F 爆発と本質因子

安田健彦（大阪大学）

本稿は, 城崎代数幾何学シンポジウム 2023 での著者による講演に基づく報告集原稿である. 論文 [CMDY23] で得られた結果を，あまり技術的詳細に立ち入らずに紹介し，主結果の証明については雰囲気のみ伝えることを目的とする．議論の詳細は論文を参照して欲しい．また，最後の章では，いくつかの未解決問題を挙げる．

本稿を通して，簡単のために，代数的閉体 k を基礎体として固定し話を進める．

1　F 爆発の導入

まず，k の標数が正であると仮定して，F 爆発（F-blowup）を定義しよう．$e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し，$F^e \colon X_e \to X$ を（k 線形）Frobenius 射の e 回繰り返しとする．非特異点 $x \in X_{\mathrm{sm}}$ に対し，スキーム論的逆像 $(F^e)^{-1}(x)$ は X_e のファットポイントとなる．対応する X_e の Hilbert スキームの点を $[(F^e)^{-1}(x)]$ とすると，写像

$$\iota_e \colon X_{\mathrm{sm}} \to \mathrm{Hilb}(X_e),\, x \mapsto [(F^e)^{-1}(x)]$$

は埋め込みとなる．

定義 1.1 ([Yas12])**.** $\iota_e(X_{\mathrm{sm}})$ のザリスキ閉包を X の e **次 F 爆発**と呼び，$\mathrm{FB}_e(X)$ と記す．

自然な射

$$\mathrm{FB}_e(X) \to X,\, [Z] \mapsto F^e(Z)$$

は射影双有理射となる．この射は，有限射 F^e の普遍双有理平坦化としても特徴付けられる．$\mathrm{FB}_e(X)$ の正規化を $\widetilde{\mathrm{FB}}_e(X)$ と記す．

注意 1.2. X_e と X を通常の方法で同一視したとき，ファット・ポイント $(F^e)^{-1}(x)$ は x の（正標数特有の）無限小近傍を与える．このファット・ポイントを任意標数で考えられる通常の n 次無限小近傍で置き換えると，n 次 Nash 爆発 $\mathrm{Nash}_n(X)$ になる [Yas07]．このように，F 爆発は高次 Nash 爆発の類似物である．

トーリック多様体の場合は, 標数零でも「Frobenius-like」な自己射が存在するので, F 爆発を定義することができる. k の標数は任意であるとし, M と N を互いに双対な階数 d の自由アーベル群とする. $\sigma \subset N_{\mathbb{R}} := N \otimes \mathbb{R}$ を d 次元強凸有理多面錐とし，X を対応する（正規）アフィン・トーリック多様体，つまり，$\mathrm{Spec}\, k[M \cap \sigma^\vee]$ とする．

定義 1.3 (「Frobenius-like」な自己射)**.** $l \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し，

$$F_{(l)} \colon X_{(l)} = \mathrm{Spec}\, k[(\frac{1}{l}M) \cap \sigma^\vee] \to X = \mathrm{Spec}\, k[M \cap \sigma^\vee]$$

を埋め込み $M \cap \sigma^\vee \hookrightarrow (\frac{1}{l}M) \cap \sigma^\vee$ に対応する射とする．

モノイドの同型

$$M \cap \sigma^\vee \xrightarrow{\sim} (\frac{1}{l}M) \cap \sigma^\vee,\, m \mapsto m/l$$

により，$X_{(l)}$ と X は同型であることに注意する．k の標数が $p > 0$ のときは，$F_{(p^e)} = F^e$ となる．

定義 1.4 ([Yas12])**.** 定義1.1において，F^e を $F_{(l)}$ に置き換えて構成される $X_{(l)}$ の Hilbert スキームの部分多様体を $\mathrm{FB}_{(l)}(X)$ と記し，$\widetilde{\mathrm{FB}}_{(l)}(X)$ をその正規化とする．

自然な射影双有理射

$$\mathrm{FB}_{(l)}(X) \to X,\, \widetilde{\mathrm{FB}}_{(l)}(X) \to X$$

が存在する．本稿では，正規化された爆発 $\widetilde{\mathrm{FB}}_{(l)}(X)$ の方を主に考える．$\widetilde{\mathrm{FB}}_{(l)}(X)$ は再びトーリック多様体となり，X への自然な射はトーリック射である．従って，錐 σ を分割する扇に対応する．

命題 1.5 ([Yas12])**.** $\widetilde{\mathrm{FB}}_{(l)}(X)$ に対応する扇は，環 $k[\frac{1}{l}(M \cap \sigma^\vee)]$ の次のイデアルの *Gröbner* 扇に一致する．

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}_l &:= \langle x^m - 1 \mid m \in M \rangle_{k[\frac{1}{l}M]} \cap k[\frac{1}{l}(M \cap \sigma^\vee)] \\ &= \langle x^a - x^b \mid a, b \in \frac{1}{l}(M \cap \sigma^\vee),\, a - b \in M \rangle_{k[\frac{1}{l}(M \cap \sigma^\vee)]}.\end{aligned}$$

注意 1.6. この命題はアーベル群 G に対する G-Hilbert スキームを Gröbner 扇により記述する結果 [HIS17] の類似と見なせる。

また，トーリック多様体の F 爆発の列は次の良い性質を満たす．

命題 1.7 ([Yas12])**.** 爆発の列 $\widetilde{\mathrm{FB}}_{(1)}(X), \widetilde{\mathrm{FB}}_{(2)}(X), \ldots$ は終止する．つまり，ある l_0 に対し，$\widetilde{\mathrm{FB}}_{(l_0)}(X) = \widetilde{\mathrm{FB}}_{(l_0+1)}(X) = \cdots$ となる．

定義 1.8. 命題1.7において，列が終止して得られる爆発 $\widetilde{\mathrm{FB}}_{(l_0)}(X)$ を $\widetilde{\mathrm{FB}}_{(\infty)}(X)$ と記し，トーリック多様体 X の**正規極限 F 爆発**と呼ぶ.

注意 1.9. 正標数の一般の特異点については, F 爆発の列 $\mathrm{FB}_1(X), \mathrm{FB}_2(X), \ldots$ は終止しない. [HSY13, Har15] において，単純楕円特異点で F 爆発の列が終止しない場合があることが示された.

2　F 爆発による特異点解消

F 爆発に関する最も素朴な問題は以下の問いだろう．

問題 2.1. 与えられた代数多様体 X に対し，e が十分大きければ $\mathrm{FB}_e(X)$（または，$\widetilde{\mathrm{FB}}_e(X)$）は非特異か？

この問いへの答えが肯定的な場合は,「ワン・ステップ」で特異点解消を構成できることになる．知られている結果により，答えは肯定的な場合も否定的な場合もあることが分かっている．まず，X が 1 次元の場合は肯定的である [Yas12]．次に，X が 2 次元 F 正則であれば，十分大きな e に対し，$\mathrm{FB}_e(X)$ は最小特異点解消となることが示されている [Yas12, TY09, HS11, Har12]．3 次元以上の結果は，F 爆発を G-Hilbert スキームとの比較によって得られる．

命題 2.2 ([Yas12, TY09])**.** 位数が k の標数で割り切れない有限群 G がアフィン空間 $\mathbb{A}^d_k$ に線形に作用しているとする．また，この作用は擬反射（*pseudo-reflection*）を持たないとする．このとき，付随する *G-Hilbert*

スキーム $\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{A}_k^d)$ と，十分大きな e に対する $\mathrm{FB}_e(\mathbb{A}_k^d/G)$ は同型になる：

$$\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{A}_k^d) \cong \mathrm{FB}_e(\mathbb{A}_k^d/G) \quad (e \gg 0)$$

注意 2.3. この同型は [LY23] において，G が線形簡約有限群スキームである場合に一般化された．

命題より，$G \subset \mathrm{SL}_3(k)$ の場合には，$\mathrm{FB}_e(\mathbb{A}_k^3/G)$ がクレパント特異点解消になることが従う．一方，一般に $\mathrm{FB}_e(\mathbb{A}_k^d/G)$（$e \gg 0$）は非特異でない．さらに，非正規であることもあり，正規だが非特異であることもある．最後の場合は，$\widetilde{\mathrm{FB}}_e(X)$（$e \gg 0$）も一般には非特異となることを導く．

まとめると，特別な場合には，F 爆発は最小特異点解消やクレパント特異点解消などの良い特異点解消を与えるが，一般には特異点を解消を与えないことが先行研究で分かっていた．そこで，F 爆発が特異点解消にならない場合でも，もう少し弱い主張は成り立つだろうかと問うことが，次に考えるべき自然な問題となるだろう．このような問題の一つとして，本質因子に関連するものについて部分的な答を得たというのが，本研究の主結果である．

3　本質因子

引き続き X を正規代数多様体とする．X 上空の因子 D が**本質因子（essential divisor）**であるとは，D が X の全ての特異点解消に「現れる」ことを言う．厳密には,「現れる」の意味を，素因子（余次元 1）として現れることを要請するのか，それとも，例外集合の（余次元が 2 以上かもしれない）既約成分として現れれば良いことにするのかにより違う概念となる．また，考える特異点解消に何らかの条件を課すことによっても，変種の概念が得られる．このように,「本質因子」の概念には複数のバージョンが存在する．いずれのバージョンを考えるにしろ，次の一般的な問題を考える事ができる．

問題 3.1. 与えられた正規代数多様体 X に対し，X 上空の全ての本質因子は $\widetilde{\mathrm{FB}}_e(X)(e \gg 0)$ の上に現れるか．

注意 3.2. この問題を考える契機の一つとなったのは，Chávez-Martínez [CM23] による高次 Nash 爆発に関する次の定理である：基礎体 k の標数は 0 とする．X は A_n 型の曲面特異点とする．このとき，十分大きな n に対し，全ての本質因子は $\mathrm{Nash}_n(X)$ 上に現れる．F 爆発についても，同じ事が（任意の正規トーリック曲面特異点に対しても）成り立つが，最小特異点解消が得られてしまうため，本質因子という視点は当初はなかった．高次 Nash 爆発は，A_3 特異点の場合で既に，複雑な振る舞いをする．n が大きくなるにつれて，扇がどんどん細分され，全ての n に対して，$\mathrm{Nash}_n(X)$ は特異点を持つ [TY19].

注意 3.3. 本質因子の概念は、アークの族に関する Nash 問題（Nash 問題の基本的文献として [IK03] を挙げておく）に登場することで有名である。問題2.1は Nash 問題の類似と見ることができる。

今回の研究では，トーリック多様体の場合に，この問題を部分的に解決した．ここで，我々が考える本質因子の定義を正確に定義する．

定義 3.4 ([BGS95])**.** 正規トーリック多様体 X の上空の因子 D が **BGS 本質**であるとは，全てのトーリック特異点解消 $Y \to X$ に対し，D が Y 上に素因子として現れるということである．

また，トーリック多様体の場合は，すでに見たように，任意標数で正規 F 爆発の列 $\widetilde{\mathrm{FB}}_{(l)}(X)$, $l \in \mathbb{Z}_{>0}$ は終止する．さらに，終止により得られる正規極限 F 爆発 $\widetilde{\mathrm{FB}}_{(\infty)}(X)$ に対応する扇 Δ は基礎体 k に依存しないこ

とも分かっている．

我々の主結果を述べるために，稳健トーリック特異点解消という概念を導入する．$f\colon Y\to X$ をトーリック特異点解消とし，Σ を対応する σ の分割とする．任意の d 次元錐 $\tau\in\Sigma$ は単体的であり，d 個の 1 次元の面を持つ．これら 1 次元面の原始元（primitive element）を $v_1,\dots,v_d\in N$ とすると，$v_1,\dots,v_d$ を通るアフィン超曲面 $H_\tau\subset N_{\mathbb{R}}$ が一意的に定まる．

定義 3.5. $f\colon Y\to X$ をトーリック特異点解消とし，Σ を対応する σ の分割とする．f が**稳健（moderate）**であるとは，任意の d 次元錐 $\tau\in\Sigma$ に対し，H_τ が σ を二分した片側（原点を含む側）が有界になることと定義する．

例 3.6. 2 次元トーリック曲面の最小特異点解消や，任意次元のクレパント・トーリック特異点解消は稳健である．

注意 3.7. 稳健トーリック特異点解消には，例外因子として BGS 本質因子しか現れない [CMDY23]．一方，BGS 本質因子だけが現れるようなトーリック特異点解消を持たないトーリック特異点も存在する [BGS95]．従って，一般には稳健トーリック特異点解消は存在しないことが分かる．

定理 3.8. 正規トーリック多様体 X が稳健トーリック特異点解消を持てば,全ての *BGS* 本質因子は $\widetilde{\mathrm{FB}}_{(\infty)}(X)$ 素因子として現れる．

4　どのような議論をするのか

主定理の証明の詳細は論文 [CMDY23] にゆずるが，ここでは，その雰囲気を紹介したい．$\widetilde{\mathrm{FB}}_{(\infty)}(X)$ はイデアル $\mathfrak{a}_l\subset k[\frac{1}{l}(M\cap\sigma^\vee)]$（$l\gg 0$）の Gröbner 扇であることを紹介した．このイデアルは二項式イデアル（binomial ideal）である．$\frac{1}{l}(M\cap\sigma^\vee)$ の二点 a,b の対で差 $a-b$ が M に属するものに対し，二項式 x^a-x^b で生成される．基本的に議論は二項式だけを考えれば良く（三項式や四項式は考える必要がない），従って，順序対 (a,b) を考えればよい．順序対 (a,b) を a を頭（head），b を尾（tail）とした矢（arrow）で視覚的に表すと便利である．ここで，l が非常に大きい（例えば 10 億ぐらい）を想像してみよう．$\frac{1}{l}(M\cap\sigma^\vee)$ の点は，$\sigma^\vee$ のほぼ至る所にある．上述のような矢は，頭と尾の差 $a-b\in M$ を保ったまま，ほぼ連続的に動かせることになる．つまり，錐 $\sigma^\vee$ の中で矢 $\overrightarrow{ba}$（$a-b\in M$）の幾何学をすることになる．

我々は，特定の $0\neq w\in\sigma\cap N$ に対し，$\mathbb{R}_{\geq 0}w$ が $\widetilde{\mathrm{FB}}_{(\infty)}(X)$ に対応する扇 Δ に属することを示したい．これは，w をいろいろな方向に摂動したときに，w に関する先頭イデアルが様々な単項イデアルになりうることを意味する．w が変化したときに先頭イデアルが変化するためには，w と直交する矢が必要である．そのような矢はに対応する二項式は，w が少し変化すると，どちらの項が先頭になるかが変化する．さらに，この二項式の先頭項が変化するだけでなく，問題の先頭イデアルが変化するためには，この変化により先頭でなくなった項が，他の二項式の先頭項で生成されない必要がある．

これらの方針を厳密化し，原点に近い w に直交する矢で，その向きが一次独立なものを沢山見つけてくる（存在を示す）ことをするのである．

5　今後の問題

今後の研究課題として考えられる問題をいくつか挙げて本稿を終わりにする．一般には穏健トーリック特異点解消は存在しないことから，次の二つの問題が自然と出てくる．

問題 5.1. 穏健トーリック特異点解消を持つようなトーリック多様体のできるだけ広いクラスを見つけよ．

問題 5.2. 穏健トーリック特異点解消を持たないトーリック特異点に対し，問題3.1を調べよ（調べるための新しいテクニックを見いだせ）．

今回の研究では，問題3.1をトーリック多様体に制限して考察した．そのため手法もトーリック多様体特有のものになっている．

問題 5.3. トーリックでない代数多様体に対し，問題3.1を調べよ．

参考文献

[BGS95] Catherine Bouvier and Gérard Gonzalez-Sprinberg. Système générateur minimal, diviseurs essentiels et G-désingularisations de variétés toriques. *Tohoku Mathematical Journal*, 47(1):125–149, 1995.

[CM23] Enrique Chávez-Martínez. Factorization of the normalization of the Nash blowup of order n of $\mathcal{A}_n$ by the minimal resolution. *Revista Matemática Iberoamericana*, 39(4):1201–1232, 2023.

[CMDY23] Enrique Chávez-Martínez, Daniel Duarte, and Takehiko Yasuda. F-blowups and essential divisors for toric varieties, arXiv:2304.13247.

[Har12] Nobuo Hara. F-blowups of F-regular surface singularities. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 140(7):2215–2226, 2012.

[Har15] Nobuo Hara. Structure of the F-blowups of simple elliptic singularities. *The University of Tokyo. Journal of Mathematical Sciences*, 22(1):193–218, 2015.

[HIS17] Toshihiro Hayashi, Yukari Ito, and Yuhi Sekiya. Existence of crepant resolutions. In *Higher dimensional algebraic geometry—in honour of Professor Yujiro Kawamata's sixtieth birthday*, volume 74 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 185–202. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2017.

[HS11] Nobuo Hara and Tadakazu Sawada. Splitting of Frobenius sandwiches (Higher Dimensional Algebraic Geometry). 数理解析研究所講究録別冊, B24:121–141, 2011.

[HSY13] Nobuo Hara, Tadakazu Sawada, and Takehiko Yasuda. F-blowups of normal surface singularities. *Algebra & Number Theory*, 7(3):733–763, 2013.

[IK03] Shihoko Ishii and János Kollár. The Nash problem on arc families of singularities. *Duke Mathematical Journal*, 120(3):601–620, 2003.

[LY23] Christian Liedtke and Takehiko Yasuda. Non-commutative resolutions of linearly reductive quotient singularities, arXiv:2304.14711.

[TY09] Yukinobu Toda and Takehiko Yasuda. Noncommutative resolution, F-blowups and D-modules. *Advances in Mathematics*, 222(1):318–330, 2009.

[TY19] Rin Toh-Yama. Higher Nash blowups of the A_3-singularity. *Communications in Algebra*, 47(11):4541–4564, 2019.

[Yas07] Takehiko Yasuda. Higher Nash blowups. *Compositio Mathematica*, 143(6):1493–1510, 2007.

[Yas12] Takehiko Yasuda. Universal flattening of Frobenius. *American Journal of Mathematics*, 134(2):349–378, 2012.