Abelian or elliptically fibered Calabi-Yau threefolds with relative automorphisms of positive entropy

小木曽啓示（東大数理）

1　用語、記号など

本稿を通じて、基礎体は複素数体、断らない限り、多様体は滑らかな射影多様体、点は考えている多様体の閉点、写像は有理写像とする。不確定点を持たない有理写像のことを射という。正規射影代数多様体 X から正規射影代数多様体 B への全射正則射 $f : X \to B$ であってファイバーが（すべて）連結であるものをファイバー空間、あるいは収縮射という。2 つのファイバー空間 $f : X \to B$ と $f' : X' \to B'$ に対し、$f' \circ \tau_X = \tau_B \circ f$ をみたす同型射 $\tau_X : X \to X'$ と同型射 $\tau_B : B \to B'$ があるとき、2 つのファイバー空間は同型であるという。$\mathrm{Aut}\,(V)$（V の自己同型射全体のなす群) や $\mathrm{Bir}\,(V)$（V の双有理自己写像全体のなす群) といった、本稿で用いる用語記号は概ね慣用通りである。ファイバー空間 $f : X \to B$ に対し、$\mathrm{Aut}\,(X)$ の部分群 $\mathrm{Aut}\,(f)$ と $\mathrm{Aut}\,(X/B)$ をそれぞれ次で定める:

$$\mathrm{Aut}\,(f) := \{g \in \mathrm{Aut}\,(X) \mid f \circ g = g_B \circ f \text{ をみたす } g_B \in \mathrm{Aut}\,(B) \text{ がある。}\}$$

$$\mathrm{Aut}\,(X/B) := \{g \in \mathrm{Aut}\,(X) \mid f \circ g = f\}.$$

また、支配的有理写像 $f : X \dashrightarrow B$ に対し、$\mathrm{Bir}\,(f)$, $\mathrm{Bir}\,(X/B)$ を、上記定義中の $\mathrm{Aut}\,(X)$, $\mathrm{Aut}\,(B)$ を $\mathrm{Bir}\,(X)$, $\mathrm{Bir}\,(B)$ にしたものでもって定める。

2　はじめに

今世紀に入ってから、双有理代数幾何学と代数力学系の交差する分野にも興味を持ち研究している。その主対象は、射影代数多様体 V と V の支配的有理自己写像、双有理自己写像、支配的自己射、自己同型射、及びその反復合成 g^n（支配的有理自己写像 g の n 回の合成写像）である。この分野の研究を始めた頃、高次元複素力学系の世界的第一人者である Sibony 先生から、次の問題を考えるようにいわれた：

問題 2.1 位相エントロピー $h_{\mathrm{top}}(g)$ が正であるような自己同型射 g をもつ滑らかな射影代数多様体 V の興味深い例をたくさん見出せ。

エントロピー $h_{\mathrm{top}}(g)$ は、十分一般の 2 点の軌道 $\{g^n(x)\}_{n\ge 0}$,$\{g^n(y)\}_{n\ge 0}$ の発散の度合いを表す量として定まる非負実数である。設定の下では、$h_{\mathrm{top}}(g)$ が正であることと、g の第 1 力学次数 $d_1(g)$ が 1 より真に大きいことは同値であり、更に $d_1(g)$ は g の $H^2(V,\mathbb{Z})$ への作用のスペクトル半径 $r(g^*|H^2(V,\mathbb{Z}))$ とも、g の $N^1(V)$ への作用のスペクトル半径 $r(g^*|N^1(V))$ とも一致する。ここで、$N^1(V)$ は V の (Cartier) 因子の数値的同値類全体のなす $\mathbb{Z}$-加群である。$d_1(g)$ は、支配的有理自己写像 $g : V \dashrightarrow V$ に対しても、V の豊富因子 H と $g^n : V \dashrightarrow V$ の不確定除去

$$V \xleftarrow{p_n} W_n \xrightarrow{q_n} V\ ,\ g^n = q_n \circ p_n^{-1}$$

を用いて、$(g^n)^*(H) = (p_n)_* q_n^* H$ と定めたとき

$$d_1(g) := \lim_{n\to\infty} ((g^n)^*(H).H^{d-1})^{\frac{1}{n}} \ge 1$$

により、V と g だけに依存した数として矛盾なく定まる。力学次数の利点は、自然な意味で双有理不変であることである。すなわち、$\mu : V \dashrightarrow V'$ が双有理写像であるとき、$d_1(g) = d_1(\mu \circ g \circ \mu^{-1})$ である。そのため、力学次数値を保ったまま、モデルを自由に取り換えることができる点にある。[1]

定理 2.2 $d_1(g) > 1$ をみたす双有理自己写像 g をもつ曲面 V は $\mathbb{P}^2$, アーベル曲面, K3 曲面,Enriques 曲面のいずれかに双有理である。また、$d_1(f) > 1$ をみたす自己同型射 f をもつ有理曲面, アーベル曲面, K3 曲面, Enriques 曲面の例が、それぞれに対し (無数に）存在する。

前半は本質的に Cantat による ([Ca99])。$d_1(g)$ が双有理不変であることから、(i) 現代的意味での極小モデル、(ii)$\mathbb{P}^2$ (iii) 非有理相対極小線織面に帰着できる。(iii) のときは、双有理自己写像は Albanese 射を保つことと積公式により $d_1(g) = 1$ がわかる。(i) の場合は g は自己同型射になり、再び、多重標準射や Albanese 射が自己同型射で保たれることと積公式、及び標準因子環への双有理自己同型群の作用の有限性から、極小モデルがアーベル曲面, K3 曲面, Enriques 曲面以外の場合には $d_1(g) = 1$ であることがわかる。後半に関しては各クラスでの多くの深い結果がある。ここでは比較的簡単にできる具体例をいくつか挙げておく。[2]

[1]エントロピーと力学次数に関するより詳細と以下で用いる相対版（積公式）についての最も基本的文献は [DS05], [DN11] です。概説 [Og14a], 文献 [Tr15] とその引用文献も参考になると思います。特に、[Tr20] の前段階として書かれた [Tr15] は、証明も含め純代数幾何学的に書かれていて代数幾何の人には読みやすいと思います。

[2]Enriques 曲面の場合の明示的具体例は [Do18] にあります。各クラスでのより深い結果は、[Mc16], [Ue16], [OY20] 及びその中にある文献等を興味に応じて参照してください。

例 **2.3** E を楕円曲線、$A = E \times E$ を直積型アーベル曲面とし、$S := \mathrm{Km}\,(A)$ を付随するクンマー K3 曲面とする。行列

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられる A の自己射 $g_A : (x, y) \mapsto (x + y, x)$ は P の行列式が 1 であることから A の自己同型射となる。また、行列 P のスペクトル半径は $(1+\sqrt{5})/2$ である。このことと、P が g_A の $H^0(A, \Omega_A^1)$ への作用の表現行列であることから

$$d_1(g_A) = r(P)\overline{r(P)} = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 > 1$$

である。従って、g_A はアーベル曲面 A の正エントロピーをもつ自己同型である。また、g_A は $\pm 1_A$ と可換であることと特異点解消の極小性から、S の自己同型射 g_S に降下する。直接計算あるいは積公式により

$$d_1(g_S) = d_1(g_A) = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 > 1$$

がわかる。従って、g_S は K3 曲面 S の正エントロピーをもつ自己同型である。

次に、E の周期が 1 の原始 3 乗根 ω の場合を考え、T, W をそれぞれ $A/\langle\omega\cdot\mathrm{id}_A\rangle$, $A/\langle-\omega\cdot\mathrm{id}_A\rangle$ の極小特異点解消（特異点での極大イデアルによる一回の爆発でできる）とする。このとき、T,W はともに小平次元 $-\infty$ で不正則数 0 の滑らかな射影曲面であり、有理曲面となる。また、先と全く同じ理由により、g_A は T, W の自己同型射 g_T, g_W に降下し、

$$d_1(g_T) = d_1(g_W) = d_1(f_A) = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 > 1$$

がわかる。従って、g_T, g_W は有理曲面 T, W の正エントロピーをもつ自己同型である。

例 **2.4** S をピカール数が 2 のアーベル曲面あるいは射影 K3 曲面とする。このような S の中で、$N^1(S)$ の交点形式が、符号 $(1,1)$ で、しかも 0 を表現しないものを考える。K3 の場合には、更に -2 も表現しないことを要請する。周期写像の全射性により与えられた交点形式毎にこのようなアーベル曲面と K3 曲面がそれぞれ $(4-2)$ 次元、$(20-2)$ 次元分存在する。S は必ずエントロピー正の自己同型をもつ。何故なら、$\rho(S) = 2$ より、S のネフ錐の境界は 2 本の半直線である。従って、$\mathrm{Aut}\,(S)$ の指数 2 の部分群 G があって、G の任意の元は、これら 2 本の半直線をそれぞれ保つ。故に、G の各元 g に、その 2 つの固有値（それぞれの方向に何倍するか）を対応させることで、群準同型写像

$$G \to \mathbb{R}^2_{>0} \ ; \ g \mapsto (\alpha(g), \beta(g)) \ (\alpha(g)\beta(g) = \det(g) = 1)$$

ができる。もし、エントロピー正の元がなければ、像は単位群であり、核は、もとより $N^1(S)$ に自明に作用するので、G の $N^1(S)$ への作用も自明になる。これは、交点形式の仮定により、S のネフ錐の境界が非有理的であることに反する。アーベル曲面あるいは射影 K3 曲面は錐予想をみたす ([Ka97]) ため、G の $N^1(S)$ への作用が自明ならば、S のネフ錐はそれ自身有理多面錐でなければならないからである。[3]

言うまでもなく、「興味深いかどうか」は個人の趣向に大きく依存する。本稿では、次の問題 (2.5) を考えたい。本稿における d 次元カラビ・ヤウ多様体の正確な定義は次である：

定義 $\Omega_X^d \simeq \mathcal{O}_X$, $H^0(X, \Omega_X^k) = 0$（$1 \le k \le d-1$) をみたす滑らかな d 次元射影多様体 X であって（ユークリッド位相に関し）単連結な多様体のことを、d 次元カラビ・ヤウ多様体という。

問題 2.5 3 次元カラビ・ヤウ多様体とその自己同型射を幾何学的に自然かつ意味ある場合に限定したとき、エントロピー正の自己同型射の存在は、3 次元カラビ・ヤウ多様体に対するどの程度強い制約となるか？

次の例にみられるように 3 次元以上のカラビ・ヤウ多様体の無限位数の自己同型の構成は 2 次元の場合に比べうんと難しくなること、c_2-収縮を有する 3 次元カラビ・ヤウ多様体の Kawaguchi-Silverman 予想に対する Lesieutre と Satriano の結果 ([LS21]) をより透明な方法でわかりたかったことなどが、この問題と関連する問題を考える動機となった ([Og23a], [Og23b])。

例 2.6 ([CO15]) V_n を $(\mathbb{P}^1)^{n+1}$ 内の多重次数 $(2, 2, \cdots, 2)$ の滑らかな超曲面とする：

1. $n = 2$ ならば V_2 は K3 曲面であり、更に、V_2 が非常に一般ならば、$\mathrm{Aut}\,(V_2)$ は $\mathbb{Z}/2$ の 3 つの自由積と同型である。

2. $n \ge 3$ ならば V_3 はカラビ・ヤウ多様体であり、更に、V_n が一般ならば、$\mathrm{Aut}\,(V_n)$ は $\{\mathrm{id}_{V_n}\}$ で $\mathrm{Bir}\,(V_n)$ は $\mathbb{Z}/2$ の $(n+1)$ 個の自由積と同型である。

いずれの場合も i 番目の $\mathbb{Z}/2$ は $(\mathbb{P}^1)^{n+1}$ の i 番目の $\mathbb{P}^1$ を除いた $(\mathbb{P}^1)^n$ 上の自然な 2 重被覆 $V_n \to (\mathbb{P}^1)^n$ の Galois 群である。$n \ge 3$ になると、Galois 群の作用が（自己同型射ではなく）flop になってしまうところが $n = 2$ の場合との大きな違いである。

次は、positive な方向の例である：

[3] 関連する話題と例は、[To10], [LOP18], [Og14b] 等も参照してください。

例 2.7 E_3 を周期が 1 の原始 3 乗根 ω の楕円曲線とする。また、本稿を通して、$A_3 := E_3^3$, $\overline{X}_3 := E_3^3/\langle \omega \cdot \mathrm{id}_{E^3}\rangle$ とし、$q : A_3 \to \overline{X}_3$ を商写像とする。更に、

$$\mu_3 : X_3 \to \overline{X}_3$$

を $\overline{X}_3$ のすべての特異点の極大イデアルによる爆発とする。このとき、X_3 は rigid な 3 次元カラビ・ヤウ多様体である ([Be83], [OS01])。また、構成から

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が定める A_3 の自己同型 g_{A_3} は X_3 の自己同型 $g_{X_3} \in \mathrm{Aut}\,(X_3)$ に降下し

$$d_1(g_{X_3}) = d_1(g_A) = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 > 1$$

をみたす。やはり構成から、

$$g_{X_3} \in \mathrm{Aut}\,(\overline{\mathrm{pr}}_3 \circ \mu_3 : X_3 \to \overline{X}_3 \to E_3/\langle \omega \cdot \mathrm{id}_{E_3}\rangle = \mathbb{P}^1)$$

$$g_{X_3} \in \mathrm{Aut}\,(\overline{\mathrm{pr}}_{12} \circ \mu_3 : X_3 \to \overline{X}_3 \to E_3^2/\langle \omega \cdot \mathrm{id}_{E_3^2}\rangle)$$

である。ここで、$\overline{\mathrm{pr}}_3, \overline{\mathrm{pr}}_{12}$ はそれぞれ、第 3 成分への射影 $\mathrm{pr}_3 : E_3^3 \to E_3$, 第 1 2 成分への射影 $\mathrm{pr}_{12} : E_3^3 \to E_3^2$ が誘導する $\overline{X}_3$ からの射である。

次が本講演での主結果である：

定理 2.8 ([Og23a]) $f : X \to B$ を 3 次元カラビ・ヤウ多様体 X 上のファイバー空間とし、$\mathrm{Aut}\,(f)$ はエントロピー正の元 g を持つとする。このとき、

1. f の一般ファイバーはアーベル曲面であるとする。このとき、$f : X \to B$ は、例 (2.6) で定めたファイバー空間

   $$\overline{\mathrm{pr}}_3 \circ \mu_3 : X_3 \to \overline{X}_3 \to \mathbb{P}^1$$

   とファイバー空間として同型である。特に、同型を除きただ一つに定まる。[4]

2. f の一般ファイバーは楕円曲線であるとする。このとき、高々有理 2 重点のみをもつ K3 曲面あるいはアーベル曲面 $\overline{S}$、$\overline{S}$ の有限自己同型群 G で $\overline{S}/G$ は $K_{\overline{S}/G}$ が数値的自明である有理曲面、G の忠実な作用をもった楕円曲線 E で G は大域的 3 形式 $\omega_{S\times E}$ に自明に作用するもの、及び双有理射 $B \to \overline{S}/G$ があって、$X \to B \to \overline{S}/G$ は

   $$G-\mathrm{Hilb}\,(S\times E) \to (S\times E)/G \to (\overline{S}\times E)/G \to \overline{S}/G$$

[4] ここでの性質以外にも、X_3 のもつ特別な役割や興味深い性質が定理 (3.4),[OS01], [LO09], [OT15] などにあります。

の $\overline{S}/G$ 上の flop 何回かの合成で得られる。ここで、$\nu : S \to \overline{S}$ は $\overline{S}$ の極小特異点解消であり、自然に $G \subset \mathrm{Aut}\,(S)$ である。

注意 2.9 $G-\mathrm{Hilb}\,(S \times E)(\subset \mathrm{Hilb}^{|G|}\,(S \times E))$ は、$S \times E$ の 0 次元閉部分スキーム Z で G-不変かつ誘導される G の $H^0(\mathcal{O}_Z)$ 上の表現が G の正則表現であるような Z 全体のなす $\mathrm{Hilb}^{|G|}\,(S \times E)$ の閉部分スキームである ([IN96])。Bridgeland-King-Reid([BKR01]) により、$G-\mathrm{Hilb}\,(S \times E) \to (S \times E)/G$ は $(S \times E)/G$ の 1 つの射影的な crepant resolution である。従って、川又先生の基本的結果 ([Ka08]) により、X が $G-\mathrm{Hilb}\,(S \times E)$ と flop の合成でつながることと X が $G-\mathrm{Hilb}\,(S \times E)$ と双有理であることは同値である。

定理に関連した 3 例を述べて本節を終える。

例 2.10 $\varphi_i : S_i \to \mathbb{P}^1 (i = 1, 2)$ を大域切断をもつ相対極小な有理楕円曲面とし、φ_1 と φ_2 は共通の critical point をもたないようにしておく。このとき、

$$S_1 \times_{\mathbb{P}^1} S_2 = (\varphi_1 \times \varphi_2)^{-1}(\Delta_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1})$$

は（滑らかな）3 次元カラビ・ヤウ多様体であることが 2 番目の表示からわかる ([Sc88], [GLW22]) 。また、自然な射 $f : S_1 \times_{\mathbb{P}^1} S_2 \to \mathbb{P}^1$ の一般ファイバーは 2 つの楕円曲線の直積、特にアーベル曲面である。特に φ_i として滑らかなファイバーはすべて周期 ω の楕円曲線 E_3 で特異ファーバーはすべてカスプを持つ有理曲線であるものをとる。例えば

$$y^2 = x^3 + (t^6 - 1)\ ,\ y^2 = x^3 + (t^6 - 2)$$

で与えられる 2 つの楕円曲面は条件をみたす。このとき、f の滑らかなファイバーは全て $E_3 \times E_3$ と同型なので、例 (2.3) にあるファイバーごとの自己同型はつながって $\mathbb{P}^1$ 上 $S_1 \times_{\mathbb{P}^1} S_2$ の双有理自己写像を定めそうに見える。しかしながら、定理 (2.8)(1) によれば、そうはならないことがわかる。実際、そうなったなら、（f のファイバーには $\mathbb{P}^1$ が全くはいっていないので、底曲線 $\mathbb{P}^1$ 上の flop は存在しないため）$\mathbb{P}^1$ 上の $S_1 \times_{\mathbb{P}^1} S_2$ の自己同型射に延長され、その第一力学次数は $((1+\sqrt{5})/2)^2 > 1$ となる。従って、定理 (2.8)(1) によれば、$S_1 \times_{\mathbb{P}^1} S_2$ は X_3 と同型になるはずである。しかしながら、$S_1 \times_{\mathbb{P}^1} S_2$ の位相的オイラー数は 0 であり、X_3 の位相的オイラー数は 72 であり、同型ではないからである。

例 2.11 1. 例 (2.7) にある

$$g_{X_3} \in \mathrm{Aut}\,(\overline{\mathrm{pr}}_{12} \circ \mu_3 : X_3 \to \overline{X}_3 \to E_3^2/\langle \omega \cdot \mathrm{id}_{E_3^2} \rangle)$$

は定理 (2.8)(2) の例（$S = \overline{S}$ がアーベル曲面の場合の例）である。

2. S を $\iota^*|N^1(S) = \mathrm{id}_{N^1(S)}$ かつ $\iota^*\omega_S = -\omega_S$ (ω_S は S の 0 でない大域的正則 2 形式）をみたす位数 2 の自己同型射 ι とエントロピー正の自己同型射 g をもつ K3 曲面で、固定点集合 S^ι が 1 個以上の $\mathbb{P}^1$ の交わりのない合併となっているものを考える。このような S は 1 1 タイプ存在する ([Ni83])。[5] このとき、$S \to \overline{S}$ を S^ι の収縮射と定めれば

$$f : \langle(\iota, -1_E)\rangle\text{–Hilb}\,(S \times E) \to (S \times E)/\langle(\iota, -1_E)\rangle \to S/\langle\iota\rangle \to \overline{S}/\langle\iota\rangle$$

は定理 (2.8)(2) の条件をみたす 3 次元カラビ・ヤウ多様体（S が K3 曲面の場合の例）である。実際 $(g, 1_E)$ は $\mathrm{Aut}\,(f)$ の元 $\tilde{g}$ を定め、$d_1(\tilde{g}) = d_1(g) > 1$ である。

次は、定理 (2.8) の現象は多重標準写像の場合とはかなり様相が異なることを示している。

例 2.12 1. A をエントロピー正の自己同型射 g をもつアーベル曲面、C を種数 2 以上の曲線とするとき、$A \times C$ の小平次元は 1 である。第 2 射影 $p_2 : A \times C \to C$ は $A \times C$ の多重標準射であり、その一般ファイバーはアーベル曲面である。$\mathrm{Aut}\,(p_2)$ は正エントロピーの自己同型 (g, id_C) をもつが、$A \times C$ は（一意存在からは程遠く）大量にある。

2. 多様体 X の多重標準写像 $\Phi : X \dashrightarrow B$ は $\mathrm{Bir}\,(X)$ で保たれ B への作用は射にできる。また、$\mathrm{Bir}\,(X)$ の標準環への作用の有限性より、$\mathrm{Bir}\,(X)$ の B への作用は有限位数である。X を小平次元 2 の 3 次元多様体とする。このとき、特に、$\mathrm{Bir}\,(X)$ の任意の元 g が誘導する B の自己同型（射）を g_B とすれば $d_1(g_B) = 1$ である。また、一般ファイバーは 1 次元である。故に、積公式により、任意の $g \in \mathrm{Bir}\,(X)$ に対し $d_1(g) = 1$ である。定理 (2.8)(2) との大きな違いは、多重標準写像の底空間への $\mathrm{Bir}\,(X)$ の作用は有限であるが、カラビ・ヤウ多様体のファイバー空間では必ずしもそうなっていないところにある。

3　３次元カラビ・ヤウ多様体の c_2-収縮

X を 3 次元カラビ・ヤウ多様体とする。このとき、Miyaoka-Yau の基本的結果 ([Mi87]) により、線型形式

$$(c_2(X), *)_X : N^1(X)_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto (c_2(X).x)_X$$

[5] 例えば、互いに同種でない楕円曲線 E_1, E_2 に対し、$\mathrm{Km}(E_1 \times E_2)$ は $(-1_{E_1}1_{E_2})$ の定める自己同型射により, 条件をみたす K3 曲面の例を与える。横道にそれるが、この性質を用いて、非極小 K3 曲面、非極小 Enriques 曲面でその全自己同型群が非有限生成であるものの例が [DO19], [DOY23], [DGLOWY22] 等で構成されている。

は豊富錐 $\mathrm{Amp}\,(X)$ 上真に正（従ってネフ錐 $\overline{\mathrm{Amp}}\,(X)$ 上非負）である。次は P.M.H Wilson 教授よる、$c_2(X)$ と自己同型群の関係の（わかってしまえば簡単かも知れないが）意義深い結果である。[6]

定理 3.1 ([Wi97]) X を $\overline{\mathrm{Amp}}\,(X) \setminus \{0\}$ 上 $c_2(X)$ が真に正である 3 次元カラビ・ヤウ多様体とする。このとき、$\mathrm{Aut}\,(X)$ は有限群である。特に、任意の $g \in \mathrm{Aut}\,(X)$ に対し $d_1(g) = 1$ である。

証明 H を X の豊富因子とし、$(c_2(X).H)_X = B > 0$ とする。仮定より、

$$S := \overline{\mathrm{Amp}}\,(X) \cap \{x \in N^1(X)_{\mathbb{R}} \,|\, (c_2(X).x)_X = B\}$$

は $N^1(X)_{\mathbb{R}}$ のコンパクト集合である。従って、離散集合 $N^1(X)$ との交わり $S \cap N^1(X)$ は、H を含む有限集合であり、属する元の総和 L を作ることができる。L は豊富因子類であり $\mathrm{Aut}\,(X)$ は $c_2(X)$ と交点形式を保存することから、$g^*L = L$ がすべての $g \in \mathrm{Aut}\,(X)$ に対しなりたつ。このことから、$X \times X$ の偏極 $p_1^*L + p_2^*L$ に関する g のグラフ $\Gamma_g \subset X \times X$ の次数は g によらず一定となる。故に、少なくとも一つの Γ_g を含むような $\mathrm{Hilb}\,(X \times X)$ の既約成分は有限個となる。また、そのような各既約成分において自己同型のグラフに対応する点全体は稠密開集合 U_g をなす（双方向への射影が同型であるという条件は開条件だから）。他方、カラビ・ヤウ多様体の定義から $H^0(T_X) = 0$ だから、U_g はすべて 0 次元である。故に、$\mathrm{Aut}\,(X)$ は有限集合である。後半部分は、Fujiki-Lieberman の定理 ([Fu78]) からも従う。

従って、３次元カラビ・ヤウ多様体が正エントロピーの自己同型射をもつならば、$(c_(X).v)_X = 0$ かつ $v \neq 0$ をみたすネフ $\mathbb{R}$ 因子類 v がなければいけないことになる。この性質が 3 次元カラビ・ヤウ多様体に対するどのくらい強い条件か（あるいは”一般的”条件であるかなど）を調べることは、興味ある問題である。錐予想底空間の次元が正の c_2-収縮をもつものはその中にあって幾何学的意味が最もわかりやすいものである。

定義 3 次元カラビ・ヤウ多様体 X の収縮射 $f : X \to B$ は、B の豊富因子 H であって $(c_2(X).f^*H)_X = 0$ をみたすものがあるとき、X の c_2-収縮という。$(c_2(X).f^*N^1(B))_X = 0$ である収縮射といっても同じである。また、c_2-収縮 $f_0 : X \to B_0$ であって、任意の c_2-収縮 $f : X \to B$ に対し $f = \iota \circ f_0$ をみたす射 $\iota : B \to B_0$ があるとき、$f_0 : X \to B_0$ を X の最大 c_2-収縮という。

注意 3.2 1. $\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}$ への構造射は c_2-収縮である。底空間の正規性の仮定により、X の最大 c_2-収縮は存在すれば、底空間の同型射を除き一意である。

[6]関連する結果や錐予想との関係等が [OP98] で論じられている。

2. 任意の 2 つの c_2-収縮射 $f_i : X \to B_i$（$i = 1{,}2$）に対し、$f_i = \Phi_{|H_i|}$ とするとき、$f_3 = \Phi_{|m(H_1+H_2)|} : X \to B_3$（$m$ は十分大きな正整数）は f_1, f_2 双方を全射正則に経由する c_2-収縮射である。このことと、3 次元カラビ・ヤウ多様体の収縮射の底空間は常に $\mathbb{Q}$-分解的であること (cf. [OS01]) から、最大 c_2-収縮射は（最悪構造射である場合を含め）常に存在する。

c_2-収縮定理を述べるために、もうひとつ例を構成しておく。

例 3.3 C_7 を $xy^3 + yz^3 + zx^3 = 0$ で定まる射影平面曲線とし、A_7 を C_7 の Albanese 多様体とする。C_7 は種数 3 なので A_7 は 3 次元アーベル多様体である。また、C_7 の自己同型

$$g : [x : y : z] \mapsto [\zeta_7 x : \zeta_7^2 y : \zeta_7^4 z]$$

(ζ_7 は 1 の原始 7 乗根）が誘導する A_7 の自己同型 g_7 は、A_7 の不変被覆 $\mathbb{C}^3$ の適当なアフィン座標 (z_1, z_2, z_3) に関して、行列

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} \zeta_7 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_7^2 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_7^4 \end{pmatrix}$$

で与えられ、特に A_7 の大域的正則 3 形式に自明に作用する。このとき、Hilbert-Chow 射

$$\mu_7 : X_7 := \langle g_7 \rangle - \mathrm{Hilb}(A_7) \to \overline{X}_7 := A_7/\langle g_7 \rangle$$

において X_7 は 3 次元カラビ・ヤウ多様体で μ_7 は X_7 の c_2-収縮である。より具体的には、μ_7 は $\overline{X}_7$ の 7 個の $\frac{1}{7}(1, 2, 4)$ 型特異点のクレパントなトーリック特異点解消で与えられる。

次は c_2-収縮の分類定理である：

定理 3.4 ([OS01]) $f : X \to B$ を 3 次元カラビ・ヤウ多様体 X の c_2-収縮とする。このとき、

1. $\dim B = 1$ であれば、f の一般ファイバーはアーベル曲面である。

2. $\dim B = 2$ であれば、f は定理 2.8(2) でのべた形になる。すなわち、定理 2.8(2) の記号の下、$B = \overline{S}/G$ の形で、$f : X \to B$ は

$$G - \mathrm{Hilb}(S \times E) \to \overline{S}/G = B$$

に B 上の flop を何回か施したものとファイバー空間として同型である。

3. $\dim B = 3$ であれば、$f : X \to B$ はファイバー空間として、例 (2.7) の収縮

$$\mu_3 : X_3 \to \overline{X}_3$$

または、例 (3.3) 収縮

$$\mu_7 : X_7 \to \overline{X}_7$$

のいずれかと、ファイバー空間として同型である。特に、この 2 つはどちらも最大 c_2-収縮である。

4 定理 2.8(1) の証明の概略

定理 2.8(1) の証明の概略を [Og23a] に沿って示す。[7] ここでの方法の萌芽は [KOZ09] の最後の部分にも現れている。

補題 4.1 $g \in \mathrm{Aut}(X/\mathbb{P}^1)$ としてよい。（以下そうする。）

証明 $B = \mathbb{P}^1$ である。N を f の critical points($\in B = \mathbb{P}^1$) の個数とする。Viehweg-Zuo ([VZ01]) により $N \ge 3$ である。g_B はこれら N 点の置換を引き起こし、$g_B^{N!}$ は N 個の critical points を点毎に固定する。$B = \mathbb{P}^1$、$N \ge 3$ なので、このとき $g_B^{N!} = \mathrm{id}_B$ である。従って g を $g^{N!}$ に置き換えれば $g \in \mathrm{Aut}(X/\mathbb{P}^1)$ である。

補題 4.2 実数 $\delta_1 > 1$, $\delta_2 > 1$ と $\mathbb{R}$-ネフ因子 $D_1 \neq 0$, $D_2 \neq 0$ があって、$N^1(X)_{\mathbb{R}}$ において

$$g^* D_1 = \delta_1 D_1 \ , \ g^* D_2 = \delta_2^{-1} D_2$$

が成り立つ。

証明 $\delta_1 = d_1(g) > 1$ とおく。δ_1 は g^* の $N^1(X)_{\mathbb{R}}$ への作用のスペクトル半径であり、g^* は、$N^1(X)_{\mathbb{R}}$ 内の内点をもつ strict convex closed cone である $\overline{\mathrm{Amp}}\,(X)$ を保つので、Perron-Frobenius 型定理 ([Bi67],[KOZ09]) により、

$$g^* D_1 = \delta_1 D_1$$

をみたす $D_1 \in \overline{\mathrm{Amp}}\,(X) \setminus \{0\}$ がある。g の固有値の絶対値の積は 1 だから、$d_1(g) > 1$ なら、$\delta_2 = d_1(g^{-1}) > 1$ である。従って、g^{-1} に対し同じ議論が適用できて、D_2 の存在が従う。

A を f の一般ファイバーとする。このとき、補題 (4.1) より $g \in \mathrm{Aut}\,(X/\mathbb{P}^1)$ だから、X の部分多様体として $g(A) = A$ であり $g|_A \in \mathrm{Aut}\,(A)$ である。

[7] 詳細と定理 2.8(2) の証明は [Og23a] を参照してください。

補題 4.3 $(A.D_1.D_2)_X > 0$

証明　H を X の滑らかで非常に豊富な因子とする。このとき

$$(*)\quad 0 \le (D_1|_H.A|_H)_H = (D_1.A.H)_X = (D_1|_A.H|_A)_A$$

である。(*) において、もし"$0=$"であったならば、曲面 H のホッジ指数定理により $D_1|_H$ と $A|_H$ は $N^1(H)_{\mathbb{R}}$ で平行である。H は滑らかな非常に豊富な因子なので Lefschetz の超平面切断定理により、$0 \ne D_1$ と $0 \ne A$ も $N^1(X)_{\mathbb{R}}$ において平行となる。これは、D_1 は g^* の固有値 $\delta_1 > 1$ に対応する固有ベクトルで A は固有値 1 に対応する固有ベクトルであることに反する。故に、(*) において、"$0<$"だから、$N^1(A)_{\mathbb{R}}$ において $D_1|_A \ne 0$ である。全く同様に $N^1(A)_{\mathbb{R}}$ において $D_2|_A \ne 0$ である。

A, D_1, D_2 はネフだから、補題 (4.3) のためには、 $(A.D_1.D_2)_X \ne 0$ を言えば十分である。もし、"$=0$"であったなら

$$0 = (A.D_1.D_2)_X = (D_1|_A.D_2|_A)_A$$

である。このとき、曲面 A にホッジ指数定理を用いて、$D_1|_A$ と $D_2|_A$ は $N^1(A)_{\mathbb{R}}$ で平行となる。他方、すでに確認したように、$0 \ne D_1|_A$, $0 \ne D_2|_A$ であり、また、$g(A) = A$ だから

$$g_A^*(D_1|_A) = g^*(D_1)|_A = \delta_1 D_1|_A\ ,\ g_A^*(D_2|_A) = \delta_2^{-1} D_2|_A$$

である。このことから、$0 \ne D_1|_A$, $0 \ne D_2|_A$ は、g_A^* の異なる固有値に対する固有ベクトルであり、平行にはなりえず矛盾である。以上で示された。

補題 4.4 $A + D_1 + D_2$ は X の巨大かつネフな $\mathbb{R}$ 因子で

$$(c_2(X).A + D_1 + D_2)_X = 0$$

をみたす。

証明　完全系列 $0 \to T_A \to T|_X \to N_{A/X} = \mathcal{O}_A \to 0$ から、$(c_2(X).A)_X = 0$ である。また、補題 (4.2) から

$$(c_2(X).D_1)_X = (g_* c_2(X).D_1)_X = (c_2(X).g^* D_1)_X = \delta_1 (c_2(X).D_1)_X$$

であり、$\delta_1 \ne 1$ だから $(c_2(X).D_1)_X = 0$ である。同様に $(c_2(X).D_2)_X = 0$ である。A, D_1, D_2 はすべてネフだから $A + D_1 + D_2$ はネフである。$\mathbb{R}$ 因子ではあるが、このとき $A+D_1+D_2$ が巨大であることと $(A+D_1+D_2)_X^3 > 0$ は同値である ([FM23, Lemma 2.3])。A, D_1, D_2 はすべてネフだから、補題 (4.3) より確かに $(A + D_1 + D_2)_X^3 > 0$ である。

補題 4.5 定理 (2.8)(1) が成り立つ。

証明　$(c_2(X).A+D_1+D_2)_X=0$ より $A+D_1+D_2$ は豊富ではない巨大因子類であり、豊富錐の境界上に乗っている。他方、川又先生の基本的な結果([Ka88, Theorem 5.7]) により、X のネフ錐 $\overline{\mathrm{Amp}}\,(X)$ は巨大錐の中で局所的に有限有理多面錐である。従って、$A+D_1+D_2$ を内点に含む $\overline{\mathrm{Amp}}\,(X)$ の境界 P は、$A+D_1+D_2$ の近くでは $\mathbb{Q}$ 上定義されたいくつかの超平面の交わりである。$(c_2(X).*)=0$ は、$\mathbb{Q}$ 上定義された超平面で、$A+D_1+D_2$ を含み、しかも $(c_2(X).\overline{\mathrm{Amp}}\,(X))_X\geq 0$ だから、$A+D_1+D_2$ の近くで P を定める超平面の 1 つに $(c_2(X).*)=0$ を付け加えることができる。故に、P 上 $A+D_1+D_2$ の近くに巨大かつネフな $\mathbb{Q}$-因子 M で $(c_2(X).M)_X=0$ であるものがとれる。固定点自由化定理より、M は semi-ample であり、しかも $(c_2(X).M)_X=0$ をみたす巨大因子なので、十分大きな正整数 m をとれば、mM は X の c_2-収縮 $\varphi:X\to\overline{X}$ を定め、その像は 3 次元である。従って、定理 (3.1) により、$\varphi:X\to\overline{X}$ は、$\mu_7:X_7\to\overline{X}_7$ または $\mu_3:X_3\to\overline{X}_3$ に同型であり、最大性により、いずれの場合も $f:X\to\mathbb{P}^1$ を経由する。このことと $\overline{X}_7$ からの $\mathbb{P}^1$ への射がないこと ([OS01, Lemma 4.2]) から、$X_3\to\overline{X}_3$ に同型であることがわかる。また、$\overline{X}_3$ から $\mathbb{P}^1$ への収縮射は、ファイバー空間として $\overline{\mathrm{pr}}_1$ と同型であることが、[OS01, Proposition 3.2] から従う。こうして定理 (2.8)(1) が示された。

5　謝辞

城崎代数幾何学シンポジュームが再び対面開催できるようになったことをとても嬉しく思います。また対面開催再開初回である今年度に講演させていただけたことを大変光栄に思います。このような機会を与えて下さったオーガナイザーの先生方である、阿部健先生、岩成勇先生、谷本祥先生に心より感謝申し上げます。

参考文献

[Be83] A. Beauville,: *Some remarks on Kähler manifolds with* $c_1=0$ *: In Classification of algebraic and analytic manifolds (Katata, 1982)*, Progr. Math. Birkhauser Boston, Boston, MA **39** (1983) 1–26.

[Bi67] G. Birkhoff, : *Linear transformations with invariant cones*, Amer. Math. Month. **74** (1967) 274–276.

[BKR01] T. Bridgeland, A. King, M. Reid, : *The McKay correspondence as an equivalence of derived categories*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001) 535–554.

[Ca99] S. Cantat, : *Dynamique des automorphismes des surfaces projectives complexes*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **328** (1999) 901–906.

[CO15] S. Cantat, K. Oguiso, : *Birational automorphism groups and the movable cone theorem for Calabi-Yau manifolds of Wehler type via universal Coxeter groups.* Amer. J. Math. **137** (2015) 1013–1044.

[DGLOWY22] T.-C. Dinh, C.Gachet, H.-Y. Lin, K. Oguiso L. Wang and X. Yu, : *Smooth projective surfaces with infinitely many real forms*, arXiv:2210.04760, accepted by Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa.

[DN11] T.-C. Dinh, V.-A. Nguyen, :*Comparison of dynamical degrees for semi-conjugate meromorphic maps*, Comment. Math. Helv. **86** (2011) 817–840.

[DO19] T.-C. Dinh and K. Oguiso, : *A surface with discrete and nonfinitely generated automorphism group*, Duke Math. J. **168** (2019) 941–966.

[DOY23] T.-C. Dinh, K. Oguiso, X. Yu, : *Smooth complex projective rational surfaces with infinitely many real forms*, J. Reine Angew. Math. **794** (2023), 267–280.

[DS05] T.-C. Dinh, N. Sibony, : *Une borne supérieure pour l'entropie topologique d'une application rationnelle*, Ann. of Math. **161** (2005) 1637–1644.

[Do18] I. Dolgachev, : *Salem numbers and Enriques surfaces*, Exp. Math. **27** (2018) 287–301.

[Fu78] A. Fujiki, : *On automorphism groups of compact Kähler manifolds*, Invent. Math. **44** (1978) 225–258.

[FM23] O. Fujino, K. Miyamoto, : *Nakai-Moishezon ampleness criterion for real line bundles*, Math. Ann. **385** (2023) 459–470.

[GLW22] C. Gachet, H.-Y. Lin, L. Wang : *Nef cones of fiber products and an application to the Cone Conjecture*, arXiv:2210.02779

[IN96] Y. Ito, I. Nakamura, : *McKay correspondence and Hilbert schemes*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **72** (1996) 135–138.

[Ka88] Y. Kawamata, : *Crepant blowing-up of 3-dimensional canonical singularities and its application to degenerations of surfaces*, Ann. of Math. (2) **127** (1988) 93–163,

[Ka97] Y. Kawamata, : *On the cone of divisors of Calabi-Yau fiber spaces*, Internat. J. Math. **8** (1997) 665–687.

[Ka08] Y. Kawamata, : *Flops connect minimal models*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **44** (2008) 419–423.

[KOZ09] J.H. Keum, K. Oguiso, D.-Q. Zhang, : *Conjecture of Tits type for complex varieties and theorem of Lie-Kolchin type for a cone*, Math. Res. Lett. **16** (2009) 133–148.

[LOP18] V. Lazić, K. Oguiso, Th. Peternell, : *The Morrison-Kawamata cone conjecture and abundance on Ricci flat manifolds*, Uniformization, Riemann-Hilbert correspondence, Calabi-Yau manifolds and Picard-Fuchs equations, 157–185, Adv. Lect. Math. (ALM) **42**, Int. Press, Somerville, MA, 2018.

[LS21] J. Lesieutre, M. Satriano, : *Canonical heights on hyper-Kähler varieties and the Kawaguchi-Silverman conjecture*, Int. Math. Res. Not. IMRN **10** (2021) 7677–7714.

[Mc16] C. T. McMullen, : *Automorphisms of projective K3 surfaces with minimum entropy*, Invent. Math. **203** (2016) 179–215.

[Mi87] Y. Miyaoka, : *The Chern classes and Kodaira dimension of a minimal variety*, Algebraic geometry, Sendai, 1985, 449–476, Adv. Stud. Pure Math. (1987) **10**, North-Holland, Amsterdam.

[LO09] N.-H. Lee, K. Oguiso, : *Connecting certain rigid birational non-homeomorphic Calabi-Yau threefolds via Hilbert scheme*, Comm. Anal. Geom. **17** (2009) 283–303.

[Ni83] V. V. Nikulin, : *Factor groups of groups of automorphisms of hyperbolic forms with respect to subgroups generated by 2-reflections: Algebro geometric application*, J. Math. Sci. **22** (1983) 1401–1475.

[OS01] K. Oguiso and J. Sakurai, : *Calabi-Yau threefolds of quotient type*, Asian J. Math. **5** (2001) 43–77.

[Og14a] K. Oguiso, : *Some aspects of explicit birational geometry inspired by complex dynamics*. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Seoul 2014. Vol.II, 695–721, Kyung Moon Sa, Seoul 2014.

[Og14b] K. Oguiso, : *Automorphism groups of Calabi-Yau manifolds of Picard number 2*, J. Algebraic Geom. **23** (2014) 775–795.

[Og23a] K. Oguiso, : *Fibered Calabi-Yau threefolds with relative automorphisms of positive entropy and c_2-contractions*, in preparation.

[Og23b] K. Oguiso, : *The endmorphism ring of a variety of Uneno type and Kawaguchi-Silverman Conjecture*, in preparation.

[OT15] K. Oguiso, Keiji, T.-T. Truong, : *Explicit examples of rational and Calabi-Yau threefolds with primitive automorphisms of positive entropy*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **22** (2015) 361–385.

[OP98] K. Oguiso, Th. Peternell, : *Calabi-Yau threefolds with positive second Chern class*, Comm. Anal. Geom. **6** (1998) 153–172.

[OY20] K. Oguiso, X. Yu, : *Minimum positive entropy of complex Enriques surface automorphisms*, Duke Math. J. **169** (2020) 3565–3606.

[Sc88] C. Schoen. : *On fiber products of rational elliptic surfaces with section*. Math. Z. **197** (1988) 177–199.

[To10] B. Totaro, : *The cone conjecture for Calabi-Yau pairs in dimension 2*, Duke Math. J. **154** (2010) 241–263.

[Tr15] T.-T. Truong,: *(Relative) dynamical degrees of rational maps over an algebraic closed field*, arXiv:1501.01523.

[Tr20] T.-T. Truong,: *Relative dynamical degrees of correspondences over a field of arbitrary characteristic*, J. Reine Angew. Math. **758** (2020) 139–182.

[Ue16] T. Uehara, :*Rational surface automorphisms with positive entropy*, Ann. Inst. Fourier **66** (2016) 377–432.

[VZ01] E. Viehweg, K. Zuo, : *On the isotriviality of families of projective manifolds over curves*, J. Algebraic Geom. **10** (2001) 781–799.

[Wi97] P. M. H. Wilson, : *The role of c_2 in Calabi-Yau classification – a preliminary survey*, Mirror symmetry, II, AMS/IP Stud. Adv. Math., vol. 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, pp. 381–392.