アーベル多様体の標準骨格の忠実トロピカル化

山木　壱彦

はじめに

本稿の主題. 非アルキメデス的体上の代数多様体 X に付随して，ベルコビッチ解析空間と呼ばれる非アルキメデス的解析空間 X^{an} が定まる．これは局所コンパクトなハウスドルフ空間であり，さらに局所弧状連結であることが知られている．位相空間としてはまずまず穏当なものである．

ただ，この位相空間を具体的に目に見える形で記述できるかというと，そこまで単純なものでもない．実際，これは多面体空間[1]の「極限」であり，例えば X が射影直線の場合には，X^{an} は「無限に繁茂した」樹木のようなものである．必ずしも単純な対象とは言い難い．

しかし，同時にこのことは，X^{an} は多面体空間で「近似」できることを意味している.「X^{an} を理解するために，それを近似する多面体空間を調べてはどうか？」というのは，自然な発想である．

本稿の表題にある「骨格」とは，ベルコビッチ解析空間の閉部分集合で自然に多面体空間の構造を持つもので，さらにそれらを寄せ集めるとそのベルコビッチ解析空間を近似するようなものになっている．骨格を詳しく調べることにより，もとの解析空間の構造の研究に資することは期待できる．

X^{an} の上にある数学的対象を考えると，その対象に関する情報はしばしば特定の骨格の上に集約される．このことは，あらゆる骨格を理解せずとも特定の骨格を理解すれば，その数学的対象の理解には十分な場合もあることを意味する．例えば，幾何的ボゴモロフ予想にかかる Gubler の結果 [4, 5, 6] や著者による結果 [13, 14] においては「標準測度」と呼ばれるベルコビッチ解析空間上の測度が重要な役割を果たした．それは（適当な意味において）ある骨格の上に台を持つ測度であり，実際，骨格上で解析を行うことにより，この場合の応用に十分な情報が得られた．

Date: January 3, 2024.

「城崎代数幾何学シンポジウム 2023」の世話人の皆さんに感謝いたします．本稿は，JSPS 科研費 18K03211, 23K03046 の助成を受けたものです．.

[1]大雑把に言えば，多面体複体構造が入る位相空間．小節 1.4 で少し説明している．

本稿では，アーベル多様体の骨格のうち,「標準骨格」を扱う．これは特別な骨格に過ぎないが，骨格のうちで包含関係に関して最小のものであるという事情もあり．アーベル多様体の骨格を考察する上で最初に扱うものとして適当であろう．

さて，骨格を理解しようと考えたとき，それが組み合わせ論的な言葉で記述できると，具体的な計算において役立つことが期待できる．例えば，骨格をトロピカル射影空間の中の多面体的部分集合と見なせれば，トロピカル射影空間という入れ物に付随する組み合わせ論的言葉でその性質を記述できるかもしれない．その意味において，骨格をトロピカル射影空間に埋め込むという操作は，興味の対象となる．

代数幾何においては，代数多様体上の直線束の大域切断の系が与えられると，その代数多様体を射影空間への写像が構成される．そして，直線束がどのような条件を満たせば，これが埋め込みなるような大域切断系が取れるか，すわなち，直線束が非常に豊富かどうかは，古くからの基本的な問いである．

本稿の主題にもある「忠実埋め込み」とはいわばそのトロピカル類似である．X 上の直線束が L とその大域切断系 $s_0, \ldots, s_m$ が与えられると，それらを用いて X^{an} からトロピカル射影空間への写像 $\varphi^{\mathrm{trop}}_{s_0,\ldots,s_m}$ が自然に構成される．我々の基本的な問いは,「L がどのような条件を満たせば，大域切断系 $s_0, \ldots, s_m$ が存在して $\varphi^{\mathrm{trop}}_{s_0,\ldots,s_m}$ が多面体空間としての骨格を（整構造という付加構造込みで）トロピカル射影区間に埋め込むか？」というものであり，いわば，L がいつその骨格にとってトロピカル的に「非常に豊富」となるかを問うものである．

こうした問いを,「忠実トロピカル化問題」と呼ぶ．本稿では，この忠実トロピカル化問題を，X がアーベル多様体で骨格がその標準骨格の場合に考察し，忠実トロピカル化を許容するための十分条件を与える．なお，本稿の大部分は，同志社大学の川口周氏と共同で行っている現在進行中の共同研究 [9] に基づく．

記号と術語．非アルキメデス的体と言ったら，非アルキメデス的絶対値が備わった体で完備なもののことを言う．非アルキメデス的体 k に対し，その付値環，すなわち，k の元で絶対値が 1 以下のもの全体のなす環を，k° で表す．

以下，非アルキメデス的体 k を固定し，その絶対値を $|\cdot|_k$ で表す．さらに，k は代数的閉であり，かつその絶対値は非自明であると仮定する．**代数多様体**と言ったら，k 上の被約かつ既約な有限型スキームを意味する．

1. 忠実トロピカル化

本節では，忠実トロピカル化とは何かを説明する．

1.1. **ベルコビッチ解析空間.** X は代数多様体とする．$p \in X$ に対し，$\kappa(p)$ で X の p における剰余体を表す．位相空間 X^{an} を，集合としては

$$X^{\mathrm{an}} := \{(p, |\cdot|) \mid p \in X \text{ かつ } |\cdot| \text{ は } \kappa(p) \text{ 上の絶対値で，} |\cdot|_k \text{ を拡張したもの}\}$$

で与え，そこに次の条件を満たす最弱の位相を入れたものとして定義する：任意の開集合 $U \subset X$ と任意の $f \in \mathcal{O}_X(U)$ に対し，

(i) U^{an} は X^{an} の開集合；
(ii) 写像 $|f| : U^{\mathrm{an}} \to \mathbb{R}$ を $(p, |\cdot|) \mapsto |f(p)|$ で定めると，これは連続．ただし，$f(p)$ は自然な全射 $\mathcal{O}_{X,p} \to \kappa(p)$ による f の像を表す．

X^{an} を，X に付随した**（ベルコビッチ）解析空間**，または，X の**解析化**と呼ぶ．以下では，$x = (p, |\cdot|) \in X^{\mathrm{an}}$ と p の開近傍 $U \subset X$，および $f \in \mathcal{O}_X(U)$ に対し，$|f(x)| := |f(p)|$ と表記する．Berkovich の [1] により，代数多様体に付随したベルコビッチ解析空間は，局所コンパクトかつ局所弧状連結なハウスドルフ空間であることが知られている．

注意 1.1. 任意の $p \in X(k)$ に対し，自然に $\kappa(p) = k$ である．よって，自然な写像 $X(k) \to X^{\mathrm{an}}$ が存在する．これは単射なので，自然に $X(k) \subset X^{\mathrm{an}}$ と見なす．

$f : Y \to X$ が代数多様体の射のとき，容易にわかるように，自然に写像 $f^{\mathrm{an}} : Y^{\mathrm{an}} \to X^{\mathrm{an}}$ が誘導され，さらにこれは連続写像である．これを，f の**解析化**と呼ぶ．

注意 1.2. 上では，代数多様体の解析化を単に位相空間として定義したが，実際には解析函数の概念が定義され,「本来の意味」での解析空間の構造が入る．代数多様体の射から誘導される写像は，この意味での解析的射にもなっている．また，代数多様体の解析化の間の解析的な射の中には，代数多様体の射から誘導されないものもある．

1.2. **トロピカル化写像.** $\mathbb{T} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ と置く．ここには，自然な順序と自然な位相が入っていることに注意する．また，加法を min，乗法を $+$ で入れることにより，これは半体[2]となっている．

$\mathbb{R}$ の $\mathbb{T}^{m+1}$ への作用を

$$\mathbb{R} \times \mathbb{T}^{m+1} \to \mathbb{T}^{m+1}; \quad (\lambda, (a_0, \ldots, a_m)) \mapsto (\lambda + a_0, \ldots, \lambda + a_m)$$

で定める．これは，$\mathbb{R}$ の $\mathbb{T}^{m+1} \setminus \{(+\infty, \ldots, +\infty)\}$ への自由な作用を誘導する．そこで，

$$\mathbb{TP}^m := \left(\mathbb{T}^{m+1} \setminus \{(+\infty, \ldots, +\infty)\}\right) / \mathbb{R}$$

[2]「加法」と乗法が備わった集合で，体の公理のうちで「加法」についての逆元の存在を除いた公理を満たすもの．

と定め，これを **(m 次元) トロピカル射影空間**と呼ぶ．$(a_0, \dots, a_m) \in \mathbb{T}^{m+1} \setminus \{(+\infty, \dots, +\infty)\}$ の属する類を $(a_0 : \cdots : a_m)$ で表す．

$\mathbb{R}^m \to \mathbb{TP}^m$ を $(a_1, \dots, a_m) \mapsto (0 : a_1 : \cdots : a_m)$ で定めると，これは位相空間の開埋め込みであり，その像は

$$\{(a_0 : \cdots : a_m) \mid \text{全ての } i = 0, \dots, m \text{ に対し } a_i \in \mathbb{R}\}$$

に一致する．この開埋め込みにより，$\mathbb{R}^m \subset \mathbb{TP}^m$ と見なす．なお，自然に $\mathbb{Z}^m \subset \mathbb{R}^m$ であり，$\mathbb{Z}^m$ は $\mathbb{R}^m$ の格子であることも注意しておく．

$T_0, \dots, T_m$ は $m+1$ 個の不定元とし，k 上のアフィン空間 $\mathbb{A}^{m+1} = \operatorname{Spec}(k[T_0, \dots, T_m])$ を考える．連続写像

$$(\mathbb{A}^{m+1})^{\mathrm{an}} \to \mathbb{T}^{m+1}; \quad x \mapsto (-\log|T_0(p)|, \dots, -\log|T_m(p)|)$$

は，連続写像

$$\operatorname{trop} : (\mathbb{P}^m)^{\mathrm{an}} \to \mathbb{TP}^m$$

を自然に誘導する．これを，$\mathbb{TP}^m$ の**トロピカル化写像**（または**付値写像**）と呼ぶ．

記号を一つ定義する．

定義 1.3. $\varphi : X \to \mathbb{P}^m$ は代数多様体の射とする．その解析化 $\varphi^{\mathrm{an}} : X^{\mathrm{an}} \to (\mathbb{P}^m)^{\mathrm{an}}$ にトロピカル化写像 $\operatorname{trop} : (\mathbb{P}^m)^{\mathrm{an}} \to \mathbb{TP}^m$ を合成した $\operatorname{trop} \circ \varphi^{\mathrm{an}}$ を，$\varphi^{\mathrm{trop}} : X^{\mathrm{an}} \to \mathbb{TP}^m$ で表す．

1.3. **整多面体と射．** 整多面体について概説する．整多面体の概念は「無限遠」を含む形で定式化できるが，ここでは無限遠を含まないもののみを扱う．

M は有限階数の自由 $\mathbb{Z}$ 加群とする．$N := \operatorname{Hom}(M, \mathbb{Z})$ とおく．$\mathbb{R}$ の部分加法群 Γ に対し，$N_\Gamma := \operatorname{Hom}(M, \Gamma)$ とおく．$N_\Gamma = N \otimes \Gamma \subset N_\mathbb{R}$ であることに注意する．以下では，Γ は加法群 $\mathbb{R}$ の可除部分群であるとする．N_Γ は $N_\mathbb{R}$ において（ユークリッド位相に関して）稠密であることに注意しておく．N_Γ の点のことを，$N_\mathbb{R}$ の Γ **有理点**と呼ぶ．

一般に，有限次元実ベクトル空間の格子のことを**整構造**と呼ぶ．N は $N_\mathbb{R}$ の整構造である．$N_\mathbb{R}$ の整構造と言ったら，特に断わらない限り，この整構造を指す．

$N_\mathbb{R}$ の Γ **有理整多面体**とは，$N_\mathbb{R}$ の部分集合 P で，$\phi_1, \dots, \phi_r \in M$ と $c_1, \dots, c_r \in \Gamma$ が存在して

$$P = \{v \in N_\mathbb{R} \mid \text{全ての } j = 1, \dots, r \text{ について } \phi_j(v) + c_j \geq 0\}$$

が成立するもののことである．

P は $N_\mathbb{R}$ の Γ 有理整多面体とする．P の面の概念は自然に定義でき，それは $N_\mathbb{R}$ の Γ 有理整多面体である．また，相対内部 $\operatorname{relin}(P)$ の概念も自然に定義できる．

任意の $p \in P$ に対し，$P - p := \{v \in P \mid v - p\}$ とおく．すると，「$P - p$ を含む最小の部分ベクトル空間」は p の取り方に依らない．これを TP で表す．TP は M の元有限

個の共通零点として表されるので，$TP \cap N$ は TP の格子であることがわかる．自然に，$(TP \cap N) \otimes \mathbb{R} = TP$ であり，$P - p$ は TP の Γ 有理整多面体である．

注意 1.4. P が Γ 有理整多面体のとき，$\mathrm{relin}(P) \cap N_\Gamma$ は P で稠密である．特に，P が空でなければ，これは Γ 有理点を持つ．

M_1 と M_2 は有限階数の自由 $\mathbb{Z}$ 加群とし，N_1 は N_2 それぞれ双対加群とする．P_1 と P_2 はそれぞれ $(N_1)_\mathbb{R}$ と $(N_2)_\mathbb{R}$ の Γ 有理整多面体とする．写像 $f : P_1 \to P_2$ が Γ **有理アフィン整線型**であるとは，$\phi \in \mathrm{Hom}(N_1, N_2)$ と $c \in (N_2)_\Gamma$ が存在して，任意の $v \in P_1$ に対し $f(v) = \phi_\mathbb{R}(v) + c$ が成立することを言う；ただし，$\phi_\mathbb{R}$ は ϕ の $\mathbb{R}$ 上への係数拡大 $(N_1)_\mathbb{R} \to (N_2)_\mathbb{R}$ を表す.

注意 1.5. Γ 有理整多面体の間の写像 $f : P_1 \to P_2$ に対して，これが Γ 有理アフィン整線型であるためには，次が成立することが必要十分である：$p_0 \in P_1 \cap (N_1)_\Gamma$ を任意に固定するとき，$\psi \in \mathrm{Hom}_\mathbb{R}(TP_1, TP_2)$ と $c \in (N_2)_\Gamma$ が存在して，$\psi(TP_1 \cap N_1) \subset TP_2 \cap N_2$ かつ任意の $p \in P_1$ に対し $f(p) = \psi(p - p_0) + c$ が成立する．特に，このとき，ψ により準同型写像 $TP_1 \cap N_1 \to TP_2 \cap N_2$ が誘導される．

P_1 から P_2 への Γ 有理アフィン整線型写像のことを，P_1 から P_2 への**射**と呼ぶ．射の合成が射であることは，定義より簡単にわかる．射が定義できたので，同型の概念も自然に定義される．

$P \subset N_\mathbb{R}$ は空でない Γ 有理整多面体とする．$p_0 \in P \cap N_\Gamma$ とする（注意 1.4 より，このような p_0 は存在する）．このとき，$P \to P - p_0$ を $v \mapsto v - p_0$ で定めると，これは同型射である．また，$P - p_0$ は TP における Γ 有理整多面体（ただし，ここの「整」は TP の格子 $TP \cap N$ に関して）である．このことは，任意の P は，階数が $\dim(P)$ の自由 $\mathbb{Z}$ 加群が生成する実ベクトル空間の Γ 有理整多面体と同型であることがわかる．

射 f が**ユニモジュラー**であるとは，注意 1.5 の記号の下，ψ が単射，かつ $\psi(TP_1 \cap N_1)$ が $TP_2 \cap N_2$ の中で飽和的であること，または，同じことであるが，ψ が誘導する準同型写像 $TP_1 \cap N_1 \to TP_2 \cap N_2$ が切断を持つことを言う．P_1 が P_2 の面で f が包含写像のとき，これはユニモジュラーであることに注意しておく．

注意 1.6. $f_1 : P_1 \to P_2$ と $f_2 : P_2 \to P_3$ は Γ 有理整多面体の写像とする．このとき，次が成立する．

(1) f_1 と f_2 がユニモジュラー射ならば $f_2 \circ f_1$ もそうである．また，$f_2 \circ f_1$ がユニモジュラー射ならば f_1 もそうである．
(2) $f_2 \circ f_1$ が射で f_2 がユニモジュラー射ならば，f_1 は射である．

1.4. **多面体空間と忠実埋め込み．** 位相空間 σ の Γ **有理整多面体化**[3]（長いので略して**多面体化**と呼ぶ）とは，σ から（整構造の入った有限次元ベクトル空間の）Γ 有理整多面体への同相写像 ϕ のことである．二つの多面体化 ϕ_1 と ϕ_2 に対し,「$\phi_2^{-1}\circ\phi_1$ が Γ 有理整多面体の間の同型射である」という関係は同値関係であることがわかる．σ の多面体化をこの同値関係で見た同値類のことを，σ の**多面体構造**と呼ぶ．また，多面体構造付き位相空間のことを，**抽象多面体**と呼ぶ．抽象多面体に対し，その多面体構造に属する多面体化のことを，その抽象多面体の**多面体化**と呼ぶ.

抽象多面体の間の**射**とは，抽象多面体の間の写像であって，定義域と終域の位相空間をそれぞれの多面体化を通じて Γ 有理整多面体と同一視したとき，Γ 有理整多面体の射となっているもののことである．これは，定義域と終域の多面体化の取り方に依らずに定まる概念である．また，抽象多面体の間の射が**ユニモジュラー**であるというのも，定義域および終域それぞれの多面体化を介して同様に定義される.

抽象多面体 σ の**面**とは，σ の部分空間 τ であって，$\phi\colon\sigma\to P$ が σ の多面体化であるとき，$\phi(\tau)$ が P の面であるもののことである．このことは，σ の多面体化 ϕ の取り方によらないことも注意しておく．ϕ の制限により，τ 自身も多面体化を持ち，自然に抽象多面体である．また，自然な包含射 $\tau\to\sigma$ はユニモジュラーである．なお，抽象多面体 σ の面とは「位相空間としては σ の部分空間であるような抽象多面体で，包含写像 $\tau\to\sigma$ がユニモジュラーであり，かつ σ の多面体化による τ 像が普通の意味で面になっているもの」と言っても，同じことである.

X はハウスドルフ位相空間とする．X の**多面体分割**とは，X の局所有限部分集合族 $\mathscr{C}$ で，各 $\sigma\in\mathscr{C}$ は抽象多面体であり，さらに次の条件を満たすものを言う：

(i) 任意の $\sigma,\tau\in\mathscr{C}$ に対し，$\sigma\cap\tau$ は σ の面である.
(ii) 任意の $\sigma\in\mathscr{C}$ に対し，その任意の面は $\mathscr{C}$ に属する；

多面体分割 $\mathscr{C}$ が**有限**であるとは，$\mathscr{C}$ が有限集合であることを言う.

$\mathscr{C}_1$ と $\mathscr{C}_2$ は X の多面体分割とする．$\mathscr{C}_1$ が $\mathscr{C}_2$ の**細分**であるとは，任意の $\sigma_1\in\mathscr{C}_1$ に対し $\sigma_2\in\mathscr{C}_2$ が存在して $\sigma_1\subset\sigma_2$ かつ包含写像 $\sigma_1\to\sigma_2$ がユニモジュラー射であることを言う．$\mathscr{C}_1$ が $\mathscr{C}_2$ の細分で，$\sigma_1\in\mathscr{C}_1$ と $\sigma_2'\in\mathscr{C}_2$ が $\sigma_1\subset\sigma_2'$ を満たすなら，注意 1.6 (1) より，包含写像 $\sigma_1\to\sigma_2'$ は自動的にユニモジュラー射であることもわかる.

$\mathscr{C}_1$ と $\mathscr{C}_2$ との間の関係「$\mathscr{C}_1$ と $\mathscr{C}_2$ には共通細分が存在する」は，同値関係であることが証明できる．以下，共通細分を持つことを，単に，**同値**と言うことにする．X 上の多面体分割の同値類のことを，X の**多面体複体構造**と呼ぶ．多面体複体構造の備わった位相空間のこ

[3]この小節の術語の多くは，著者によって本稿用に導入されたもので，一般的なものではないと思われる．また，間違いが含まれる可能性も（他の小節より）高いかもしれない.

とを，**多面体空間**と呼ぶ．多面体空間 X に対しその**多面体分割**と言ったら，X に備わっている多面体複体構造に属する多面体分割のことを意味する．

例 1.7. N は有限階数の自由 $\mathbb{Z}$ 加群とする．

(1) $N_{\mathbb{R}}$ は自然に多面体空間である．

(2) $M' \subset N_{\mathbb{R}}$ は（一般には N と無関係な）格子とする．$M' \subset N_{\Gamma}$ と仮定する．自然な全射 $\pi : N_{\mathbb{R}} \to N_{\mathbb{R}}/M'$ を考える．これは局所同相写像である．$M' \subset N_{\Gamma}$ ゆえ，$N_{\mathbb{R}}$ の多面体分割 $\mathscr{C}$ で，M' 周期的，すなわち，任意の $\sigma \in \mathscr{C}$ と任意の $u' \in M'$ に対し $\sigma + u' \in \mathscr{C}$ かつ自然な全射 π が同相写像 $\sigma \to \pi(\sigma)$ を誘導するもの，が存在する．$\overline{\mathscr{C}} = \{\pi(\sigma) \mid \sigma \in \mathscr{C}\}$ とおけば，これは $N_{\mathbb{R}}/M'$ の多面体分割である．この多面体分割でもって，$N_{\mathbb{R}}/M'$ に多面体空間の構造が入る．

X_1 と X_2 は多面体空間とする．$\mathscr{C}_1$ と $\mathscr{C}_2$ はそれぞれ X_1 と X_2 の多面体分割とする．写像 $f : X_1 \to X_2$ が $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$ に関し**整合的**であるとは，任意の $\sigma_1 \in \mathscr{C}_1$ に対し $\sigma_2 \in \mathscr{C}_2$ が存在して $f(\sigma_1) \subset \sigma_2$ かつ f を制限して得られる写像 $\sigma_1 \to \sigma_2$ が抽象多面体の間の射であることを言う．この条件が満たされるとき，$\sigma_1 \in \mathscr{C}_1$，$\sigma_2' \in \mathscr{C}_2$ で $f(\sigma_1) \subset \sigma_2'$ であるならば，注意 1.6 (2) より，f を制限して得られる写像 $\sigma_1 \to \sigma_2'$ は自動的に抽象多面体の射である．

X_1 から X_2 への**射**とは，連続写像 $f : X_1 \to X_2$ で，X_1 の多面体分割 $\mathscr{C}_1$ と X_2 の多面体分割 $\mathscr{C}_2$ が存在して f が $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$ に関し整合的であるもののことである．

多面体空間の射 $f : X_1 \to X_2$ が**ユニモジュラー**であるとは，X_1 の多面体分割 $\mathscr{C}_1$ と X_2 の多面体分割 $\mathscr{C}_2$ が存在して，任意の $\sigma_1 \in \mathscr{C}_1$ に対し $\sigma_2 \in \mathscr{C}_2$ が存在して $f(\sigma_1) \subset \sigma_2$ かつ制限により誘導される抽象多面体の射 $\sigma_1 \to \sigma_2$ がユニモジュラーであることを言う．この性質は,「f が整合的であるような X_1 の多面体分割 $\mathscr{C}_1'$ と X_2 の多面体分割 $\mathscr{C}_2'$ に対し，$\sigma_1' \in \mathscr{C}_1'$，$\sigma_2' \in \mathscr{C}_2'$ が $f(\sigma_1') \subset \sigma_2'$ を満たすならば，f の制限で得られる写像 $\sigma_1' \to \sigma_2'$ がユニモジュラーである」と言っても同じことである；このことは，注意 1.6 (1) よりわかる．

例えば，例 1.7 (2) の射 π は，ユニモジュラーである．ただし，単射ではない．

定義 1.8 (忠実埋め込み)**.** X_1 と X_2 は多面体空間とし，$f : X_1 \to X_2$ は射とする．f が**忠実埋め込み**であるとは，それが単射かつユニモジュラーであることを言う．

1.5. **骨格の忠実トロピカル化.** 代数多様体 X の解析化 X^{an} には，しばしば「骨格」と呼ばれる部分空間が定義される．骨格のうちで「無限遠境界」を持たないもの[4]は，前小節の意味での多面体空間の構造を持つ.「（無限遠境界を持たない）骨格」の一般的な定義は本稿では割愛するが,（総退化な）アーベル多様体に対する標準骨格については，後で定義する．

[4]一般には，骨格と言ったら「無限遠境界」を持つことを許す．この場合には,「無限遠境界を持ちうる多面体空間」になる．

暫くは，骨格と呼ばれる多面体空間は既知のものとして，話を進める．S は X^{an} の（無限遠境界を持たない）骨格とする．$\varphi : X \to \mathbb{P}^m$ は代数多様体の射とする．像は座標超平面[5]に含まれないと仮定する．定義 1.3 の $\varphi^{\mathrm{trop}} : X^{\mathrm{an}} \to \mathbb{TP}^m$ を考える．今の仮定の下では，$\varphi^{\mathrm{trop}}(S) \subset \mathbb{R}^m$ となることがわかる．つまり，φ^{trop} は，その定義域と終域を制限することにより，写像 $S \to \mathbb{R}^m$ を誘導する．例 1.7 (1) にあるように $\mathbb{R}^m$ は多面体空間（整構造は自然な $\mathbb{Z}^m \subset \mathbb{R}^m$ で入れる）であることに注意すると，これは多面体空間の射となる．よって，これが忠実埋め込みかどうかを問うことは意味を成す．

定義 1.9 (骨格の忠実トロピカル化)**.** X は代数多様体とする．

(1) $\varphi : X \to \mathbb{P}^m$ は代数多様体の射とする．その像は座標超平面に含まれないと仮定する．誘導される写像 $\varphi^{\mathrm{trop}} : X^{\mathrm{an}} \to \mathbb{TP}^m$ が S を**忠実にトロピカル化する**[6]とは，定義域と終域を制限して得られる $\varphi^{\mathrm{trop}}_{s_0,\ldots,s_m}\big|_S : S \to \mathbb{R}^m$ が忠実埋め込みであることをいう．

(2) X 上の直線束 L が S **の忠実トロピカル化を許容する**とは，自然数 m と共通零点を持たない $s_0, \ldots, s_m \in H(X, L) \setminus \{0\}$ が存在して $\varphi^{\mathrm{trop}}_{s_0,\ldots,s_m} : X^{\mathrm{an}} \to \mathbb{TP}^m$ が S を忠実にトロピカル化することを言う[7]．

次が，本稿における基本的な問いである．

問題 1.10 (直線束による忠実トロピカル化)**.** 与えられた骨格 S に対し，L が S の忠実トロピカル化を許容するための（非自明な）十分条件を与えよ．

この問いに対する既知の答え（先行結果）を，一つ紹介しよう．X は滑らかな射影曲線とする．$\mathscr{X} \to \mathrm{Spec}(k^\circ)$ は X の狭義半安定モデル[8]とする．このとき，このモデルから骨格 $S(\mathscr{X}) \subset X^{\mathrm{an}}$ が定義される．抽象的な多面体空間としては，$S(\mathscr{X})$ は $\mathscr{X} \to \mathrm{Spec}(k^\circ)$ の還元グラフに他ならない．

定理 1.11 ([8])**.** 上の設定の下，g を X の種数とする．$g \geq 2$ と仮定する[9]．L は X 上の直線束とする．このとき，$\deg(L) \geq 3g - 1$ ならば，任意の狭義半安定モデルから決まる骨格[10]に対し，L はその骨格の忠実トロピカル化を許容する．

---

[5]ここでは，$T_0, \ldots, T_m$ が $\mathbb{P}^m$ の斉次座標系のとき，超平面である $i = 0, \ldots, m$ に対し $T_i = 0$ で与えられるものを座標超平面と呼んでいる．

[6]有理函数系を用いた骨格の忠実埋め込み問題は [7] で論じられている．ただし，直線束は登場せず，直線束の正則切断を用いる形ではない．

[7]$s_0, \ldots, s_m \in H(X, L) \setminus \{0\}$ なので，$\varphi_{s_0,\ldots,s_m}$ の像は座標超平面には含まれない．

[8]「狭義」は，特殊ファイバーの各既約成分が非特異であることを意味している．

[9]$g \geq 2$ の仮定は本質的ではない．$g = 0, 1$ の場合でも，同様の結論が示されている．

[10][8] では，より一般に，無限遠境界を持つ骨格も対象としている．

1.6. **主結果（弱い形）.** 本稿では，アーベル多様体 A に対し，その「標準骨格」と呼ばれる骨格を対象とし，直線束が標準骨格に対し忠実トロピカル化を許容するための十分条件を考察する．標準骨格の定義は後回しにして，その主結果の弱い形をここで述べたい．

まずは，アーベル多様体とその上の豊富な直線束に対する次の古典的結果を思い出しておこう．

定理 1.12. A は $\mathbb{C}$ 上のアーベル多様体とし，L は A 上の豊富な直線束とする．このとき，$d \geq 3$ ならば $L^{\otimes d}$ は非常に豊富である．

この古典的定理の「トロピカル類似」として，次の結果を得た．

定理 1.13 ([9]，主結果（弱い形）)**.** 自然数 n を固定する．このとき，自然数 N が存在して次が成立する．任意の n 次元アーベル多様体 A とその上の任意の豊富な直線束 L，および $d \geq N$ なる任意の自然数 d に対し，$L^{\otimes d}$ は A の標準骨格に対する忠実トロピカル化を許容する．さらに，$n = 2$ のときは，上の N として 3 が取れる．

なお，定理 1.12 の類似として，上の定理において，いつでも $N = 3$ で取れるのではないかと期待しているが，今のところ，$n = 2$ のときしか証明できていない[11]．

定理 1.13 の証明に用いる基本的道具を説明したい．そのために，古典的な定理 1.12 の証明を簡単に思い出しておこう．$\mathbb{C}$ 上の n 次元アーベル多様体 A に対し，付随する複素解析空間を A^{an} で表す．これは n 次元複素トーラスであり，普遍被覆 $p : \mathbb{C}^n \to A^{\mathrm{an}}$ が取れる．L は A 上の直線束とする．$p^*(L)$ は $\mathbb{C}^n$ 上の自明な直線束を $\mathrm{Ker}(p)$ による適当な作用で割ったものとして実現でき，その作用はいわゆる降下データ（descent datum）を用いて与えられる．この降下データを用いて：

(1) 直線束 L の「型」と呼ばれる自然数の n 列 $(d_1, \ldots, d_n)$ で全ての $i = 1, \ldots, n-1$ に対し $d_i | d_{i+1}$ なるもの，
(2) L の大域切断のテータ函数としての記述，

が得られる．そして，L が豊富で $d_1 \geq 3$ のとき，しかるべきテータ函数を集めてきてそれらで射影空間への射を作ると，その射が埋め込みになっていることが示せたのであった．

我々の主結果も，似たような考え方で証明される．非アルキメデス的体上でもアーベル多様体の「一意化」の理論が Bosch と Lütkebohmert により整備されており，さらに直線束の型やテータ函数の理論も彼らにより整備されている．定理 1.13 の証明では，これら主要な登場人物となり，非アルキメデス的テータ函数を用いて，直線束の大域切断で標準骨格を忠実にトロピカル化するようなものを構成する．実際にそれが忠実トロピカル化になってい

[11]注意 2.4 も参照のこと．

ることを示す際には，トロピカルテータ函数の理論，特に，トロピカルテータ函数のなす $\mathbb{T}$ 上の半加群の然るべき基底を用いる．

なお，古典的な場合には，定理 1.12 より精密に「豊富な直線束 L の型を $(d_1, \ldots, d_n)$ とするとき，$d_1 \geq 3$ ならば L は非常に豊富」が示されている．我々の設定においても，このような型を用いたより精密な定理（後述の定理 2.3）を証明することになる[12].

2. 非アルキメデス的一意化と主結果

この節では，[2] によって整備された非アルキメデス的体上のアーベル多様体の一意化の理論を復習した後，標準骨格の定義を与える．また,（非アルキメデス的）テータ函数の理論を概説し，直線束の「型」を使った精密な形の定理を述べる．なお，本節の議論は非アルキメデス的体上の任意のアーベル多様体の場合に一般化できるが，話を簡単にするため，総退化な場合に限定して述べることにする．

2.1. **付値写像.** M は有限階数の自由 $\mathbb{Z}$ 加群とし，n をその階数とする．$N := \mathrm{Hom}(M, \mathbb{Z})$ とおく．$N_{\mathbb{R}} = \mathrm{Hom}(M, \mathbb{R})$ である．$\langle \cdot, \cdot \rangle : M \times N_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ で，標準的な双線型形式を表す．

$\chi^M := \{\chi^u\}_{u \in M}$ は，M の元で添え次づけられた（相異なる）文字の集合とし，$\chi^{u_1}\chi^{u_2} = \chi^{u_1+u_2}$ で群構造を入れる（つまり，$u \mapsto \chi^u$ は M から χ^M の群同型）．その群環 $k[\chi^M]$ は k 上の n 変数ローラン多項式環に同型である．$T := \mathrm{Spec}(k[\chi^M])$ を，M を指標格子とする代数トーラスとする．

$x \in T^{\mathrm{an}}$ に対し，写像 $M \to \mathbb{R}$ を $u \mapsto -\log|\chi^u(x)|$ で定めると，これは準同型写像であることに注意した上で，写像

$$\mathrm{val} : T^{\mathrm{an}} \to N_{\mathbb{R}}$$

を次の条件で定義する：各 $x \in T^{\mathrm{an}}$ に対し，任意の $u \in M$ に対し

$$\langle u, \mathrm{val}(x) \rangle := -\log|\chi^u(x)|$$

が成立する．[11] によって，val は（位相空間の間の写像として）固有であることが知られている．

各 $v \in N_{\mathbb{R}}$ に対し，写像 $\sigma(v) : k[\chi^M] \to \mathbb{R}$ を

$$\sum_{u \in M} a_u \chi^u \mapsto \max_{u \in M}\{|a_u| e^{-\langle u, v \rangle}\}$$

で定める．すると，これは $k[\chi^M]$ の乗法的ノルムであり，さらに k の絶対値 $|\cdot|_k$ の拡張になっていることがわかる．したがって，これは商体 $k(\chi^M)$ 上の絶対値で $|\cdot|_k$ を拡張したものを与える．$k(\chi^M)$ は T の生成点における剰余体なので，これにより T^{an} の点 $\sigma(v)$ が得られたことになる．

[12]ただし，繰り返すが，N として 3 が取れるかどうかは不明である．

こうして得られた写像 $\sigma : N_{\mathbb{R}} \to T^{\mathrm{an}}$ が $\mathrm{val} : T^{\mathrm{an}} \to N_{\mathbb{R}}$ の切断になっていることは，容易にわかる．σ が連続であることも容易に確認できる．また，val が固有であることから，σ は閉写像でもある．

そこで，$\Sigma := \sigma(N_{\mathbb{R}})$ と定める．これは T^{an} の閉部分集合であり，σ を通じて $N_{\mathbb{R}}$ と同相である．$N_{\mathbb{R}}$ の格子 N の σ による像を格子として，Σ には整構造が入る．この整構造が入った Σ を，T^{an}（または T）の**標準骨格**と呼ぶ．

次に，総退化アーベル多様体とその一意化について述べたい．T^{an} の**格子**とは，部分群 $M' \subset T(k)$ で（注意 1.1 にあるように，$T(k) \subset T^{\mathrm{an}}$），$\mathrm{val}|_{M'} : M' \to N_{\mathbb{R}}$ が像への同型写像であり，さらに像 $\mathrm{val}(M')$ が $N_{\mathbb{R}}$ の格子であるようなもののことである．アーベル多様体 A が**総退化**であるとは，格子 M と解析群の全射準同型写像 $p : T^{\mathrm{an}} \to A^{\mathrm{an}}$（ただし，$T = \mathrm{Spec}(k[\chi^M])$）が存在して $\mathrm{Ker}(p)$ が T^{an} の格子となることを言う．このとき，$M' := \mathrm{Ker}(p)$ とおけば，$A^{\mathrm{an}} \cong T^{\mathrm{an}}/M'$ と表せる．

なお，非自明な総退化なアーベル多様体 A に対し，上の $p : T^{\mathrm{an}} \to A^{\mathrm{an}}$ は代数多様体の解析化の間の解析的射であるが，代数多様体の間の射の解析化ではない．一意化は，解析空間の世界に行って初めてなされる．

A は総退化であると仮定する．$p : T^{\mathrm{an}} \to A^{\mathrm{an}}$ や M' は上の通りとする．このとき，連続写像 $\overline{\mathrm{val}} : A^{\mathrm{an}} \to N_{\mathbb{R}}/M'$ が存在して，図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] & T^{\mathrm{an}} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{val}"'] & A^{\mathrm{an}} \arrow[r] \arrow[d, "\overline{\mathrm{val}}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{val}(M') \arrow[r] & N_{\mathbb{R}} \arrow[r] & N_{\mathbb{R}}/M' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

は可換である．ここで，各行は完全列であることに注意しておく．val が固有写像なので，$\overline{\mathrm{val}}$ もそうである．

M' の T^{an} への作用は，T^{an} の標準骨格 Σ を保つことが示せる．したがって，A^{an} の閉部分集合 Σ/M' が得られる．また，$\mathrm{val} : T^{\mathrm{an}} \to N_{\mathbb{R}}$ の切断 σ は $\overline{\mathrm{val}} : A^{\mathrm{an}} \to N_{\mathbb{R}}/M'$ の切断 $\overline{\sigma} : N_{\mathbb{R}}/M' \to A^{\mathrm{an}}$ を誘導するが，それは $N_{\mathbb{R}}/M'$ から Σ/M' への同相写像を与える．Σ/M' を A^{an}（または A）の**標準骨格**と呼ぶ．

2.2. **直線束の降下データ**．アーベル多様体 A は総退化であると仮定する．$T = \mathrm{Spec}(k[\chi^M])$ および完全列

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow T^{\mathrm{an}} \longrightarrow A^{\mathrm{an}} \longrightarrow 0$$

は上の通りとする．

群準同型 $\lambda : M' \to M$ と写像 $c : M' \to k^{\times}$ の組 (λ, c) で，任意の $u_1', u_2' \in M'$ に対し

$$c(u_1' + u_2')c(u_1')^{-1}c(u_2')^{-1} = \chi^{\lambda(u_2')}(u_1')$$

が成立するものを,（直線束の）**降下データ** と呼ぶ.

注意 2.1. 降下データ (λ, c) が存在するとすると，上の等式の左辺の形から，$\chi^{\lambda(u_2')}(u_1')$ は (u_1', u_2') に関して対称でないといけない．実際には,（下降データの話とは無関係に,）$\chi^{\lambda(u_2')}(u_1')$ は (u_1', u_2') に関して対称であることは知られている．

下降データ (λ, c) が与えられたとき，M' の $T(k) \times k$ への作用が，各 $u' \in M$ に対し

$$(x, \alpha) \mapsto (x + u', \chi^{\lambda(u')} c(u')\alpha)$$

で定まる．この作用は，ベルコビッチ解析空間 $T^{\mathrm{an}} \times (\mathbb{A}^1)^{\mathrm{an}}$ への自由な解析的作用へ拡張する．その剰余を取ることにより，$T^{\mathrm{an}}/M' = A^{\mathrm{an}}$ 上の直線束[13]が定まる．GAGA により[14], それは A 上のある剛化直線束の解析化になっている．A 上のその剛化直線束を $L(\lambda, c)$ で表すことにする．以下では剛化直線束の剛化は重要な役割を果たさないので，これらを単に直線束と呼ぶ.

各 $(u_1', u_2') \in M' \times M'$ に対し $\langle \lambda(u_2'), \mathrm{val}(u_1') \rangle$ を対応させる $M' \times M'$ 上の $\mathbb{R}$ 値双線型形式を $M'_{\mathbb{R}} \times M'_{\mathbb{R}}$ 上に係数拡大して得られるものを，$Q_\lambda : M'_{\mathbb{R}} \times M'_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ で表す．注意 2.1 より，これは対称である．降下データ (λ, c) が**正**であるとは，$-Q_\lambda$ が正定値（すなわち，Q_λ が負定値）であることを言う.

次の「非アルキメデス的 Appell–Humbert の定理」が知られている．

定理 2.2 ([2]). A は総退化なアーベル多様体とする．M および M' は上の通りとする．

(1) (λ_1, c_1) と (λ_2, c_2) は直線束の降下データとする．このとき，$L(\lambda_1, c_1) \cong L(\lambda_2, c_2)$ であるためには，$\lambda_1 = \lambda_2$ かつ $u \in M$ が存在して任意の $u' \in M'$ に対し $c_1(u') = \chi^u(u') c_2(u')$ が成立することが必要かつ十分である．

(2) A 上の任意の直線束 L に対し，直線束の降下データ (λ, c) が存在して $L = L(\lambda, c)$ が成立する．さらに，$L = L(\lambda, c)$ が豊富であるためには，(λ, c) が正であることが必要かつ十分である．

A 上の豊富な直線束 L に対し，その「型」を定義しよう．定理 2.2 (2) より，正な降下データ (λ, c) が存在して $L = L(\lambda, c)$ が成立する．定理 2.2 (1) より，λ は一意的であることに注意する．L は豊富なので，Q_λ は特に非退化であり，したがって $\lambda : M' \to M$ は単射である．単因子論により，正の整数の列 $(d_1, \ldots, d_n)$ で全ての $i = 1, \ldots, n-1$ に対し $d_i | d_{i+1}$ なるものが一意に存在して，適当な基底に関する λ の行列表示が，対角成分が順に $d_1, \ldots, d_n$ となる対角行列になる．この列 $(d_1, \ldots, d_n)$ を L の**型**と呼ぶ.

---

[13]剛化直線束とは，A^{an} 上の直線束で 0 上のファイバーと k との同型が指定されたもののこと．

[14]ベルコビッチ解析空間の解析構造に関しても，GAGA が成立することが知られている．[1] 参照.

定理 2.3 ([9], 主結果). n は自然数とする．このとき，自然数 N' が存在して，次元が n の任意の（総退化[15]）アーベル多様体と A 上の任意の豊富な直線束 L に対し，L の型 $(d_1, \ldots, d_n)$ が $d_1 \geq N$ を満たすなら，L は標準骨格に対する忠実トロピカル化を許容する．また，$n = 2$ のときは，N として 3 で取れる．

注意 2.4. 一般に $N = 3$ で取れることを（古典的な場合の類似として）期待しているが，現時点では不明である．

注意 2.5. 本稿では，定理は A が総退化な場合についてのみ述べたが，総退化で半アーベル多様体による一意化定理（Raynaud 拡大を用いたもの）があり，さらに付値写像や Appell–Humbert の定理も一般化され，定理 2.3 は任意のアーベル多様体に対して成立する．ただし，一般には，標準骨格の次元はアーベル多様体の次元以下であることは注意しておく．

3. 主結果の証明の概略

A は n 次元アーベル多様体とする．以下では，A は総退化であると仮定する．$p : T^{\mathrm{an}} \to A^{\mathrm{an}}$ は代数トーラス T による一意化とし，$M' := \mathrm{Ker}(p)$ とおく．T の指標格子を M とし，N をその双対加群とする．前節で，付値写像 $\overline{\mathrm{val}} : A^{\mathrm{an}} \to N_{\mathbb{R}}/M'$ とその標準切断 $\overline{\sigma} : N_{\mathbb{R}}/M' \to A^{\mathrm{an}}$ が構成された．A^{an} の標準骨格とは $\overline{\sigma}$ の像であり，$\overline{\sigma}$ は $N_{\mathbb{R}}/M'$ と標準骨格の間の同型を与えた．

L は A 上の豊富な直線束とする．共通零点を持たない $s_0, \ldots, s_m \in H^0(A, L) \setminus \{0\}$ を取ったとき，$\varphi^{\mathrm{trop}}_{s_0,\ldots,s_m} : A^{\mathrm{an}} \to \mathbb{TP}^m$ が標準骨格を忠実にトロピカル化することを示すには，写像 $\varphi^{\mathrm{trop}}_{s_0,\ldots,s_m} \circ \overline{\sigma} : N_{\mathbb{R}}/M' \to \mathbb{TP}^m$ が忠実埋め込みであることを示せばよい．そうなるような $s_0, \ldots, s_m$ を構成するために，次のように議論する．まず，定理の条件を満たす直線束に対し，対応する降下データ (λ, c) をとり，さらにその「トロピカル化」として現れる「トロピカル降下データ」を考える．そして，それに関する「トロピカルテータ函数」で都合の良いものを用いて写像 $\Theta : N_{\mathbb{R}}/M' \to \mathbb{TP}^m$ を構成すると，それが忠実埋め込みであることを示す．その後，降下データ (λ, c) に関する（非アルキメデス的）テータ函数 $s_0, \ldots, s_m$ で，Θ を構成するときに用いたトロピカルテータ函数の然るべき持ち上げとなるものを構成する．そうすると，作り方より，$\varphi^{\mathrm{trop}}_{s_0,\ldots,s_m} \circ \overline{\sigma} = \Theta$ がわかり，結論が得られる．以下では，この概略に現れた道具について，もう少し説明を加える．

3.1. **トロピカルテータ函数.** これまでの記号遣いを踏襲する．以下では，Γ は k の値群とする，すなわち，$\Gamma := \{-\log|\alpha|_k \in \mathbb{R} \mid \alpha \in k^\times\}$ とおく．群準同型 $\lambda : M' \to M$ と写像 $\beta : M' \to \Gamma$（Γ は k の値群）の組 (λ, β) で，任意の $u'_1, u'_2 \in M'$ に対し

$$\beta(u'_1 + u'_2) - \beta(u'_1) - \beta(u'_2) = \langle \lambda(u'_2), \mathrm{val}(u'_1) \rangle \tag{3.1}$$

[15] この仮定は実は不要．注意 2.5 参照．

を満たすものを，**トロピカル降下データ**と呼ぶ．

(λ, c) は直線束の降下データとする．写像 $c_{\mathrm{trop}} : M' \to \Gamma$ を $c_{\mathrm{trop}}(u') := -\log |c(u')|$ で定める．すると，$(\lambda, c_{\mathrm{trop}})$ はトロピカル降下データである．これを，(λ, c) の**トロピカル化**と呼ぶ．

トロピカル降下データ (λ, β) に対し，先に定義した直線束の降下データのときと同様に，対称双線型形式 $Q_\lambda : M'_{\mathbb{R}} \times M_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ で，任意の $u'_1, u'_2 \in M'$ に対し $Q_\lambda = \langle \lambda(u_2), \mathrm{val}(u'_1) \rangle$ なるものが定まる．また，同様に，Q_λ が負定値のとき (λ, β) は**正**であるという．Q_λ を用いて表せば，(3.1) は

$$\beta(u'_1 + u'_2) - \beta(u'_1) - \beta(u'_2) = Q_\lambda(u'_1, u'_2)$$

と表されることに注意しておく．

トロピカル降下データ (λ, β) に関する**トロピカルテータ函数**とは，$N_{\mathbb{R}}$ 上の実数値函数 F で，任意の $v \in N_{\mathbb{R}}$ と任意の $u' \in M'$ に対し

$$F(v + u') = F(v) + \langle \lambda(u'), v \rangle + \beta(u')$$

が成立するもののことである．

注意 3.1. $F_0, \ldots, F_m$ がトロピカル降下データ (λ, β) に関する非自明なトロピカルテータ函数のとき，写像 $(F_0, \ldots, F_m) : N_{\mathbb{R}} \to \mathbb{T}^{m+1}$ は写像

$$(F_0 : \cdots : F_m) : N_{\mathbb{R}}/M' \to \mathbb{TP}^m$$

を誘導し，さらにその像は $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{TP}^m$ に含まれる．また，$N_{\mathbb{R}}/M'$ は自然に多面体空間である（例 1.7）．したがって，$(F_0 : \cdots : F_m)$ が忠実埋め込みかどうかという問いは意味を持つ．

いま，(λ, β) は正であると仮定する．$\mathfrak{B} \subset M$ を $\mathrm{Coker}(\lambda)$ の完全代表系とする．仮定より λ は単射なので，$\mathfrak{B}$ は有限集合であることを注意しておく．各 $b \in \mathfrak{B}$ に対し，任意の $v \in N_{\mathbb{R}}$ に対し，$\mathbb{R}$ の部分集合 $\{\langle b - \lambda(u'), v \rangle - \beta(u') + \langle b, \mathrm{val}(u') \rangle\}$ は最小元を持つことが示される．そこで，$N_{\mathbb{R}}$ 上の実数値函数を

$$\Theta_b(v) := \min_{u' \in M'} \{\langle b - \lambda(u'), v \rangle - \beta(u') + \langle b, \mathrm{val}(u') \rangle\} \tag{3.2}$$

で定める．これが (λ, β) に関するトロピカルテータ函数であることは確認できる（[12, 小節 3.4] 参照）．

定理 3.2 ([9])**.** $m := |\mathfrak{B}| - 1$ とおき，$\mathfrak{B} = \{b_0, \ldots, b_m\}$ と表す．正のトロピカル降下データ (λ, β) の型を $(d_1, \ldots, d_n)$ で表す（$m + 1 = d_1 \cdots d_n$ である）．このとき，自然数 N が存在して，$d_1 \geq N$ ならば

$$(\Theta_{b_0} : \cdots : \Theta_{b_m}) : N_{\mathbb{R}}/M' \to \mathbb{TP}^m \tag{3.3}$$

は忠実埋め込み（注意 3.1 参照）である．

3.2. **非アルキメデス的テータ函数.** $x \in T^{\mathrm{an}}$ に対し，$\kappa(x)$ の完備化を $\mathscr{H}(x)$ で表す．N の基底 $e_1, \ldots, e_n$ を任意にとる．$u \in M$ に対し，$|u|_{e_1,\ldots,e_n} := |u(e_1)| + \cdots + |u(e_n)|$ とおく．k の元を係数とする形式的無限和 $f = \sum_{u \in M} a_u \chi^u$ が $x \in T^{\mathrm{an}}$ で**収束する**とは，$|u|_{e_1,\ldots,e_n} \to \infty$ のとき

$$\sum_{u \in M} a_u \chi^u(x)$$

が $\mathscr{H}(x)$ で収束することを言う．収束性および収束するときの極限値は，N の基底 $e_1, \ldots, e_n$ の取り方には依らない．$\sum_{u \in M} a_u \chi^u$ が x で収束するとき，$\sum_{u \in M} a_u \chi^u(x)$ を f の x における**値**と呼ぶ．任意の $x \in T^{\mathrm{an}}$ で f が収束するとき，f は**収束**すると言う．

注意 1.2 でも言及したように，ベルコビッチ解析空間においては解析函数の概念がある．T^{an} 上の解析函数は，上の意味で収束する無限和に一意的に展開でき，かつ逆に収束する無限和は自然に解析函数を与える．そこで，以下では，上のような k 係数無限和で収束するもののことを T^{an} 上の**解析函数**と呼ぶことにする．

(λ, c) は降下データとする．これに関する**非アルキメデス的テータ函数**とは，T^{an} 上の解析函数 $f = \sum_{u \in M} a_u \chi^u$ であって，任意の $x \in T^{\mathrm{an}}$ と任意の $u' \in M'$ に対し

$$f(x + u') = f(x) \chi^{\lambda(u')}(x) c(u')$$

が成立するもののことである．このとき，f は A^{an} 上の直線束 $L(\lambda, c)$ の大域切断である．逆に，$L(\lambda, c)$ の大域切断を T^{an} に引き戻したものは，(λ, c) に関する非アルキメデス的テータ函数である．

$\mathfrak{B} \subset M$ は $\mathrm{Coker}(\lambda)$ の完全代表系とする．各 $b \in \mathfrak{B}$ に対し，

$$\vartheta_b := \sum_{u' \in M'} \chi^{b - \lambda(u')} c(u')^{-1} \chi^b(u')$$

と定める．

定理 3.3 ([9])**.** $b \in \mathfrak{B}$ とする．このとき，ϑ_b は，直線束の降下データ (λ, c) に関する非アルキメデス的テータ函数である．また，トロピカル降下データ $(\lambda, c_{\mathrm{trop}})$ に関して，(3.2) で与えられるトロピカルテータ函数 Θ_b について，

$$-\log |\overline{\sigma}^* (\vartheta_b)| = \Theta_b$$

が成立する．ただし，$\overline{\sigma} : N_{\mathbb{R}}/M' \to A^{\mathrm{an}}$ は付値写像 $\overline{\mathrm{val}} : A^{\mathrm{an}} \to N_{\mathbb{R}}/M'$ の標準切断である．

3.3. **定理 2.3 の証明.** 定理 3.2 と 定理 3.3 を認めれば，定理 2.3 の証明は簡単である．定理 3.2 の N をとる．L は総退化なアーベル多様体上の豊富な直線束とし，その型を $(d_1,\dots,d_n)$ とする．$d_1 \geq N$ と仮定する．直線束の降下データ (λ, c) が存在して $L \cong L(\lambda, c)$ が成立する．$\mathfrak{B} \subset M$ は $\mathrm{Coker}(\lambda)$ の完全代表系とし，$m := |\mathfrak{B}| - 1$，$\mathfrak{B} = \{b_0,\dots,b_m\}$ とおく．

ϑ_{b_j} を L の大域切断とみなし，

$$\varphi^{\mathrm{trop}}_{\vartheta_0,\dots,\vartheta_m} : A^{\mathrm{an}} \to \mathbb{TP}^m$$

を考える．定理 3.3 より，$\varphi_{\vartheta_0,\dots,\vartheta_m} \circ \overline{\sigma} = (\varTheta_{b_0} : \cdots : \varTheta_{b_m})$ である．ただし，$\varTheta_{b_j}$ はトロピカル降下データ $(\lambda, c_{\mathrm{trop}})$ に関するトロピカルテータ函数である．仮定より $(\lambda, c_{\mathrm{trop}})$ は正で $d_1 \geq N$ なので，定理 3.2 より，これは忠実埋め込みである．よって，主結果が得られた．

3.4. **定理 3.2 の証明に関して.** (λ, β) は正のトロピカル降下データで，その型を $(d_1,\dots,d_n)$ で表す．定理 3.2 の仮定を満たすと仮定する．

定理 3.2 を示すには，写像

$$(\varTheta_{b_1} - \varTheta_{b_0}, \dots, \varTheta_{b_m} - \varTheta_{b_0}) : N_{\mathbb{R}}/M' \to \mathbb{R}^m \tag{3.4}$$

が，

(1) $d_1 \geq 3$ ならば単射であることと，
(2) n のみに依存する N が存在して $d \geq N$ ならばユニモジュラーであること

を，それぞれ示せばよい．どちらも自明ではないが，(2) の方が難しい．

(2) 証明で何が用いられるかについて言及して，本稿を終えたい．話を簡単にするために，$M = \mathbb{Z}^n$ とする．型 $(d_1,\dots,d_n)$ については，$d_1 = \cdots = d_n =: d$ と仮定する．また，$\mathfrak{B} = [d-1]^n$ と取れると仮定する（これは，M と M' の基底を適切に取れば可能である）；ただし，$[d-1] := \{0, 1, \dots, d-1\}$ とおいている．

M に標準内積（記号は $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で表す）を入れることにして，自然に $N = \mathbb{Z}^n = M$ とみなす．$M' \subset N_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^n$ とみなす．$M'_{\mathbb{R}} = N_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^n$ 上の対称双線型形式 $-Q_\lambda : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は正定値であることに注意して，対応する行列を ${}^tPP$ で表す．ただし，$P = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \dots & \mathbf{p}_n \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ である．任意の $b \in M$ をとり，$b = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$ と書く．このとき，トロピカル降下データのみに

依存する定数 $C \in \mathbb{R}$ が存在して，任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対し $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := Px$ とおけば，

$$\Theta_b(x) = \min_{a \in \mathbb{Z}^n} \left\{ \frac{1}{2} \left\langle \sum_{i=1}^{n} \left(a_i + \frac{l_i}{d} + y_i \right) \mathbf{p}_i, \sum_{i=1}^{n} \left(a_i + \frac{l_i}{d} + y_i \right) \mathbf{p}_i \right\rangle \right\} - \frac{1}{2} \langle y, y \rangle + C \tag{3.5}$$

が成立する．ただし，$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^n$ である．

$\mathbb{R}^n$ のある点で (3.4) がユニモジュラーであることを示すには，各 b に対し，(3.5) の右辺の min がどの $a \in \mathbb{Z}^n$ で与えられるかを知る必要がある．そのためには,「ボロノイ領域」を考えることが有効である。$\mathbb{R}^n$ の格子

$$L := \sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\mathbf{p}_i$$

を考える．$\mathbb{R}^n$ の部分集合

$$V(L; 0) := \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \text{任意の } \mathbf{p} \in L \text{ に対し } \langle y, y \rangle \leq \langle y + \mathbf{p}, y + \mathbf{p} \rangle \}$$

を,（格子 L の 0 における）**ボロノイ領域**と呼ぶ．これは，$0 \in L$ が最短距離の格子点であるような点全体の集合である．各 L の点に対し、その点におけるボロノイ領域も同様に定義できる．

$\frac{l_i}{d}$ の整数部分を $\widetilde{c}_i$ とおく．また，$\widetilde{y}_i := y_i - \left(\widetilde{c}_i - \frac{l_i}{d}\right)$ とおく．すると，(3.5) の右辺の min の部分は

$$\min_{a \in \mathbb{Z}^n} \left\{ \frac{1}{2} \left\langle \sum_{i=1}^{n} (a_i + \widetilde{c}_i + \widetilde{y}_i)\, \mathbf{p}_i, \sum_{i=1}^{n} (a_i + \widetilde{c}_i + \widetilde{y}_i)\, \mathbf{p}_i \right\rangle \right\}$$

となる．これにより，例えば $\begin{pmatrix} \widetilde{y}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{y}_n \end{pmatrix} \in V(L; 0)$ であれば，この min をとる a は $a = -\begin{pmatrix} \widetilde{c}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{c}_n \end{pmatrix}$ であることがわかる．

以上はほんの一例であるが，ボロノイ領域を利用することによって，(3.5) においてどこで min を取るのかを知って Θ_b の傾きを把握し，(3.4) のユニモジュラー性を示すことになる[16]．

[16] ボロノイ領域についての必要な性質は，[10] を引用している．

References

[1] V. G. Berkovich, Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields. Mathematical Surveys and Monographs, 33. American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.

[2] S. Bosch and W. Lütkebohmert, Degenerating abelian varieties, Topology **30** (1991), no. 4, 653–698.

[3] T. Foster, J. Rabinoff, F. Shokrieh, and A. Soto, *Non-Archimedean and tropical theta functions*, Math. Ann. **372** (2018), no. 3-4, 891–914.

[4] W. Gubler, Tropical varieties for non-archimedean analytic spaces, Invent. Math. **169** (2007), 321–376.

[5] W. Gubler, The Bogomolov conjecture for totally degenerate abelian varieties, Invent. Math. **169** (2007), 377–400.

[6] W. Gubler, Non-archimedean canonical measures on abelian varieties, Compos. Math. **146** (2010), 683–730.

[7] W. Gubler, J. Rabinoff, A. Werner, Skeletons and tropicalizations. Adv. Math. **294** (2016), 150–215.

[8] S. Kawaguchi and K. Yamaki, *Effective faithful tropicalizations associated to linear systems on curves*, Mem. Amer. Math. Soc. **270** (2021), no. 1323, v+110 pp.

[9] S. Kawaguchi and K. Yamaki, Faithful tropicalizations and embeddings on abelian varieties, in preperation.

[10] C. Hunkenschöder, G. Reuland, and MSchymura *On compact representations of Voronoi cells of lattices*, Math. Program. **183** (2020), no. 1-2, Ser. B, 337–358.

[11] S. Payne, Analytification is the limit of all tropicalizations, Math. Res. Lett. **16** (2009), no. 3, 543–556.

[12] K. Sumi, *Tropical theta functions and Riemann-Roch inequality for tropical Abelian surfaces*, Math. Z. **297** (2021), no. 3-4, 1329–1351.

[13] K. Yamaki, Geometric Bogomolov conjecture for abelian varieties and some results for those with some degeneration (with an appendix by Walter Gubler: The minimal dimension of a canonical measure), Manuscr. Math. **142** (2013), 273–306.

[14] K. Yamaki, Strict support of canonical measures and applications to the geometric Bogomolov conjecture, Compos. Math. **152** (2016), no.5, 997–1040.

筑波大学数理物質系

Email address: `yamaki.kazuhiko@math.tsukuba.ac.jp`