Mutations of noncommutative crepant resolutions in geometric invariant theory

平野 雄貴 *

1　背景

特異点を持つ正規な Gorenstein アフィン多様体 $\operatorname{Spec} R$ に対し, $\operatorname{Spec} R$ のクレパント解消の非可換環版として, R の**非可換クレパント解消** (=**NCCR**[*1]) と呼ばれる非可換 R-代数のクラスが, Van den Bergh により導入された [VdB1]. NCCR はクレパント解消と同様, その存在や一意性は一般には成り立たず, $\operatorname{Spec} R$ のクレパント解消の存在と R の NCCR の存在は一般には同値ではない. しかし, ある種の良い特異点のみを持つ R に対しては, クレパント解消 $X \to \operatorname{Spec} R$ と R の NCCR Λ がいずれも存在し, それらが導来同値 $\mathrm{D^b}(X) \cong \mathrm{D^b}(\Lambda)$ であることが知られている. このような導来同値がある場合に, X の幾何学に由来する $\mathrm{D^b}(X)$ の対称性 (=自己同値) を, Λ の表現論に由来する対称性により記述することは, 自然な問題である. 本稿では, 擬対称表現に付随する特異点 R に対し, $\operatorname{Spec} R$ のクレパント解消の導来圏のある種の対称性が, NCCR のある種の操作によって記述できるという結果 [HH] を解説する.

1.1　非可換クレパント解消

$\operatorname{Spec} R$ を Gorenstein 正規な代数多様体とする. また, 有限生成反射加群のなす圏を $\operatorname{ref} R$ で表すことにする.

定義 1.1. R-代数 Λ が**非可換クレパント解消** (=NCCR) であるとは, 次の条件を満たすときをいう.

(1) ある $M \in \operatorname{ref} R$ が存在し, R-代数の同型 $\Lambda \cong \operatorname{End}_R(M)$ が成り立つ.
(2) 任意の $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ に対し, $\operatorname{gldim} \Lambda_{\mathfrak{p}} = \dim R_{\mathfrak{p}}$ が成り立つ.
(3) Λ は極大 Cohen-Macaulay R-加群である.

上の定義の条件 (1) と (2) を満たすものは R の**非可換解消**と呼ばれ, 条件 (3) は非可換解消の "クレパント性" を課すものである. 次の定理は, NCCR がクレパント解消の非可換類似であるこ

---

* 東京農工大学, hirano@go.tuat.ac.jp

*1 **N**on**C**ommutative **C**repant **R**esolution の頭文字

とを示すものである.

定理 1.2 ([IW1, Thorem 1.5]). X を Gorenstein 代数多様体とし, $f\colon X \to \operatorname{Spec} R$ を双有理射影射とする. また, X がある環 Λ と導来同値であると仮定する. このとき, 次の同値が成り立つ.

$$f \text{ はクレパント解消である} \iff \Lambda \text{ は } R \text{ の NCCR である}$$

1.2 NCCR の変異

ここでは, NCCR の変異という操作を紹介する. これは, 与えられた NCCR から新たな NCCR を構成する操作である. $\operatorname{Spec} R$ を Gorenstein 正規なアフィン多様体とし, $M \in \operatorname{ref} R$ を反射加群とする. また, M の自己準同型環を

$$\Lambda_M := \operatorname{End}_R(M)$$

で表す. $L, N \in \operatorname{ref} R$ に対し, R-加群の間の射 $\alpha\colon M' \to M$ が, M の $(\operatorname{add} L)_N$**-近似**であるとは, $M' \in \operatorname{add} L$ かつ, α が誘導する射 $\alpha \circ (-)\colon \operatorname{Hom}(N, M') \to \operatorname{Hom}(N, M)$ が全射であるときをいう. ここで, $\operatorname{add} L$ は L の加法的閉包 (=M の有限直和 $L^{\oplus n}$ の直和因子全体) を表す. また, $(\operatorname{add} N)_N$-近似を単に $(\operatorname{add} N)$**-近似**と呼ぶ. $M \in \operatorname{ref} R$ であれば, その $(\operatorname{add} N)$-近似が必ず存在することが, R が正規であるという仮定から従う.

定義 1.3. M が直和分解 $M = N \oplus N^c$ を持つとき, M の N での**変異** $\mu_N(M)$ を

$$\mu_N(M) := N \oplus \operatorname{Ker}(\alpha)$$

で定める. ここで, $\alpha\colon N' \to N^c$ は, N^c の $(\operatorname{add} N)$-近似である.

注意 1.4. 上の定義において, N^c の $(\operatorname{add} N)$-近似 α の取り方は一意的ではないため, $\mu_N(M)$ も一意的には定まらないが, その自己準同型環 $\Lambda_{\mu_N(M)}$ は互いに森田同値となる.

次の結果は, 変異に関する基本定理である.

定理 1.5 ([IW2, Theorem 1.23]). Λ_M を R の NCCR とし, N が M の直和因子であるとする. このとき, 次が成り立つ.

(1) 傾斜 Λ-加群 T と R-代数の間の同型 $\operatorname{End}_\Lambda(T) \cong \Lambda_{\mu_N(M)}$ であって, それらが誘導する関手

$$\Phi_N := \mathbf{R}\operatorname{Hom}(T, -)\colon \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} \Lambda_M) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} \Lambda_{\mu_N(N)})$$

が圏同値となるものが存在する.

(2) $\Lambda_{\mu_N(M)}$ は R の NCCR である.

上の定理の (1) における圏同値 Φ_N は, N での**変異関手**と呼ばれる. (2) の結果は, NCCR が導来同値で保たれるという結果と (1) から従う.

1.3 3 次元の NCCR とその変異

$(R,\mathfrak{m})$ を Gorenstein 端末特異点のみを持つ 3 次元完備局所環とし,

$$f\colon X \to \operatorname{Spec} R$$

を射影的なクレパント解消とする. また, f の例外曲線 $C := f^{-1}(\mathfrak{m})$ の既約成分全体を $C_1,\ldots,C_n$ とすると, 各 $1 \le i \le n$ に対し, $C_i^{\mathrm{red}} \cong \mathbb{P}^1$ が成り立つ. Van den Bergh は, 各既約曲線 C_i に付随する X 上のベクトル束 $\mathcal{V}_i^f \in \operatorname{coh} X$ を構成し, 構造層 $\mathcal{O}_X$ とそれらの直和

$$\mathcal{V}^f := \mathcal{O}_X \oplus (\oplus_{i=1}^n \mathcal{V}_i^f)$$

が X 上の傾斜束であることを証明した [VdB2]. $\mathcal{V}^f$ が傾斜束であることから, その自己準同型環 $\Lambda_{\mathcal{V}^f} := \operatorname{End}_X(\mathcal{V}^f)$ と X との間の導来同値 $\mathrm{D^b}(\operatorname{coh} X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{D^b}(\operatorname{mod} \Lambda_{\mathcal{V}^f})$ が誘導される. さらに, $M_i^f := f_*(\mathcal{V}_i^f) \in \operatorname{ref} R$ とし,

$$M^f := R \oplus (\oplus_{i=1}^n M_i^f) \cong f_*(\mathcal{V}^f) \in \operatorname{ref} R$$

を考えると, f が同型 $f\colon X\backslash C \xrightarrow{\sim} \operatorname{Spec} R\backslash\mathfrak{m}$ を誘導することから, 写像 $f_*\colon \Lambda_{\mathcal{V}^f} \to \Lambda_{M^f}$ は環の間の同型を与える. 以上より, クレパント解消 X と R-代数 Λ_{M^f} の間の導来同値

$$\mathrm{D^b}(\operatorname{coh} X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{D^b}(\operatorname{mod} \Lambda_{M^f}) \tag{1}$$

が成り立ち, 特に Λ_{M^f} は R の NCCR となる. $f_i^+\colon X_i^+ \to \operatorname{Spec} R$ を $C_i \subset X$ のフロップにより得られるクレパント解消とすると, 2 つのクレパント解消の間の導来同値

$$\mathsf{Flop}_i\colon \mathrm{D^b}(\operatorname{coh} X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{D^b}(\operatorname{coh} X_i^+)$$

が成り立つ [Bri1]. 次の定理は, NCCR の変異がフロップに対応することを示すものである.

定理 1.6 ([W]). 簡単のため, $M := M^f$, $M_i := M_i^f$, $M^+ := M^{f_i^+}$ とおく.

(1) R-加群の間の同型

$$M^+ \cong \mu_{M_i}(M)$$

が (加法的閉包の差を除いて) 成り立つ.

(2) 以下の図式は可換である:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{D^b}(\operatorname{coh} X) \arrow[r, "\mathsf{Flop}_i"] \arrow[d] & \mathrm{D^b}(\operatorname{coh} X_i^+) \arrow[d] \\
\mathrm{D^b}(\operatorname{mod} \Lambda_M) \arrow[r, "\Phi_{M_i}"] & \mathrm{D^b}(\operatorname{mod} \Lambda_{M^+}).
\end{tikzcd}$$

このように, 3 次元 Gorenstein 端末特異点 R に対しては, クレパント解消 $f\colon X \to \operatorname{Spec} R$ の既約な例外曲線 C_i でのフロップが, M^f の直既約な直和因子 M_i^f での変異に対応する. 一方で, M^f の直和因子 R での変異 $\mu_R(M)$ を考えると, クレパント解消に対応しないような R の

NCCR $\Lambda_{\mu_R(M)}$ を構成することができる．したがって, フロップのような幾何学に由来する対称性ではうまく捉えられないないような対称性を, NCCR の変異により記述することが可能となる．このように, NCCR やその変異を考えることは連接層の導来圏の研究において新たな視点を与え, 応用上重要なものであるといえる．実際, NCCR の変異を考えることで, 3 次元フロップに付随する三角圏上の Bridgeland 安定性条件の空間の記述がなされた [HW]．本稿で解説する [HH] では, より高次元の特異点の例として擬対称表現に付随する特異点を扱い, その NCCR の変異について議論した.

2　擬対称表現

本節では, 擬対称表現と呼ばれる表現に付随する特異点のクレパント解消の導来圏に関する Halpern-Leistner–Sam の結果 [HLS] や NCCR の構成について紹介する.

G を連結な簡約群とし, $T \subseteq G$ を n 次元の極大トーラスとする．また, $\mathsf{M} := \mathrm{Hom}(T, \mathbb{G}_m)$ を, T の指標全体とし, $\mathsf{N} := \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, T)$ を T の 1-パラメーター部分群とする．さらに, $\mathsf{M}^+ \subseteq \mathsf{M}$ を支配的ウェイト全体とし, $\mathsf{M}^+_{\mathbb{R}} \subseteq \mathsf{M}_{\mathbb{R}}$ を支配的錐とする.

定義 2.1. X を G の d 次元表現とし, $\beta_1, \dots, \beta_d \in \mathsf{M}$ をその T-ウェイト全体とする.

(1) X が**擬対称表現**であるとは, $\mathsf{M}_{\mathbb{R}} := \mathsf{M} \otimes \mathbb{R}$ 内の任意の 1 次元部分空間 L に対し, $\sum_{\beta_i \in L} \beta_i = 0$ が成り立つときをいう.

(2) X が**ジェネリック**であるとは, $\mathrm{codim}(X^{\mathrm{ts}}, X) \geq 2$ が成り立つときをいう．ただし, $X^{\mathrm{ts}} := \{x \in X \mid G_x = 1$ かつ軌道 $G \cdot x$ が X の閉部分集合である $\}$.

以下では, ウェイト $\beta_1, \dots, \beta_d \in \mathsf{M}$ を持つジェネリックな G の擬対称表現 X であって, 付随する $\mathsf{M}_{\mathbb{R}}$ 内のポリトープ

$$\boldsymbol{\Sigma} := \left\{ \sum_{i=1}^{d} a_i \beta_i \;\middle|\; a_i \in [1, 0] \right\} \subset \mathsf{M}_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^n$$

が n 次元であるものを考える．ジェネリックな擬対称表現 X の座標環 $\mathbb{C}[X]$ には, G が $(g, f(x)) \mapsto f(g^{-1} \cdot x)$ により左から作用するが, その不変式環

$$R := \mathbb{C}[X]^G$$

は, 正規 Gorenstein 環になることが知られている．以下では, $\mathrm{Spec}\, R$ のクレパント解消や R の NCCR が存在し, それらが導来同値となることを説明する.

まず, 上で定めた $\boldsymbol{\Sigma}$ とは別のポリトープとして,

$$\boldsymbol{\nabla} := \bigcup_{w \in W} w\left((-\rho + (1/2)\boldsymbol{\Sigma}) \cap \mathsf{M}^+_{\mathbb{R}}\right) \subset \mathsf{M}_{\mathbb{R}}$$

を考える．ただし, W は G の Weyl 群で, $\rho = \sum(\text{正ルート})/2$ である．このポリトープは, $\boldsymbol{\Sigma}$ をおよそ半分に縮小したものであり, 実際 G が n 次元トーラスの場合は, $\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{\Sigma}/2$ が成り立つ.

また, $\mathsf{M}_{\mathbb{R}}$ 内の超平面配置を $\mathcal{H} := \{m + H \mid m \in \mathsf{M}$ かつ $\dim(H \cap \boldsymbol{\nabla}) = n-1\}$ で定め, W-不変部分空間 $\mathsf{M}_{\mathbb{R}}^W$ との共通部分

$$\mathcal{H}^W := \{H \cap \mathsf{M}_{\mathbb{R}}^W \mid H \in \mathcal{H}\}$$

を考えると, これは $\mathsf{M}_{\mathbb{R}}^W$ 内の周期的かつ局所有限な超平面配置を定める. さらに, 任意の $\delta \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}^W$ に対し, M^+ の有限部分集合を

$$\mathcal{C}_\delta := \{\chi \in \mathsf{M}^+ \mid \chi \in \delta + \boldsymbol{\nabla}\} \subset \mathsf{M}^+$$

で定める. 次に定義するマジックウィンドウと呼ばれる三角圏は, X に付随する特異点のクレパント解消や NCCR の導来圏の研究において重要な役割を果たす.

定義 2.2 ([HLS]). $\delta \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}^W \setminus \mathcal{H}^W := \mathsf{M}_{\mathbb{R}}^W \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}^W} H$ に対し, $\mathrm{D^b}(\mathrm{coh}[X/G])$ の部分三角圏を

$$\mathcal{M}(\delta + \boldsymbol{\nabla}) := \langle V(\chi) \otimes \mathcal{O}_X \mid \chi \in \mathcal{C}_\delta \rangle \subset \mathrm{D^b}(\mathrm{coh}[X/G])$$

により定める. ただし, $V(\chi)$ は χ を最高ウェイトに持つ G の既約表現である. $\mathcal{M}(\delta + \boldsymbol{\nabla})$ は**マジックウィンドウ**と呼ばれる.

ジェネリックな元 $\ell \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}^W \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, G)$ に関する (スタック的)GIT 商

$$\mathfrak{X}_\ell := [X^{\mathrm{ss}}(\ell)/G]$$

を考えると, これは Deligne–Mumford スタックとなり, かつ自然な射

$$\varphi \colon \mathfrak{X}_\ell \to \operatorname{Spec} R$$

は (スタック的) クレパント解消を与える. ここで, $\ell \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}^W$ が**ジェネリック**であるとは, ℓ が超平面配置 $\mathcal{H}^W$ に属するどの超平面とも平行でない場合をいう. 次の定理は, GIT 商として与えられるクレパント解消 $\mathfrak{X}_\ell$ の導来圏が, マジックウィンドウと圏同値であることを示すものである.

定理 2.3 ([HLS, Theorem 3.2]). *ジェネリックな元 $\ell \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}^W$ と $\delta \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}^W \setminus \mathcal{H}^W$ に対し, 開埋め込み $i \colon \mathfrak{X}_\ell \hookrightarrow [X/G]$ による引き戻し $i^* \colon \mathrm{D^b}(\mathrm{coh}[X/G]) \to \mathrm{D^b}(\mathrm{coh}\,\mathfrak{X}_\ell)$ のマジックウィンドウへの制限*

$$i^* \colon \mathcal{M}(\delta + \boldsymbol{\nabla}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{D^b}(\mathrm{coh}\,\mathfrak{X}_\ell)$$

は圏同値を与える.

これにより, $\operatorname{Spec} R$ のクレパント解消 $\mathfrak{X}_\ell$ は互いに導来同値であることが従う. 次に, R の NCCR について紹介する. マジックウィンドウ $\mathcal{M}(\delta + \boldsymbol{\nabla})$ の対象 $T_\delta := \oplus_{\chi \in \mathcal{C}_\delta} V(\chi) \otimes \mathcal{O}_X$ を考えると, これは $\mathcal{M}(\delta + \boldsymbol{\nabla})$ の傾斜対象であることがすぐに分かる. 特に, T_δ は三角圏の間の同値

$$\mathbf{R}\mathrm{Hom}(T_\delta, -) \colon \mathcal{M}(\delta + \boldsymbol{\nabla}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{D^b}(\mathrm{mod}\,\mathrm{End}(T_\delta))$$

を誘導する. この自己準同型環 $\mathrm{End}(T_\delta)$ が R の NCCR を与えることを以下で説明する. まず, 商スタック $[X/G]$ 上の連接層 $\mathcal{F} \in \mathrm{coh}[X/G]$ を G-同変な X 上の連接層とみると, その大域切

断 $\Gamma(X,\mathcal{F})$ は G-作用を持つ $\mathbb{C}[X]$-加群となり, この G-不変部分 $\Gamma(X,\mathcal{F})^G$ は, R-加群の構造を持つ. これにより, 関手 $\Gamma(X,-)^G\colon \operatorname{coh}[X/G] \to \operatorname{mod} R$ が定まるが, これを反射層に制限することで, 圏同値

$$\Gamma(X,-)^G\colon \operatorname{ref}[X/G] \xrightarrow{\sim} \operatorname{ref} R$$

を得る. 支配的ウェイト $\chi \in \mathsf{M}^+$ に対し, $M(\chi) := \Gamma(X, V(\chi)\otimes \mathcal{O}_X)^G \in \operatorname{ref} R$ とおき, 各 $\delta \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}^W \setminus \mathcal{H}^W$ に対し,

$$M_\delta := \Gamma(X, T_\delta)^G \cong \bigoplus_{\chi \in \mathcal{C}_\delta} M(\chi) \in \operatorname{ref} R$$

とおくと, R-代数の間の同型 $\operatorname{End}(T_\delta) \xrightarrow{\sim} \Lambda_\delta := \operatorname{End}_R(M_\delta)$ が成り立つ. したがって圏同値

$$\mathcal{M}(\delta + \boldsymbol{\nabla}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} \Lambda_\delta)$$

が成り立ち, これと定理 2.3 とを合わせることで R-代数 Λ_δ はクレパント解消 $\mathfrak{X}_\ell$ と導来同値となる. これにより, Λ_δ は R の NCCR であると期待される*2が, これは次の定理により保証される.

定理 2.4 ([SVdB, Theorem 1.19][VdB3, Theorem 4.6])**.** *R-代数 Λ_δ は, R の NCCR を与える.*

3 主結果

本節では, [HH] の主結果について解説する. 前節でみたように, 各 $\delta \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}^W \setminus \mathcal{H}^W$ に対し, R-加群 M_δ と NCCR Λ_δ が定まる. これらがある種の操作で移り合うというのが, [HH] の主結果である. これをみるには, 余次元 1 の壁越え現象を調べれば良いので, 以下では隣り合う $\delta, \delta' \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}^W \setminus \mathcal{H}^W$ を考える. ここで, 2 点 $\delta, \delta' \in \mathsf{M}_{\mathbb{R}}^W \setminus \mathcal{H}^W$ が**隣り合う**とは, それらを含む $\mathsf{M}_{\mathbb{R}}^W \setminus \mathcal{H}^W$ の連結成分が相異なり, かつ余次元 1 の壁を共有している場合をいう. $\ell := \delta' - \delta \in \mathcal{H}^W$ とおくと, これはジェネリックな元となり, 定理 2.3 により, 壁越え $\delta \to \delta'$ に付随してマジックウィンドウの間の圏同値

$$F_{(\delta,\delta')}\colon \mathcal{M}(\delta + \boldsymbol{\nabla}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{coh} \mathfrak{X}_\ell) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(\delta' + \boldsymbol{\nabla})$$

が定まる. 次の定理は, $F_{(\delta,\delta')}$ が NCCR 上の傾斜加群が定める NCCR の間の導来同値に対応することを示すものである.

定理 3.1 ([HH, Theorem 4.3])**.** (1) *$T_{(\delta,\delta')} := \operatorname{Hom}_R(M_\delta, M_{\delta'})$ は Λ_δ 上の傾斜加群である. 特に, $T_{(\delta,\delta')}$ は導来同値*

$$\Phi_{(\delta,\delta')} := \mathbf{R}\operatorname{Hom}(T_{(\delta,\delta')}, -)\colon \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} \Lambda_\delta) \xrightarrow{\sim} \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} \Lambda_{\delta'})$$

を定める.

*2 $\mathfrak{X}_\ell$ は代数多様体とは限らないスタックであるため, 定理 1.2 はここでは適用できない.

(2) 次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}(\delta+\boldsymbol{\nabla}) \arrow[r, "F_{(\delta,\delta')}"] \arrow[d] & \mathcal{M}(\delta'+\boldsymbol{\nabla}) \arrow[d] \\ \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod}\Lambda_\delta) \arrow[r, "\Phi_{(\delta,\delta')}"] & \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod}\Lambda_{\delta'}). \end{tikzcd}$$

この定理の (2) の主張は, 定理 1.6 (2) の類似と考えることができる．次に, 定理 1.6 (1) の類似として, M_δ と $M_{\delta'}$ がある種の加群の操作で移り合うことを説明する．そのために, まずはいくつか記号を導入する．

定義 3.2. $L, N \in \operatorname{ref} R$ とする．$\operatorname{ref} R$ の部分集合を

$$\mathcal{E}_{(L,N)}(M) := \{\operatorname{Ker}(\alpha) \mid \alpha\colon M' \to M \text{ は } M \text{ の } \operatorname{add}(L)_N\text{-近似 }\}$$

で定める．また, 部分集合 $\mathcal{S} \subseteq \operatorname{ref} R$ に対し,

$$\mathcal{E}_{(L,N)}(\mathcal{S}) := \bigcup_{M\in\mathcal{S}} \mathcal{E}_{(L,N)}(M)$$

とおき, 自然数 $m > 0$ に対し $\mathcal{E}^m_{(L,N)}(M) := \underbrace{\mathcal{E}_{(L,N)}\big(\cdots\mathcal{E}_{(L,N)}(\mathcal{E}_{(L,N)}}_{m}(M))\cdots\big)$ とおく．

記号の乱用にはなるが, $\mathcal{E}^m_{(L,N)}(M)$ に属する加群を $\varepsilon^m_{(L,N)}(M)$ で表すことにする．この記法により, $M = N \oplus N^c$ の N での変異 $\mu_N(M)$ は,

$$\mu_N(M) = N \oplus \varepsilon^1_{(N,N)}(N^c)$$

と表すことができる．N での変異を m 回繰り返して得られる加群を $\mu^m_N(M) := N \oplus \varepsilon^m_{(N,N)}(N^c)$ で表すことにする．

本題の設定に戻り, 隣り合う 2 点 $\delta, \delta' \in \mathsf{M}^W_{\mathbb{R}} \setminus \mathcal{H}^W$ を考える．$H \in \mathcal{H}^W$ を δ, δ' を隔てる超平面とし, δ と δ' を端点とする線分と H との交点を $\delta_0 \in H$ とする．このとき, 包含関係

$$\mathcal{C}_\delta, \mathcal{C}_{\delta'} \subset \mathcal{C}_{\delta_0}$$

が成り立つ．$\mathcal{C}_{\delta\cap\delta'} := \mathcal{C}_\delta \cap \mathcal{C}_{\delta'}$ とすれば, 各 $\chi \in \mathcal{C}_\delta \backslash \mathcal{C}_{\delta\cap\delta'}$ は, ポリトープ $\delta_0 + \boldsymbol{\nabla}$ の境界上にあることが分かる．$\delta_0 + \boldsymbol{\nabla}$ のファセットであって, $\mathcal{C}_\delta \backslash \mathcal{C}_{\delta\cap\delta'}$ に属する支配ウェイトを含むもの全体を $\mathcal{F}_{(\delta,\delta')}$ [*3]で表すことにする．また, 各ファセット $F \in \mathcal{F}_{(\delta,\delta')}$ に対し, $M^F_\delta := \oplus_{\chi\in F^\circ} M(\chi)$ とおくと, 直和分解

$$M_\delta = M_{\delta\cap\delta'} \oplus \bigoplus_{F\in\mathcal{F}_{(\delta,\delta')}} M^F_\delta$$

が成り立つ．ただし, $M_{\delta\cap\delta'} := \oplus_{\chi\in\mathcal{C}_{\delta\cap\delta'}} M(\chi)$ とおき, F° で F の相対的内部を表すものとする．各 $F \in \mathcal{F}_{(\delta,\delta')}$ に対し, $N^F_\delta := M_\delta / M^F_\delta$ とおく．次の定理により, M_δ と $M_{\delta'}$ が変異の一般化となる操作の繰り返しにより得られることが分かる．

[*3] [HH] における $\mathcal{F}_{(\delta,\delta')}$ とは少し異なるものである．

定理 3.3 ([HH, Theorem 4.9])**.** 各 $F \in \mathcal{F}_{(\delta,\delta')}$ に対し，$M_{\delta_0} := \oplus_{\chi \in \mathfrak{C}_{\delta_0}} M(\chi)$ の直和因子 $L_\delta^F \in \operatorname{ref} R$ が存在し，

$$M_\delta = M_{\delta\cap\delta'} \oplus \bigoplus_{F \in \mathcal{F}_{(\delta,\delta')}} \varepsilon_{(L_\delta^F, N_\delta^F)}^{d_F^+ + \ell(w_0) - 1}(M_\delta^F)$$

が成り立つ．ただし，d_F^+ は F に付随して定まる自然数で，$\ell(w_0)$ は Weyl 群 W の最長元 w_0 の長さを表す．

この定理は, F に付随する複体をある種の Koszul 分解から構成し, それに Borel-Weil-Bott の定理を適用することで得られる．この定理は, G がトーラスの場合に, より簡単なものになる．実際, G がトーラスの場合, ファセットの集合 $\mathcal{F}_{(\delta,\delta')}$ はただ一つのフェイス F を持つ．さらに, 上の定理における直和因子 L_δ^F は $N_\delta^F = M_{\delta\cap\delta'}$ と同じに取れる．したがって, 次の系が従う．

系 3.4 ([HH, Theorem 4.14])**.** G がトーラスであると仮定する．このとき，

$$M_\delta = \mu_{M_{\delta\cap\delta'}}^{d_F^+ - 1}(M_{\delta'})$$

が成り立つ．

最後に, 定理 3.1 (1) で定めた圏同値 $\Phi_{(\delta,\delta')}\colon \mathrm{D^b}(\operatorname{mod}\Lambda_\delta) \xrightarrow{\sim} \mathrm{D^b}(\operatorname{mod}\Lambda_{\delta'})$ が変異関手の合成で記述されるという結果を紹介する．

系 3.5 ([HH, Corollary 4.16])**.** G がトーラスであると仮定する．関手の間の同型

$$\Phi_{(\delta,\delta')} \cong \Phi_{M_{\delta\cap\delta'}}^{d_F^+ - 1}$$

が成り立つ．

4 謝辞

城崎代数幾何学シンポジウム 2023 で講演の機会を下さった世話人の阿部健先生, 岩成勇先生, 谷本祥先生に心より感謝申し上げます．本研究は, JSPS の若手研究 (19K14502, 23K12956) の助成を受けたものです．

参考文献

[Bri1] T. Bridgeland, *Flops and derived categories*, Invent. Math. **147**, (2002), no. 3, 613–632.

[IW1] O. Iyama and M. Wemyss, *Singular Derived Categories of Q-factorial terminalizations and Maximal Modification Algebras*. Adv. Math. **261** (2014), 85–121.

[IW2] O. Iyama and M. Wemyss, *Maximal modifications and Auslander-Reiten duality for non-isolated singularities*. Invent. Math. **197** (2014), no. 3, 521–586.

[HLS] D. Halpern-Leistner and S. V. Sam, *Combinatorial constructions of derived equivalences.* J. Amer. Math. Soc. **33**, no. 3, 871–912 (2020).

[HH] W. Hara and Y. Hirano, *Mutations of noncommutative crepant resolutions in geometric invariant theory.* arXiv:2310.11057.

[HW] Y. Hirano and M. Wemyss, *Stability conditions for 3-fold flops*, Duke Math. J. **172** (2023), no. 16, 3105–3173.

[SVdB] Š. Špenko and M. Van den Bergh, *Non-commutative resolutions of quotient singularities for reductive groups.* Invent. Math. **210**, no. 1, 3–67 (2017).

[VdB1] M. Van den Bergh, *Non-commutative crepant resolutions.* The Legacy of Niels Henrik Abel, pp. 749–770. Springer, Berlin (2004)

[VdB2] M. Van den Bergh, *Three-dimensional flops and noncommutative rings*, Duke Math. J. **122** (2004), no. 3, 423–455.

[VdB3] M. Van den Bergh, *Non-commutative crepant resolutions, an overview.* arXiv:2207.09703.

[W] M. Wemyss, *Flops and Clusters in the Homological Minimal Model Program*, Invent. Math. **211** (2018), no. 2, 435–521.