\sqrt{1+pp}} - \frac{pTdt}{2\sqrt{(1+pp)(A-\int Tdt)}}.$$

これはまた，まとめると次のものに変わるだろう．

$$\frac{T(xdy-ydx)}{2t(A-\int Tdt)} = \frac{dp}{1+pp}.$$

10. この方程式は四つの異なる文字［で表された変量］を含んではいるものの，それでも適切な工夫によって積分されうる．というのも，$ydy + xdx = tdt = pydx + xdx$ なので，$dx = \frac{tdt}{x+py}$ かつ $dy = \frac{ptdt}{x+py}$ となるだろう．これらの値は，方程式に代入されると，

$$\frac{(px-y)Tdt}{2(x+py)(A-\int Tdt)} = \frac{dp}{1+pp},$$

すなわち

$$\frac{Tdt}{2(A-\int Tdt)} = \frac{dp(py+x)}{(1+pp)(px-y)}$$

を与えるだろう．この表式は両辺ともに対数によって積分可能である．というのも，［左辺は］$\int \frac{Tdt}{2(A-\int Tdt)} = -\frac{1}{2}\log(A-\int Tdt)$ であり，［右辺の］$\int \frac{dp(x+py)}{(1+pp)(px-y)}$ は分解されて $\int \frac{xdp}{px-y} - \int \frac{pdp}{1+pp} = \log \frac{px-y}{\sqrt{1+pp}}$ となる．したがって

$$\frac{C}{\sqrt{A-\int Tdt}} = \frac{px-y}{\sqrt{1+pp}}$$

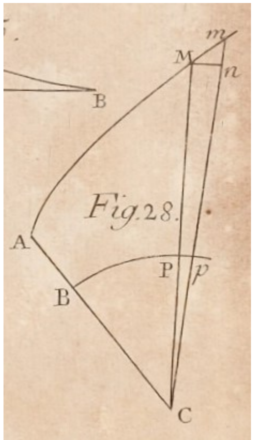
である．この方程式から明らかになるのは，M における物体の速度——これは $\sqrt{A-\int Tdt}$ である——が，C から接線へと下ろされた垂線［の長さ］に逆比例するということである[28]．これはこの［向心力による］運動の賞賛すべき特性である．

11. しかしこうするよりも，この同じ問題は，直線 CM そのものを片方の変量として採用することで，より適切に解かれうる．実際，上で説明した方法は，両方の変量が直交する座標であることを要請していない——一組の量がそのようになっていれば，それらが決定されると同時に曲線上の点も決定されるのではあるのだが．この理由のために，距離 CM と C から接線に下ろした垂線とを，そうした一組の変量として認め

[28] 方程式の右辺は，$p = dy/dx$ を代入して整理すると $(xdy–ydx)/\sqrt{dx^2+dy^2}$ となる．幾何学的考察から，これは接線に下ろした垂線の長さになっていることが分かる．

ることはできなかっただろう．なぜなら，たとえ中心からの距離と接線への垂線がどちらも与えられたとしても，ここから曲線上の点の場所は［一意に］決定されないからである．しかし，距離 CM と，C を中心に描かれた円の弧 BP とを二つの変量の代わりとすることは，何者も妨げない［Fig. 28］．というのも，弧 BP と距離 CM が与えられると，曲線上の点 M は直交座標［を用いた場合］と同様に決定されるからである[29]．ゆえにこの注意によって，［最大および最小の］方法の利用ははるかに広げられるのだが，このことは他のところでも見て取れるだろう．

12. したがって，中心からの物体の距離 MC を x とし，物体が中心 C に向かって受けている力を x の任意の関数 X とする．C を中心として，好きなように取られた半径 BC=c により円が描かれるものとし，その弧 BP が片方の変量 y の地位を占めるとすると，その結果として Pp=dy=pdx である．さらに，働いている力からは $dv = -Xdx$ であり，そこから $v = A - \int Xdx$ である．C を中心として，半径 CM=x により，小弧 Mn が描かれるとすると，mn=dx であり，また CP:Pp=CM:Mn であろう．そこから Mn=$\frac{pxdx}{c}$ となり，距離の要素は Mm=$dx\sqrt{1+\frac{ppxx}{cc}}$ となる．そうであるから，最小でなければならないのは次の式 $\int dx\sqrt{(A-\int Xdx)(1+\frac{ppxx}{cc})}$ である．ここから微分の値



$$\frac{1}{dx}d\cdot\frac{pxx\sqrt{A-\int Xdx}}{c\sqrt{cc+ppxx}}$$

が生じる．これは，規則［すなわち一般的解法］によってゼロに等しいとおかれると，次の方程式を与えるだろう．

$$\sqrt{C}=\frac{pxx\sqrt{A-\int Xdx}}{c\sqrt{cc+ppxx}},$$

すなわち $Cc^4 + Cccppxx = (A - \int Xdx)ppx^4$. ここから次のようになる．

$$p=\frac{cc\sqrt{C}}{(A-\int Xdx)x^4 - Cccxx}=\frac{cc\sqrt{C}}{x\sqrt{(A-\int Xdx)xx\text{–}Ccc}}$$

[29] このようにして設定される座標は実質的に，C を中心とした極座標になっている．

すなわち

$$dy = \frac{ccdx\sqrt{C}}{x\sqrt{(A - \int Xdx)xx - Ccc}}.$$

これと同じ方程式が，直接的な方法によってもやはり見出される．

13. したがってこの事例からは，ここで確立された原理と真理との完全なる一致は光り輝いている．しかし，その一致がいっそう複雑な事例においてもやはり成り立つだろうかという疑問は残りうる．そうであるから，その原理の本性が認めるよりも多くのことがそれに与えられてしまわないように，それがどれほどの広がりを持っているのか，より注意深く調べられるべきであろう．これを説明するためには，投射体の運動全体が二種類に分けられねばならない．その一方においては，物体がそれぞれの場所で有する速度は位置だけに依存しており，したがって同じ位置に戻ってくれば，また同じ速度を取り戻すことになるだろう．このようなことが起こるのは，物体が一つまたは多数の固定中心へ向かって引かれていて，その力が中心からの距離の任意の関数に比例するときである．［これに対して］もう一つの種類に私が関係づける投射体の運動は，物体の速度がそれの存在する場所だけによっては決定されないようなものである．それが生じるのは，物体がそれに向かって力を受けている中心が動くようになったか，あるいは運動が抵抗のある媒質中でなされるようになったときである．この分類がなされた上で注意すべきなのは，物体の運動が第一の種類に関係しているときには，つまり物体が一つに限らずいくらでも多くの固定中心に向かって任意の力を受けているのなら，この運動においては常に運動の要素の総和が最小になっているだろう，ということである．

14. このことはさらに［以下のような］命題の素性を要請している．すなわち，$\int ds\sqrt{v}$ が最小であるような曲線が与えられた［二つの］端点のあいだで探されているときには，いかなる曲線が物体の経路を規定するにしても，両端での物体の速度は［それぞれ］同じであるということが前提されているのである[30]．しかし，力の固定中心がどれだけ多くなっても，任意の場所 M での物体の速度は CP=x と PM=y という両変量の定まった関数によって表される［前掲 Fig. 27］．したがって，v を x と y の任意の関数とし，したがって $dv = Tdx + Vdy$ であるとして，我々の原理が物体の真なる投射を示そうとしているかどうかを吟味しよう．ところで $dv = Tdx + Vdy$ なのだか

[30] 現代的に解釈すると，このことが意味するのは，本稿で提示された一般原理が成り立つのは力学的エネルギーが保存される場合に限られるということである．

ら，物体は，M において二つの力を受けているとした場合と同様に動かされるだろう．すなわち一方は切断線 x に平行な方向に T で，他方は規則線 y に平行な方向に V で動かされるのであり，これらから接線力 $\frac{Tdx+Vdy}{ds}$ と法線力 $\frac{-Vdx+Tdy}{ds}$ が生じてくる．しかし，自由な運動の本性から，

$$\frac{2v}{r} = \frac{-Vdx + Tdy}{ds} = \frac{-V + Tp}{\sqrt{1 + pp}}$$

でなければならない［(本稿 §7 を参照)］．もしこの方程式へと最大および最小の方法が導いてくれるのであれば，我々の原理はどんな場合にも真理に適っているだろう．

15. したがって，この原理によれば $\int dx\sqrt{v(1+pp)}$ が最小でなければならないのだから，$\sqrt{v(1+pp)}$ という量が微分されるとしよう．すると，$dv = Tdx + Vdy$ であるので，

$$\frac{Tdx\sqrt{1+pp}}{2\sqrt{v}} + \frac{Vdy\sqrt{1+pp}}{2\sqrt{v}} + \frac{pdp\sqrt{v}}{\sqrt{1+pp}}$$

が生じるだろう[31]．ここから，先に説明されたことに従うと，求める曲線に対して以下の方程式が得られる．

$$\frac{Vdx\sqrt{1+pp}}{2\sqrt{v}} = d\cdot\frac{p\sqrt{v}}{\sqrt{1+pp}} = \frac{dp\sqrt{v}}{(1+pp)^{3:2}} + \frac{p(Tdx+Vdy)}{2\sqrt{v(1+pp)}}$$

すなわち

$$\frac{-dp\sqrt{v}}{(1+pp)^{3:2}} = \frac{Tpdx - Vdx}{2\sqrt{v(1+pp)}}.$$

ところが M における曲率半径は $\frac{-(1+pp)dx\sqrt{1+pp}}{dp}$ に等しい．これを r とおけば，［上述の方程式は］

$$\frac{2v}{r} = \frac{Tp - V}{\sqrt{1+pp}}$$

となるだろう．まったくもって，直接的方法により見出される通りである．ゆえに，働いている力が，座標［として用いられる線］x, y に平行な方向に働く二つの力 T, V へと分解できるような性質のものになっていて，それら［二つの力］がこれらの変量 x, y の任意の関数に比例するなら[32]，そのときには常に，描かれる曲線において，全要素にわたって集められた物体の運動が最小になっているだろう．

[31] 第 2 項の分子に含まれる $\sqrt{1+pp}$ は原書では $\sqrt{c+pp}$ になっているが，全集では注記なく訂正されており，ここでも後者を採用した．

[32] オイラー全集でこの著作の巻を編集したカラテオドリによれば，T と V は厳密には $dv = Tdx + Vdy$ を満たす必要があり，オイラーは晩年の論文『最速降下線に関するいっそう綿密な探究』(E759) の中でこのような問題の正しい解を与えている．

16. ゆえにこの原理はたいそうな広がりを持っていて，ただ抵抗のある媒質によって乱される運動だけが除外されるべきと思われるほどである．確かに，この除外の理由は容易に察せられる．それというのもこの場合には，異なる経路を通って同じ場所に到達する物体は同じ速度を獲得しないからである．そうであるから，投射された物体の運動においてあらゆる抵抗が取り除かれれば，要素的な運動［の量］の総和が最小であるというこの一定した性質がいつでも成り立つだろう．しかも，この性質は一つの物体の運動において認められるというだけではないのであって，任意の仕方で相互作用している多くの物体の結合した運動においてもやはり，運動［の量］の総和はつねに最小なのである[33]．このことは，そのような運動を計算に帰着させることが難しいため，両者の方法［直接的な方法と最大および最小の方法］に従って実行された計算の一致よりも，［力学の］第一原理によって理解するほうが容易である．実際，物体は慣性のためにあらゆる状態変化に抵抗するので，本当に自由であるのなら，［その物体に］働きかけている力にはできる限り従わないであろう．ここから次のことが論証される．すなわち，［実際に］生み出された運動において力から生じた効果は，［仮に］ある別の仕方で一つまたは複数の物体が動かされたとするときよりも，少なくなければならない[34]．この推論の力は，たとえまだ十分に調べられてはいないのだとしても，しかし真理と合致するのだから，より健全な形而上学の原理の助けによってさらに明白なものに高められうることを私は疑わない．その仕事は，形而上学を専門とするほかの人々に残しておこう．

[33] オイラーはこのように主張しているが（そして実際正しいのだが），本稿の中で具体的に示されているわけではない．現実には，オイラー自身も認めるように，本稿で展開されたような数学的手法によって複数の物体の運動を扱うことは困難に思われる．後年，ラグランジュは変分記号 δ を用いて，相互作用する複数の物体の運動を扱った（有賀 2011 および有賀 2018, 第 10 章第 1 節）．

[34] 「第一原理」すなわち慣性の法則に基づくこの解釈は，オイラーにとっての変分原理が今日理解されているような「極値をとる」というものではなく，文字通り「最小である」という内容であったことを示している．この点は後年の論文『モーペルテュイ氏の静止と運動の一般原理のあいだの調和』（E197）に至って問題化することになる（有賀 2006）．

参考文献

Euler, Leonhard. 1744. *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici lattissimo sensu accepti*. Lausannae et Genevae: Apud Marcum Michaelem Bousquet et Socios.

———. [1744] 1952. *Leonhardi Euleri Methodus inveniendi lineas curvas: maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*, ed. Constantin Carathéodory. *Leonhardi Euleri Opera Omnia*, ser. I, vol. XXIV. Turici: O. Füssli.

———. [1748] 2001–2005. 『オイラーの無限解析』および『オイラーの解析幾何』高瀬正仁訳．東京：海鳴社，2001 年および 2005 年．［*Introductio in analysin infinitorum* (1748) 第 1 巻および第 2 巻の翻訳.］

有賀暢迪．2006. 「オイラーの変分力学」『科学史研究』第 45 巻，220–228 頁.

———．2009. 「モーペルテュイの「作用」，オイラーの「労力」：十八世紀中葉における二つの最小作用の原理」『科学史研究』第 48 巻，77-86 頁.

———．2011. 「黎明期の変分力学：モーペルテュイ，オイラー，ラグランジュと最小作用の原理」『数理解析研究所講究録』（京都大学数理解析研究所）1749, 16–29 頁.

———．2018.『力学の誕生：オイラーと力概念の革新』名古屋：名古屋大学出版会.

伊藤和行．2006. 「オイラーの運動方程式」『科学哲学科学史研究』（京都大学文学部科学哲学科学史研究室）第 1 号，153–169 頁.

———．2012. 「18 世紀前半の力学における「座標」概念」『科学哲学科学史研究』（京都大学文学部科学哲学科学史研究室）第 6 号，91–102 頁.

中村幸四郎．1980.『近世数学の歴史：微積分の形成をめぐって』東京：日本評論社.