Preimages question of self-morphisms on projective varieties

松澤陽介 *（大阪公立大学）

目次

1 Preimages Question

数論力学系では代数多様体の自己写像 $f\colon X \longrightarrow X$ による有理点の軌道の数論的な性質を研究する．そのような文脈で，以下のような問いは自然である．

部分多様体 $Y \subset X$ に対して，有理点 $x \in X$ で $f^n(x) \in Y$ となるものはどの程度あるか？

この問いは f の n 回合成 f^n よる Y の逆像が有理点をどの程度持つかという問題と同値である．一般に $f^{-n}(Y)$ は n が大きくなるときどのような多様体になるだろうか？ f が同型の場合は Y と同型なものが出てくるだけだが，f が同型からはかけ離れてる場合は典型的には $f^{-n}(Y)$(の既約成分) は代数幾何的に複雑なものになっていくことを期待してもそれほど的外れではないと思われる．そして幾何的に複雑な多様体は有理点をあまり持たないということが期待されているので，元の問題の答えとしてはそのような有理点はあまり存在しないという方向のものが期待される．

問いを立てるだけなら Y として何を許しても良いのだが，ここでは f-不変なものに注目する．（ここでは深く立ち入らないが Y が f-不変ではない場合は以下で述べる問題 1.3 には非自明な反例がある (cf. [4])．この場合は問題はより難しく，どういうことが期待できるべきかについてまだわかっていないというのが現状である．）f-不変な部分多様体というのは力学系の文脈だと点の軌道の Zariski 閉包として自然に登場するので，設定として自然だと言える．さて Y が f-不変ならば，$f^{-n}(Y)$ は X の部分集合の上昇列をなす．従って，n が 1 増える毎に新たな既約成分が付け加わっていくという状況が発生するが，この新たな既約成分に有理点が乗っているのかというのが我々の問いである．

典型的な例を二つ挙げる．

* matsuzaway@omu.ac.jp

例 1.1. $f\colon \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2, (x:y:z) \mapsto (x(x^2-y^2+z^2):y^3:z^3)$ とし，$Y=(x=0)$ とする．この時,

$$\begin{array}{ccccccc} Y & \subset & f^{-1}(Y) & \subset & f^{-2}(Y) & \subset & \cdots \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\ (x=0) & & (x(x^2-y^2+z^2)=0) & & (x(x^2-y^2+z^2)(x^2(x^2-y^2+z^2)^2-y^6+z^6)=0) & & \end{array}$$

となる．ここで，$f^{-2}(Y)$ で初めて現れた既約成分 $((x^2-y^2+z^2)^2-y^6+z^6=0)$ は種数 10 の曲線である．従って，さらに引き戻した $f^{-3}(Y), f^{-4}(Y), \ldots$ で新たに現れる既約成分も全て種数が 10 以上になる．特に Faltings の定理からそれらの既約成分は有理点を高々有限個しか持たない.

例 1.2. $f\colon \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2, (x:y:z) \mapsto (x^2:y^2:z^2)$ とし，$Y=(x-y=0)$ とする．この時,

$$\begin{array}{ccccccc} Y & \subset & f^{-1}(Y) & \subset & f^{-2}(Y) & \subset & \cdots \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\ (x-y=0) & & (x^2-y^2=0) & & (x^4-y^4=0) & & \end{array}$$

で，一般に $f^{-n}(Y)=(x^{2^n}-y^{2^n}=0)$ となる．従って

$$f^{-n}(Y)=\bigcup_{\zeta^{2^n}=1}(x-\zeta y=0)$$

となり，$f^{-n}(Y)$ の既約成分は全て $\mathbb{P}^1$ と同型になる．しかし，各既約成分は 1 の適切な冪根が入っている体上でしか定義できないことに注目してもらいたい．特に例えば固定された代数体 K 上で全て考えている場合，$f^{-n}(Y)$ の幾何的に既約な既約成分は n によらず有限通りしか現れない．幾何的に既約ではない曲線は有理点を高々有限個しか持たないことが簡単に示せることを注意しておく．(今の場合は一つも持たない．)

これらの観察に基づき以下のような問いを提唱した.

問題 1.3 (Preimages Question [1,3])**.** K を代数体，X を K 上の射影多様体，$f\colon X \longrightarrow X$ を K 上の自己全射とする．$Y \subset X$ を部分スキームとし，f-不変だと仮定する．($f|_Y\colon Y \longrightarrow X$ が $Y \subset X$ を経由するということ．)

(1) ある $s_0 \geqslant 0$ が存在して任意の $s \geqslant s_0$ に対して

$$(f^{-s-1}(Y)\backslash f^{-s}(Y))(K)=\varnothing$$

となるか？

(2) 任意の $D \geqslant 1$ に対してある $s_0 \geqslant 0$ が存在して任意の $s \geqslant s_0$ に対して

$$(f^{-s-1}(Y)\backslash f^{-s}(Y))(L)=\varnothing$$

が任意の有限次拡大 $K \subset L$ で $[L:K] \leqslant D$ なるものに対して成立するか？

注意 1.4. 対称積を考える標準的なトリックで，実は全ての (K,X,f,Y) に対する (1) から (2) が従うことが証明できる [4, Proposition A].

Preimages Question の特殊な場合として，以下のような設定を考えることができる．$f\colon X \longrightarrow X$ を射影多様体の自己全射とし，その直積

$$f \times f\colon X \times X \longrightarrow X \times X$$

を考える．この $f \times f$ は対角部分集合 $\Delta \subset X \times X$ を不変にする．この場合に Preimages Question を適用したのが以下の予想である．

予想 1.5 (Cancellation conjecture [1])**.** K を代数体，X を K 上の射影多様体，$f\colon X \longrightarrow X$ を K 上の自己全射とする．ある $s_0 \geqslant 0$ が存在して，任意の $a, b \in X(K)$ に対して以下が成立する：ある $s \geqslant 0$ が存在して $f^s(a) = f^s(b)$ ならば $f^{s_0}(a) = f^{s_0}(b)$.

2　異なる設定での反例

一般に写像 $f\colon X \longrightarrow X$ と部分多様体 $Y \subset X$ が与えられたとき，$f^{-s-1}(Y) \backslash f^{-s}(Y)$ が空集合になるかどうかという問題が考えられるが，これには多くの場合反例がある．問題 1.3 には今のところ反例は見つかっていないが，これは様々な条件が絶妙に噛み合っているということなのかもしれない．

この節では問題 1.3 における設定を少し変えると反例が存在する例を紹介する．

まずアフィン多様体上では反例がある．

例 2.1. $f\colon \mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{A}^2, (x, y) \mapsto (xy, y+1)$ とし，$Y = (x = 0)$ とすると，

$$f^{-n}(Y) = (xy(y+1)\cdots(y+n-1) = 0).$$

したがって $f^{-s-1}(Y) \backslash f^{-s}(Y) = (y + s = 0) \backslash (x = 0)$ でこれは任意の s に対して $\mathbb{Q}$ 値点を無限個もつ.

この例の場合 f は有限射ではないことを注意しておく．多様体が射影的ではなくても自己射が有限の場合はいまだに私は反例を知らない.

問題 2.2. *Preimages Question* 問題 *1.3* は X が準射影多様体で f が有限射の場合に肯定的か？

典型的な設定として射影多様体 X の自己射の族

$$f\colon X \times T \longrightarrow X \times T$$

と，f 不変な部分多様体 $Y \subset X \times T$ という設定がある．これは 3 つ組み (X_t, f_t, Y_t) に対する問題 1.3 の s_0 の一様性を問うていることになり非常に興味深い．族がアーベルスキームで Y が 0 切断，f が p 倍写像の場合はアーベル多様体のトーション点の p-primary part の一様性という問題になるが，これに関しては例えば [2] で肯定的な結果が得られている (パラメタースペースが曲線の場合).

さて多様体が射影的の場合でも，例えば複素数体上の場合などは問題 1.3 はもちろん成立しない．しかし例えば $\mathbb{Q}_p$ など p 進体上ではどうだろうか？この場合でも Cancellation conjecture 予想 1.5 の反例が構成できる.

例 2.3 ([1, Proposition 6.1])**.** $f\colon \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2, (x : y : z) \mapsto (x^2 + yz : x^2 + y^2 + z^2 : z^2)$ とすると，任意の $p \leqslant \infty$ と任意の $n \geqslant 1$ に対してある点 $a, b \in \mathbb{P}^2(\mathbb{Q}_p)$ が存在し $f^n(a) = f^n(b)$ かつ $f^{n-1}(a) \neq f^{n-1}(b)$. 証明のアイデアはシンプルである．$(f \times f)^{-s}(\Delta)$ の新しい既約成分上に古い成分には含まれない $\mathbb{Q}_p$ 点があることを言えば良い．ここで滑らかな $\mathbb{Q}_p$ 点が一つでもあると，Zariski 稠密に $\mathbb{Q}_p$ 点があることに注意する．今の場合新しい既約成分で点 $((0 : 0 : 1), (0 : 0 : 1))$ を滑らかな点として持つものがあることを示せる.

3 主定理

定理 3.1 ([1,4])**.** 問題 *1.3* の答えは f が *étale* の場合と $\dim Y = 0$ の場合は肯定的である．

定理 3.2 ([1,4])**.** 問題 *1.3(1)* の答えは $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の場合肯定的である．特に予想 *1.5* は $\mathbb{P}^1$ 上で成立する．

注意 3.3. 最近 Zhong が問題 1.3(1) を $X = (\mathbb{P}^1)^n$ に対して証明した [5]．高次元の場合から $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の場合に帰着し，最終的には $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ と対角部分集合の場合 ([1]) を用いて証明している．彼の方法は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の場合に限定しても我々の方法とは異なるものであることを注意しておく．

証明はどちらの定理も多少技術的な要素がるので，詳しくは述べないが，最も基本的なアイデアだけ説明する．

(定理 3.1 の f が étale の場合のアイデア) 簡単のため Y が normal だと仮定する．この場合 K の整数環 $\mathcal{O}_K$ のある極大イデアル $\mathfrak{p}$ での局所環 $\mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}$ 上のモデル

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Y} \arrow[d, phantom, "\cap"] & & \\
\mathcal{X} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr] & & \mathcal{X} \arrow[dl] \\
& \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}} &
\end{tikzcd}$$

を $\mathcal{Y}$ が normal で F は étale になるようにとれる．この場合 $F^{-s}(\mathcal{Y})$ は $F^{-s}(\mathcal{Y}) = \coprod_i \mathcal{Z}_i$ と既約成分の disjoint union にかける．L を K の高々 D 次の拡大だとすると，$f^{-s}(Y)$ の L 点は $F^{-s}(\mathcal{Y})$ のある $\mathcal{O}_{L,\mathfrak{q}}$ 点を与える．ここで $\mathfrak{q}$ は $\mathfrak{p}$ の上に乗っている $\mathcal{O}_L$ のある素イデアルである．ここで

$$\#\mathcal{O}_{L,\mathfrak{q}}/\mathfrak{q} \leqslant (\#\mathcal{O}_{K,\mathfrak{p}}/\mathfrak{p})^D =: q^D$$

であることに注意しておく．$F^{-s}(\mathcal{Y}) = \coprod_i \mathcal{Z}_i$ の $\mathcal{O}_{L,\mathfrak{q}}$ 点はただ一つの $\mathcal{Z}_i$ を経由するが，異なる $\mathcal{Z}_i$ を経由すると $\mathcal{X}(\mathcal{O}_{L,\mathfrak{q}}/\mathfrak{q})$ の異なる点を与える．しかし

$$\bigcup_{j=1}^{D} \mathrm{Hom}_{\mathrm{scheme}}(\operatorname{Spec} \mathbb{F}_{q^j}, \mathcal{X})$$

は有限集合でその元の個数 N は X と $\mathfrak{p}, D$ だけから決まる．ある $\mathcal{O}_{L,\mathfrak{q}}$ 点を持つような $\mathcal{Z}_i$ の個数は高々 N である．各 $\mathcal{Z}_i$ の generic fiber は $f^{-s}(Y)$ の既約成分であることから，s が大きくなるといずれ新たに現れる既約成分は L 点を持つことができないことがわかる．

(定理 3.2 のアイデア)

$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の自己射は高々 2 回合成をとると $f \times g$ の形にできるので，初めからこの形だとして良い．また Y は 1 次元だとして良い．基礎体は今代数体 K だが，十分大きな素数 p をとり K を $\mathbb{Q}_p$ に埋め込むことで問題を $\mathbb{Q}_p$ 上の good reduction を持つ射の場合に帰着できる．(この場合は Preimages Question が $\mathbb{Q}_p$ 上で成立することが実はわかる．) $\mathbb{P}^1$ の自己射の局所的性質についての定理 (p-adic uniformization) から局所的に

- f は isometric isomorphism
- $f(z) = \lambda z$，但し $\lambda \in \mathbb{Q}_p$ は p 進絶対値が 1 未満かつ $\neq 0$
- $f(z) = z^d$，$g(w) = w^e$，$d, e \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2}$

の形の場合にそれぞれ調べれば良いことがわかる．最初 2 つの場合は (計算は結構必要だが) 局所的には自明に Preimages Question が成立することがわかる．最後のケースではまず不変曲線 Y の存在から $d = e$ でなければならないことが証明できる．さらに Y は局所的に $(z^k - w^l = 0)$ の形の曲線 (の既約成分) であることが証明できる．この場合は

$$(f \times g)^s(a, b) \in Y \iff a^{kd^s} = b^{ld^s}.$$

したがって $ab = 0$ なら $(a, b) = (0, 0)$ であり，$ab \neq 0$ なら

$$(a^k b^{-l})^{d^s} = 1.$$

しかし $\mathbb{Q}_p$(の有限次元拡大) には 1 の冪根は有限個しか含まれていないので，a, b に依存しない $s_0 \geqslant 0$ が存在して $(a^k b^{-l})^{d^{s_0}} = 1$，つまり

$$(f \times g)^{s_0}(a, b) \in Y$$

が成立する．

参考文献

[1] J. P. Bell, Y. Matsuzawa, and M. Satriano. On dynamical cancellation. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (8):7099–7139, 2023.

[2] A. Cadoret and A. Tamagawa. Uniform boundedness of p-primary torsion of abelian schemes. *Inventiones mathematicae*, 188:83–125, 2012.

[3] Y. Matsuzawa, S. Meng, T. Shibata, and D.-Q. Zhang. Non-density of points of small arithmetic degrees. *J. Geom. Anal.*, 33(4):Paper No. 112, 41, 2023.

[4] Y. Matsuzawa and K. Sano. On preimages question. *arXiv preprint arXiv:2311.02906*, 2023.

[5] X. Zhong. Preimages question for surjective endomorphisms on $(\mathbb{P}^1)^n$. *arXiv preprint arXiv:2311.04349*, 2023.